ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 1

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Н. П. БУСЛЕНКО, Г. А. СОКОЛОВ

В настоящей статье рассматриваются задачи оптимального распределения, возникающие в экономике и технике, которые приводят к схеме выпуклого программирования с функциями, заданными в произвольном виде: аналитическими выражениями, при помощи алгоритмов, таблиц, полученных экспериментально или методом статистического моделирования, и т. д. Предлагается метод приближенного решения такого рода задач, основанный на замене исходной задачи другой, ей эквивалентной. Процедура решения сводится к многократному определению экстремума функции одной переменной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди математических методов, используемых для решения проблем организации производства, экономики и исследования операций, существенное место занимают методы оптимального распределения. В настоящее время имеются многочисленные примеры решения задач оптимального распределения, возникающих на практике. Приобретен значительный опыт в области формализации и математического описания исследуемых процессов, в построении соответствующих математических моделей. Разработаны удобные вычислительные приемы для важных классов задач оптимального распределения, особенно для задач линейного программирования и выпуклого программирования [1—3].

Однако внедрение методов оптимального распределения в повседневную практику экономических расчетов и исследования операций затрудняется рядом причин. В первую очередь сюда относятся вычислительные трудности, которые объясняются как несовершенством расчетных схем, так и главным образом неприспособленностью существующего парка цифровых вычислительных машин.

Вместе с тем немаловажную роль играет то обстоятельство, что распространенные математические модели выпуклого и особенно линейного программирования оказываются недостаточными для описания с необходимой точностью некоторых типов актуальных практических задач. Вследствие этого зачастую решения задач оптимального распределения, полученные на основе грубой формализации, не представляют интереса для практики. С другой стороны, попытка традиционным путем построить методы решения задач линейного и выпуклого программирования, сформулированных с необходимой общностью, наталкивается на серьезные трудности принципиального и вычислительного характера.

Известно, что для описания процессов функционирования сложных систем с учетом широкого круга действующих факторов успешно используется метод статистического моделирования [4, 5]. Реализация моделирующего алгоритма на цифровой вычислительной машине позволяет накопить информацию для оценки функционалов, характеризующих свойства сложной системы. С этой точки зрения метод статистического моделирования сходен с натурным экспериментом. В обоих случаях могут быть построены таблицы значений функционалов для различных вариантов распределения при условии, что все положенные ограничения выполнены.

К сожалению, метод статистического моделирования не позволяет непосредственно получить оптимальный вариант распределения. Существующие алгоритмы решения задач нелинейного программирования методом статистических испытаний оказываются недостаточно эффективными. Алгоритмы направленного отбора вариантов не всегда гарантируют от ошибок, связанных с выделением локального экстремума. Поэтому существенное значение имеет разработка методов решения задач нелинейного программирования для случая, когда функция цели и ограничения не заданы аналитическими выражениями.

В настоящей статье рассматривается один из возможных подходов к решению такого рода задач.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим сложную систему, состоящую из некоторого числа агрегатов [6]. Состояния ее в каждый момент времени t будем характеризовать набором величин z_l $(l = 1, 2, \ldots, l^*)$. Процесс функционирования системы в интервале времени $(0 \leqslant t \leqslant T)$ описывается функциями $z_l(t)$ соответственно.

Существенный практический интерес с точки зрения экономики и техники представляют такие типы сложных систем, для которых функции $z_l(t)$ оказываются реализациями случайных процессов $\xi_l(t)$. Случайный характер функционирования системы определяется влиянием внешней среды, а также наличием источников случайных воздействий среди агрегатов системы.

Для построения формализованной схемы исследуемого процесса и соответствующей математической модели, обеспечивающей решение задач с достаточной точностью, необходимо учитывать основные факторы, действующие на систему. Среди наиболее часто учитываемых на практике групп факторов в первую очередь целесообразно отметить случайные ошибки и флуктуации входной информации, поступающей в систему, а также случайные отклонения значений параметров самой системы. Вероятностные характеристики упомянутых величин обычно изучаются экспериментально. Другая существенная группа факторов относится к надежности функционирования элементов системы. Элементы не являются абсолютно надежными и могут выходить из строя в процессе функционирования системы. Моменты сбоя $t^{(сб)}$ и потребное время ремонта $\tau^{(р)}$ оказываются случайными величинами и описываются соответствующими вероятностными характеристиками.

Для различных сложных систем, особенно связанных с массовым обслуживанием заявок или клиентов, приходится учитывать факторы, определяющие режим занятости элементов системы. Здесь используются параметры, описывающие моменты начала функционирования каждого агрегата, длительность выполняемой им операции, а также последовательность операций во времени. Во многих случаях жесткая синхронизация не может быть обеспечена и имеют место случайные отклонения моментов начала и окончания операций.

Обычно в сложных системах имеется более или менее четко выделенный у п р а в л я ю щ и й агрегат, который производит распределение функций между агрегатами системы и во времени. В результате работы управляющего агрегата в некоторые моменты времени вырабатывается набор величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяющих дальнейший порядок функционирования системы. Набор величин x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в дальнейшем будем называть планом или распределением.

Легко видеть, что процесс функционирования системы, описываемый функциями состояний $z_l(t)$, полностью определяется планом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и набором величин α_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, включающим в себя параметры системы, значения случайных ошибок и отклонений, моменты отказа ненадежных элементов и длительности их ремонта, характеристики, описывающие режим занятости агрегатов, и т. д.

Пусть качество функционирования системы оценивается при помощи некоторого функционала Φ, определенного на множестве функций $z_l(t)$. Тогда

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Обычно на величины x_i накладываются ограничения вида

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, k^*;$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant a_i,$$

где a_i в общем случае зависят от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Задача оптимального распределения состоит в определении таких значений $\hat{x}_i$ величин x_i, чтобы функционал Φ получил минимальное (соответственно максимальное) значение при выполнении всех ограничений, и с учетом того обстоятельства, что в общем случае среди α_j и a_i имеются случайные величины, заданные соответствующими вероятностными характеристиками.

Для случая, когда функции Φ, g_k и a_i заданы аналитическими выражениями и соблюдены некоторые весьма жесткие ограничения, в настоящее время имеются вычислительные приемы, пригодные для решения ряда узких классов задач оптимального распределения. Однако общих методов решения широкого класса подобных задач не существует. Последнее замечание становится еще более очевидным для случая, когда функции Φ, g_k и a_i заданы не аналитическими выражениями.

Рассматриваемый ниже подход к решению задач оптимального распределения специально приспособлен к случаю, когда значения функций Φ, g_k и a_i могут быть получены лишь для некоторого набора точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Как показывают предварительные расчеты, применение этого подхода позволяет построить удовлетворительные с точки зрения практики вычислительные алгоритмы.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим следующую задачу I: минимизировать функцию $f(x)$ на множестве $R_0 = \{X \mid 0 \leqslant X \leqslant a, g_k(X) \leqslant 0, k = 1, \ldots, m\}$.

Здесь $f(X)$ и $g_k(X)$ — выпуклые (вниз), непрерывно дифференцируемые функции от n переменных.

Покажем, что задаче I асимптотически эквивалентна задача II:

$$f(X) + \frac{1}{c} \sum_k e^{c g_k(X)} = \min$$

при условиях

$$0 \leqslant X \leqslant a.$$

Здесь $c > 0$ — константа.

Эквивалентность этих задач следует понимать в том смысле, что решение одной из них является допустимым вектором другой и минимальные значения функций цели совпадают. Под асимптотической эквивалентностью понимается эквивалентность при $c \to \infty$.

Прежде всего заметим, что функция цели задачи II выпукла, ибо сумма выпуклых функций выпукла, $1/c > 0$ и $e^{cg_k(X)}$ есть выпуклая функция [7]. Для полноты изложения докажем последнее.

Пусть X_1 и X_2 — две произвольные точки из области $0 \leqslant X \leqslant a$. Тогда в силу выпуклости $g_k(X)$ получим

$$e^{cg_k\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)} \leqslant e^{(c/2)[g_k(X_1)+g_k(X_2)]} = e^{(c/2)g_k(X_1)}\, e^{(c/2)g_k(X_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{cg_k(X_1)} + e^{cg_k(X_2)}\right] - \frac{1}{2}\left[e^{\frac{cg_k(X_1)}{2}} - e^{\frac{cg_k(X_2)}{2}}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[e^{cg_k(X_1)} + e^{cg_k(X_2)}\right].$$

Теперь перейдем к доказательству асимптотической эквивалентности задач I и II.

Обозначим решение задачи II, отвечающее фиксированному значению c, через $X(c)$. Ясно, что при любом c оно существует. Пусть также

$$\gamma(c) = \min_{0 \leqslant X \leqslant a}\left[f(X) + \frac{1}{c}\sum_k e^{cg_k(X)}\right].$$

Лемма 1. $\gamma(c) \leqslant f(X^0) + \frac{1}{c}\sum_k e^{cg_k(X^0)}$, *где* X^0 *минимизирует* $f(X)$ *при условии* $X \in R_0$.

Доказательство почти очевидно.

$$\gamma(c) = \min_{0 \leqslant X \leqslant a}\left[f(X) + \frac{1}{c}\sum_k e^{cg_k(X)}\right] \leqslant f(X') + \frac{1}{c}\sum_k e^{cg_k(X')},$$

где X' — произвольная точка, удовлетворяющая условию $0 \leqslant X \leqslant a$; в частности, в качестве X' можно взять X^0.

С л е д с т в и е. Если $\gamma(c)$ имеет предел при $c \to \infty$, то

$$\gamma(\infty) = \lim_{c\to\infty} \gamma(c) \leqslant \min_{X \in R_0} f(X).$$

Лемма 2. *При* $c \nearrow \infty$ $\rho(X(c), R_0) \to 0$.

Данная лемма утверждает, что при $c \to \infty$ решение задачи II стремится принять такое значение $0 \leqslant X(\infty) \leqslant a$, что $g_k(X(\infty)) \leqslant 0$ при всех k. Предположим, что это не так, т. е. существует такой номер k_0 и такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех c

$$g_{k_0}(X(c)) \geqslant \varepsilon_0.$$

Тогда в силу ограниченности $f(X)$ при $0 \leqslant X \leqslant a$ имеем

$$\gamma(c) = f(X(c)) + \frac{1}{c}\sum_{k \neq k_0} e^{cg_k(X(c))} + \frac{1}{c}e^{cg_{k_0}(X(c))} \geqslant$$

$$\geqslant f(X(c)) + \frac{1}{c}\sum_{k \neq k_0} e^{cg_k(X(c))} + \frac{1}{c}e^{c\varepsilon_0} \to \infty \text{ при } c \to \infty.$$

Полученное противоречит лемме 1 и ее следствию. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f(X)$ *и* $g_k(X)$ *— непрерывные выпуклые функции, мно-*

жество $R_0 = \{X \mid g_k(X) \leqslant 0,\ 0 \leqslant X \leqslant a\}$ *регулярно в смысле Слейтера* [8], *тогда*

$$\lim_{\mu \to 0} \min_{\substack{0 \leqslant X \leqslant a \\ g_k(X) \leqslant \mu}} f(X) = \min_{\substack{0 \leqslant X \leqslant a \\ g_k(X) \leqslant 0}} f(X).$$

Введем обозначения

$$R_\mu^- = \{X \mid 0 \leqslant X \leqslant a,\ g_k(X) \leqslant \mu,\ \mu \leqslant 0\},$$

$$R_\mu^+ = \{X \mid 0 \leqslant X \leqslant a,\ g_k(X) \leqslant \mu,\ \mu \geqslant 0\},$$

$$U_\delta(X^0) = \{X \mid \rho(X, X^0) \leqslant \delta\},$$

$$\rho(X, X^0) = \sqrt{\sum_1^n (x_i - x_i^0)^2},$$

$$R_0^- = R_0^+ = R_0,$$

$$\tilde{R}_0 = \{X \mid 0 \leqslant X \leqslant a,\ g_k(X) < 0\}.$$

Докажем сначала, что

$$\lim_{\mu \to 0} \min_{X \in R_\mu^-} f(X) = \min_{X \in R_0} f(X).$$

Пусть $\min\limits_{X \in R_0} f(X) = f(X^0)$ и $g_k(X^0) = 0$ хотя бы при одном k.
В силу непрерывности $f(X)$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$X \in U_\delta(X^0) \Rightarrow f(X) \leqslant f(X^0) + \varepsilon.$$

При любом $\mu \leqslant 0$ $R_\mu^- \subseteq R_0$. Покажем, что для всякого $\delta > 0$ найдется такое $\mu(\delta) < 0$, что

$$\mu \geqslant \mu(\delta) \Rightarrow R_\mu^- \cap U_\delta(X^0) \neq \phi.$$

В силу регулярности R_0 существует точка $X^* \in \tilde{R}_0$. Соединим точки X^0 и X^* отрезком; в силу выпуклости R_0 для любого α $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

$$\alpha X^0 + (1 - \alpha) X^* \in R_0,$$

а в силу выпуклости $g_k(X)$

$$g_k(\alpha X^0 + (1 - \alpha) X^*) \leqslant \alpha g_k(X^0) + (1 - \alpha) g_k(X^*).$$

По определению точек X^0 и X^* имеем

$$g_k(X^0) \leqslant 0 \quad \text{при всех } k,$$

$$g_k(X^*) < 0 \quad \text{при всех } k.$$

Следовательно, при любом α $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$g_k(X_\alpha) < 0 \quad \text{при всех } k,$$

где $X_\alpha = \alpha X^0 + (1 - \alpha) X^*$.

Если в качестве α взять число α^0, превышающее

$$1 - \sqrt{\frac{\delta}{\sum\limits_{i=1}^n (x_i^* - x_i^0)^2}}$$

то $X_{\alpha^0} \in U_\delta(X^0)$, действительно,

$$\sum_i (\alpha^0 x_i^0 + (1 - \alpha^0) x_i^* - x_i^0)^2 = (1 - \alpha^0)^2 \sum_i (x_i^* - x_i^0)^2 < \delta.$$

Таким образом, $X_{\alpha^0} \in U_\delta(X^0) \cap \bar{R}_0$.

Отсюда следует, что

$$g_k(X_{\alpha^0}) = \lambda_k < 0 \quad \text{при всех } k.$$

Положим $\mu(\delta) = \max\limits_k \lambda_k$.

Тогда, очевидно,

$$g_k(X_{\alpha^0}) \leqslant \mu(\delta) < 0 \quad \text{при всех } k.$$

Это условие тем более выполняется при всех μ, $0 > \mu \geqslant \mu(\delta)$, и наше утверждение доказано.

Вернемся к доказательству леммы. Согласно вышеизложенному, по любому $\delta(\varepsilon)$ можно найти такое $\mu(\delta(\varepsilon))$, что

$$\mu \geqslant \mu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow R_\mu^- \cap U_\delta(X^0) \neq \phi.$$

Тогда для любого такого μ и любого $X' \in R^-_{\mu(\delta(\varepsilon))} \cap U_\delta(X^0)$

$$\min_{X \in R_\mu^-} f(X) \leqslant \min_{X \in R_\mu^-{}_{(\delta(\varepsilon))} \cap U_\delta(X^0)} f(X) \leqslant f(X') \leqslant f(X^0) + \varepsilon = \min_{X \in R_0} f(X) + \varepsilon.$$

С другой стороны, поскольку при любом $\mu < 0$

$$R_\mu^- \subseteq R_0,$$

то $\min\limits_{X \in R_\mu^-} f(X) \geqslant \min\limits_{X \in R_0} f(X)$ и непрерывность слева функции $\min\limits_{X \in R_\mu} f(X)$ в точке $\mu = 0$ доказана, если точка X^0 такова, что хотя бы при одном k $g_k(X^0) = 0$. Остается рассмотреть случай, когда при всех k

$$g_k(X^0) < 0,$$

но он сводится к предыдущему, и первая часть леммы доказана полностью.

Вторая часть леммы утверждает, что

$$\lim_{\mu \to 0} \min_{X \in R_\mu^+} f(X) = \min_{X \in R_0} f(X).$$

Действительно, возьмем произвольное число $\delta > 0$ и рассмотрим произвольную последовательность $\mu_i \searrow 0$. Ей соответствует последовательность R_{μ_i} и X^{μ} *. Если при некотором μ_{i_0} $X^{\mu_{i_0}} \in R_0$, то для всех $\mu_i \leqslant \mu_{i_0}$, очевидно, $U_\delta(X^{\mu_i}) \cap R_0 \neq \phi$, что и доказывает утверждение. Поэтому предположим, что ни при каком μ_i $X^{\mu_i} \notin R_0$. По определению области R_{μ_i} при $\mu_i \to 0$ $\max g_k(X^{\mu_i}) \to 0$, следовательно, в силу непрерывности $g_k(X)$ $\rho(X_{\mu_i}, R_0) \to 0$, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$, в частности, $\varepsilon < \delta$, существует такое μ_{i_0}, что для всех $\mu_i \leqslant \mu_i$, $\rho(X^{\mu_i}, R_0) < \varepsilon$. Это значит, что существует такая точка $X^0 \in R_0$, что $\rho(X^{\mu_{i_0}}, X_0) < \varepsilon$ для всех $\mu_i \leqslant \mu_{i_0}$, т. е.

$$X_0 \in N_\varepsilon(X^{\mu_i}) \cap R_0,$$

но $U_\varepsilon(X^{\mu_i}) \subseteq U_\delta(X^{\mu_i})$, следовательно, $X_0 \in U_\varepsilon(X^{\mu_i}) \cap R_0 \neq \phi$ при всех $\mu_i \leqslant \mu_{i_0}$.

Из этого утверждения сразу же следует доказательство второй части леммы.

---

* X^{μ_i} — точка, реализующая $\min\limits_{X \in R_{\mu_i}} f(X)$.

Действительно, в силу непрерывности $f(X)$ для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$X \in U_\delta(X^\mu) \Rightarrow |f(X) - f(X^\mu)| \leqslant \varepsilon,$$

где μ — произвольно. В частности, по этому $\delta(\varepsilon)$ можно подобрать такое $\mu(\delta(\varepsilon))$, что $U_\delta(X^\mu) \cap R_0 = U_\delta^+(X^\mu) \neq \phi$ для всех $\mu \leqslant \mu(\delta(\varepsilon))$. Но тогда для каждого такого μ и всех $X \in U_\delta^+(X^\mu)$ имеем $0 \leqslant f(X) - f(X^\mu) \leqslant \varepsilon$. Учитывая то, что для всех таких X $f(X^0) \leqslant f(X)$, получим

$$f(X^0) - f(X^\mu) \leqslant f(X) - f(X^\mu) \leqslant \varepsilon.$$

С другой стороны, $R_\mu^+ \supseteq R_0$ при любом μ, следовательно,

$$f(X^\mu) = \min_{X \in R^+\mu} f(X) \leqslant f(X^0) = \min_{X \in R_0} f(X)$$

и непрерывность функции $\min\limits_{X \in R_\mu} f(X)$ справа в точке $\mu = 0$ доказана. Тем самым полностью доказана лемма.

Замечание. Условие Слейтера исключает случай, когда среди условий $g_k(X) \leqslant 0$ встречаются условия вида $g_{k'}(X) \leqslant 0$; $g_{k''}(X) \leqslant 0$, причем $-g_{k'}(X) = g_{k''}(X)$ — линейная функция.

Однако лемма при этом остается справедливой, и это видно из следующих соображений. Пусть точка X^* такова, что $g_k(X^*) < 0$ для всех k, кроме $k = k'$ и $k = k''$.

$$g_{k'}(X^*) = g_{k''}(X^*) = 0.$$

Существование такой точки предполагается. Тогда в соответствии с вышеизложенным для всякого δ можно найти такую точку $X_{\alpha^0} \neq X^*$, что

$$X_{\alpha^0} \in U_\delta(X^*) \cap \{X | g_k(X) < 0 \quad \text{для } k \neq k' \quad \text{и } k \neq k''\}$$

вместе с некоторой своей окрестностью $U_{\delta_1}(X_{\alpha^0})$, поскольку множество, стоящее справа, открыто. При этом, очевидно,

$$g_{k'}(X_{\alpha^0}) = g_{k''}(X_{\alpha^0}) = 0.$$

Наконец, по данному δ можно подобрать такое $\mu_1(\delta)$, что

$$U_{\delta_1}(X_{\alpha^0}) \subseteq U_\delta(X^0) \cap \{X | g_k(X) \leqslant \mu_1(\delta),\ k \neq k',\ k \neq k''\}$$

при всех $0 \geqslant \mu \geqslant \mu_1(\delta)$.
Для этого достаточно в качестве $\mu_1(\delta)$ взять число, равное $\max\limits_{k \neq k',\ k \neq k''} \lambda_k + \gamma$, где γ — некоторое малое положительное число.

Далее остается провести нормаль к гиперплоскости $-g_{k'}(X) = g_{k''}(X) = 0$ в точке X_{α^0}, на которой взять точку, принадлежащую $U_{\delta_1}(X_{\alpha^0})$, и подобрать такое $\mu_2(\delta)$, чтобы эта точка принадлежала множествам (несвязным)

$$g_{k'}(X) \leqslant \mu \leqslant 0; \quad -g_{k''}(X) \leqslant \mu \leqslant 0$$

для всех $0 \geqslant \mu \geqslant \mu_2(\delta)$. Если положить

$$\mu(\delta) = \max\,(\mu_1(\delta), \mu_2(\delta)),$$

то получим

$$\mu \geqslant \mu(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow R_\mu^- \cap U_\delta(X_0) \neq \phi.$$

Дальнейшие рассуждения остаются без изменения.

Теорема 1. *Задачи* I *и* II *асимптотически эквивалентны.*

Согласно лемме 2 при $c \nearrow \infty$ $\rho(X(c), R_0) \to 0$, а согласно следствию леммы 1 $\gamma(\infty) \min\limits_{X \in R_0} f(X)$. Таким образом, для доказательства теоремы остается показать, что $\gamma(\infty) \geqslant \min\limits_{X \in R_0} f(X)$. Согласно лемме 3 для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mu(\varepsilon)$, что

$$\min_{X \in R^+_{\mu(\varepsilon)}} f(X) \geqslant \min_{X \in R_0} f(X) - \varepsilon.$$

Далее,

$$\min_{X \in R^+_{\mu(\varepsilon)}} f(X) \leqslant \min_{X \in R^+_{\mu(\varepsilon)}} f(X) + \min_{X \in R^+_{\mu}} \frac{1}{c} e^{cg_k(X)} \leqslant$$

$$\leqslant \min_{X \in R^+_{\mu(\varepsilon)}} \left[f(X) + \frac{1}{c} \sum_k e^{cg_k(X)} \right].$$

В силу леммы 2 для всякого $\mu(\varepsilon) > 0$ найдется такое $c(\mu(\varepsilon))$, что $g_k(X) \leqslant \mu(\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, m$, как только $c \geqslant c(\mu(\varepsilon))$, следовательно, при всех $c \geqslant c(\mu(\varepsilon))$

$$\min_{X \in R^+_{\mu(\varepsilon)}} \left[f(X) + \frac{1}{c} \sum_k e^{cg_k(X)} \right] = \gamma(c).$$

Таким образом, мы получим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $c(\varepsilon)$, что

$$\gamma(c) \geqslant \min_{X \in R_0} f(X) - \varepsilon$$

как только $c \geqslant c(\varepsilon)$, и теорема полностью доказана.

В заключение настоящего раздела заметим, что данный метод, вообще говоря, не обеспечивает монотонной сходимости $\gamma(c)$ к $\min\limits_{X \in R_\mu} f(X)$. Если функции $g_k(X)$ линейны, то их квадраты всегда выпуклы. В этом случае, приводя систему ограничений к виду

$$g_k(X) = 0, \quad 0 \leqslant X \leqslant a,$$

можно получить монотонную сходимость, полагая

$$\gamma(c) = \min_{0 \leqslant X \leqslant a} \left[f(X) + \sum_{k=1}^{m} e^{cg^2_k(X)} - m \right].$$

4. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ II

Запишем задачу II в более общей форме II′:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \min \quad \text{при } 0 \leqslant x_i \leqslant a_i,$$

где $F(x_1, \ldots, x_n)$ — выпуклая (вниз) непрерывная функция.

Данная задача может быть решена любым из известных методов выпуклого программирования. Однако мы приведем метод, специально приспособленный для решения задачи этого типа. Его простота, удобство машинной реализации будут очевидны, особенно в случае, когда функция цели задана не аналитически, а в виде, скажем, статистической модели. Предлагаемый метод является обобщением известного в квадратичном программировании метода Хилдрета и Д'Эзопо [9]. Он начинается с произвольной допустимой точки X^0, $0 \leqslant X^0 \leqslant a$ и далее строится итерационно последовательность X^0, X^1, X^2, ... Предположим, что получена точка X^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, и изложим построение точки X^{p+1}. Последняя получается покомпонентно в результате минимизации функций одного переменного

$$F(x_1, x_2^p, \ldots, x_n^p) \text{ по } x_1 \in [0, a_1],$$

$$F(x_1^{p+1}, x_2, x_3^p, \ldots, x_n^p) \text{ по } x_2 \in [0, a_2],$$

$$F(x_1^{p+1}, \ldots, x_{n-1}^{p+1}, x_n) \quad \text{по } x_n \in [0, a_n].$$

Очевидно,

$$F(X^0) \geqslant F(X') \geqslant \ldots \geqslant F(X^p) \geqslant F(X^{p+1}) \geqslant \ldots \geqslant \min_{0 \leqslant X \leqslant a} F(X).$$

Введем обозначение

$$X^{p+1} = P(X^p).$$

Тогда из предыдущей цепочки неравенств следует

$$F(P(X)) \leqslant F(X).$$

Лемма 4. *Пусть функция $F(X)$ выпукла и непрерывно дифференцируема, тогда равенство $F(P(X)) = F(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $X = \hat{X}$, где $\hat{X}$ есть решение задачи* II$'$.

Сделаем одно предварительное замечание. Все предыдущие утверждения были верны в классе функций, являющихся лишь непрерывными. Что же касается данной леммы, точнее, достаточности сформулированного утверждения, то легко привести пример непрерывной выпуклой функции, для которой она неверна. Действительно, пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x, & y \geqslant x, \\ 1 - y, & x \geqslant y, \end{cases}$$

и минимум этой функции ищется в области

$$R: \quad \begin{aligned} &0 \leqslant x \leqslant 1, \\ &0 \leqslant y \leqslant 1. \end{aligned}$$

Он достигается, очевидно, в точке (1,1) и равен нулю. Однако для любой точки с координатами $x^* = y^*$ имеем

$$f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y) \text{ при любом } y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$f(x^*, y^*) \leqslant f(x, y^*) \text{ при любом } x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Необходимость этого утверждения очевидна. Докажем достаточность Из равенства $F(P(X)) = F(X)$ следует, что при всех i

$$\min F(x_1^p, \ldots, x_{i-1}^p, x_i, x_{i+1}^p, \ldots, x_n^p) = F(x_1^p, \ldots, x_n^p).$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^p, \ldots, x_n^p) \begin{cases} = 0 \text{ при } 0 < x_i < a_i, \\ \geqslant 0 \text{ при } x_i = 0, \\ \leqslant 0 \text{ при } x_i = a_i, \end{cases}$$

что представляет иное выражение условий Куна — Таккера, являющихся необходимыми и достаточными в случае выпуклой функции цели и выпуклой допустимой области.

В данном случае они имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -y_i + w_i,$$

$$x_i + v_i = a_i,$$

$$x_i w_i = y_i v_i = 0,$$

$$w_i \geqslant 0, v_i \geqslant 0, y_i \geqslant 0, x_i \geqslant 0.$$

1. Пусть $a_i > x_i > 0$.

Тогда
$$\left.\begin{array}{l} x_i < a_i \Rightarrow v_i > 0 \Rightarrow y_i = 0 \\ x_i > 0 \Rightarrow w_i = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

2. Пусть $x_i = 0$.

Тогда
$$x_i = 0 \left|\begin{array}{l} \Rightarrow v_i = a_i > 0 \Rightarrow y_i = 0 \\ \Longrightarrow w_i \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = w_i \geqslant 0.$$

3. Пусть $x_i = a_i$.

Тогда
$$x_i = a_i > 0 \left\langle\begin{array}{l} v_i = 0 \Rightarrow y_i \geqslant 0 \\ w_i = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = -y_i \leqslant 0.$$

Разобьем множество индексов $i = 1, \ldots, n$ на два непересекающихся произвольных подмножества I_1 и I_2 и обозначим вектор, составленный из компонент x_i, $i \in I_1$, через X^1, а вектор, составленный из компонент a_i, $i \in I_1$, через a^1. Аналогично X^2 и a^2.

Справедлива следующая

Лемма 5. *Если $F(X)$ — выпуклая функция от X для $0 \leqslant X \leqslant a$, то функция*

$$\gamma(X^1) = \min_{0 \leqslant X^2 \leqslant a^2} F(X^1, X^2)$$

также выпукла для $0 \leqslant X^1 \leqslant a^1$.

Для доказательства этой леммы воспользуемся тем же приемом, который применил Р. Беллман при доказательстве одной из своих теорем*.

Для любого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ имеем

$$\gamma(\lambda X_1^1 + (1-\lambda) X_2^1) = \min_{0 \leqslant X^2 \leqslant a^2} F(\lambda X_1^1 + (1-\lambda) X_2^1, X^2),$$

где X_1^1 и X_2^1 — произвольные точки из области $0 \leqslant X^1 \leqslant a^1$.

Заменим X^2 величиной $X^2 = \lambda X_1^2 + (1-\lambda) X_2^2$, где X_1^2 и X_2^2 изменяются независимо друг от друга в области $0 \leqslant X_i^2 \leqslant a^2$, $i = 1, 2$. Тогда, учитывая выпуклость $F(X)$, получим

$$\gamma(\lambda X_1^1 + (1-\lambda) X_2^1) = \min_{\substack{0 \leqslant X_1^2 \leqslant a^2 \\ 0 \leqslant X_2^2 \leqslant a^2}} F(\lambda X_1^1 + (1-\lambda) X_2^1, \lambda X_1^2 + (1-\lambda) X_2^2) \geqslant$$

$$\leqslant \min_{\substack{0 \leqslant X_1^2 \leqslant a^2 \\ 0 \leqslant X_2^2 \leqslant a^2}} [\lambda F(X_1^1, X_1^2) + (1-\lambda) F(X_2^1, X_2^2)] \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \min_{0 \leqslant X_1^2 \leqslant a^2} F(X_1^1, X_1^2) + (1-\lambda) \min_{0 \leqslant X_2^2 \leqslant a^2} F(X_2^1, X_2^2) =$$

$$= \lambda \gamma(X_1^1) + (1-\lambda) \gamma(X_2^1).$$

Из выпуклости функции $\gamma(X')$ следует ее непрерывность [3] во всех внутренних точках, а из выпуклости и непрерывности $F(X)$ следует односторонняя непрерывность в граничных точках [11].

---

* См. [10], стр. 40.

Лемма 6. *Если функция $F(X)$ непрерывна, выпукла и по каждой переменной не обращается в константу ни на каком отрезке ненулевой длины, то оператор P непрерывен.*

Под непрерывностью оператора P понимается существование для каждого $\varepsilon > 0$ такого $\delta(\varepsilon)$, что

$$X \in U_{\delta(\varepsilon)}(X^p) \Rightarrow P(X) \in U_\varepsilon(P(X^p)).$$

Пусть множество I_1 состоит из единственного индекса $i(i = 1, \ldots, n)$, а множество I_2 — из всех остальных. Докажем следующее утверждение: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$X_1^2 \in U_{\delta(\varepsilon)}(X_0^2) \Rightarrow |\bar{x}_{i_1} - \bar{x}_{i_0}| \leqslant \varepsilon,$$

где $\bar{x}_{i_1}$ минимизирует функцию $F(x_i, X_1^2)$ по $x_i \in [0, a_i]$, а x_{i_0} — функцию $F(x_i, X_0^2)$ по $x_i \in [0, a_i]$. Тем самым будет доказана и сама лемма.

Предположим, что данное утверждение неверно, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого δ

$$|\bar{x}_{i_1} - \bar{x}_{i_0}| > \varepsilon.$$

Но тогда в силу непрерывности функции $\gamma(X^1)$ (лемма 5) $F(\bar{x}_{i_1}, X_1^2) \xrightarrow[X_1^2 \to X_0^2]{} F(\bar{x}_{i_0}', X_0^2) = F(\bar{x}_{i_0}, X_0^2)$, причем $|\bar{x}_{i_0}' - \bar{x}_{i_0}| \geqslant \varepsilon$, т. е., учитывая выпуклость функции $F(X)$, получим, что существует отрезок, длина которого больше или равна ε, расположенный вдоль оси x_i, на котором функция $F(X)$ принимает постоянное значение. Но это противоречит условию, и лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $F(X)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы и непрерывно дифференцируема, тогда последовательность $F(X^p)$ сходится при $p \to \infty$ к $\min\limits_{0 \leqslant X \leqslant a} F(X)$.*

Предположим, что это неверно. Тогда последовательность $\{F(X^p)\}$, будучи невозрастающей и ограниченной снизу числом $\min\limits_{0 \leqslant X \leqslant a} F(X)$, сходится к числу $A > \min\limits_{0 \leqslant X \leqslant a} F(X)$, следовательно, любая подпоследовательность $\{F(X^p)\}$ также должна сходиться к A. Выделим из бесконечной последовательности $\{X^p\}$, принадлежащей множеству $0 \leqslant X \leqslant a$, сходящуюся подпоследовательность $X^{p_r} \to X^*$, тогда по непрерывности F и P

$$F(X^{p_r}) \to F(X^*),$$

$$F(P(X^{p_r})) \to F(P(X^*)),$$

причем

$$F(X^*) = F(P(X^*)).$$

Но согласно лемме 4 $X^* = \hat{X}$ и

$$F(X^*) = F(P(X^*)) = F(\hat{X}) < A,$$

полученное противоречие доказывает теорему.

Из данной теоремы следует, что предлагаемый итерационный метод решения сходится к решению независимо от исходной точки X^0 и порядка перебора компонент вектора X.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМУМА ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛИ

Таким образом, задача выпуклого программирования свелась к многократному определению минимума некоторой выпуклой функции, скажем, $\Phi(x)$ одного переменного при условии $0 \leqslant x \leqslant a$. Если эта функция задана аналитически, то существует достаточно много известных способов решения этой задачи. Мы остановимся лишь на одном из них, а именно методе Кифера — Джонсона [10]. Согласно этому методу в зависимости от требуемой точности отрезок $[0, a]$ линейно отображается на отрезок $[0, L_n]$, где L_n — n-е число Фибоначчи. Далее вычисляется значение $\Phi(x)$ в точках kL_{n-1} и kL_{n-2}, где k — коэффициент перехода от одного масштаба к другому. Если $\Phi(kL_{n-1}) < \Phi(kL_{n-2})$, то делается вывод, что минимум достигается на отрезке (L_{n-2}, L_n) длиной L_{n-1}. Если же $\Phi(kL_{n-1}) > \Phi(kL_{n-2})$, то делается вывод, что минимум достигается на отрезке $[0, L_{n-1}]$, длина которого также равна L_{n-1}. Таким образом, ценой вычисления функции в двух точках область поиска экстремальной точки (отрезок длиной L_n) сузилась до отрезка длиной L_{n-1}. Далее процесс повторяется аналогичным образом, причем значение функции в одной точке уже известно, поэтому для перехода к отрезку, содержащему экстремальную точку длиной L_{n-2}, достаточно вычислить значение функции лишь еще в одной точке. Мы не рассмотрели еще одной возможности, а именно, когда

$$\Phi(kL_{n-1}) = \Phi(kL_{n-2}).$$

В этом случае экстремальная точка принадлежит отрезку $[L_{n-2}, L_{n-1}]$ длиной L_{n-3}.

Учет этого случая указанным образом приводит к усложнению алгоритма, хотя и сокращает объем вычислений. Следует, однако, заметить, что этот случай можно особо не выделять, отнеся его к одному из предыдущих, безразлично к какому.

Предположим теперь, что функции f и g_k заданы алгоритмически или даже при помощи некоторой статистической модели. В этом случае решение задачи математического программирования в классической постановке [1] существующими методами становится практически невозможным. Действительно, все эти методы, как правило, требуют построения градиента (или его проекции на некоторое многообразие), а также решения системы управлений, что весьма затруднительно, когда неизвестны аналитические выражения для f и g_k. Совершенно неясно, кроме того, как обеспечить выполнимость условий $g_k \leqslant 0$ практически приемлемыми способами. Можно назвать еще целый ряд более или менее существенных причин, однако мы на этом останавливаться не будем.

По-видимому, практически реализуемый способ решения задач программирования с функциями, заданными в виде модели, должен непременно удовлетворять следующему условию: он должен требовать лишь вычисления значений функций f и g_k в некоторых точках, удовлетворяющих разве лишь тривиальным ограничениям типа $x_i \geqslant d_i$. Этому требованию как раз удовлетворяет предлагаемый метод решения; более того, он сводится к определению экстремума функции лишь одного переменного.

Итак, пусть $\Phi(x) = M\xi(x)$, где $\xi(x)$ — случайная величина и M — знак математического ожидания. Обозначим

$$\varkappa = \Phi(x_1) - \Phi(x_2) = M(\xi(x_1) - \xi(x_2)) = M\Delta\xi(x_1, x_2).$$

Как указывалось выше, метод Кифера — Джонсона требует лишь сравнения значений функции $\Phi(x)$ в некоторых двух точках x_1 и x_2, другими словами, различения одной из следующих трех гипотез:

$$H_1 : \varkappa > 0,$$

$$H_2 : \varkappa = 0,$$

$$H_3 : \varkappa < 0$$

или по крайней мере следующих двух:

$$\begin{matrix} H_1' : \varkappa \geqslant 0 \\ \\ H_2' : \varkappa < 0 \end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix} & H_1'' : \varkappa > 0, \\ \text{или} & \\ & H_2'' : \varkappa \leqslant 0 \end{matrix} \right)$$

(см. сделанное выше замечание).

Если относительно $\xi(x)$ принять некоторые допущения, то для различения этих гипотез можно применить аппарат последовательного анализа Вальда*. Например, полагая $\Delta\xi(x_1, x_2)$ распределенной по нормальному закону с известной дисперсией, получаем последовательный критерий в виде **

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta\xi_i \leqslant \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + m \frac{\theta_0 + \theta_1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta\xi_i \geqslant \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + m \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}.$$

Следует, однако, заметить, что, несмотря на оптимальность последовательного критерия, его применение в данном случае не совсем удобно, прежде всего, по двум причинам: 1) он требует, чтобы закон распределения $\Delta\xi$ был известен, и 2) в общем случае, когда вычисляется $\Phi(x_2)$, величина $\Phi(x_1)$ уже определена на предыдущем шаге.

В тех случаях, когда $P\{\xi(x_1) < z\} = P\{\xi(x_2) < z - \Delta\}$ при любой z и фиксированной Δ, на наш взгляд, более целесообразным следует признать использование одного из непараметрических порядковых критериев [13], например Вилкоксона или Ван дер Вардена (X). Остановимся вкратце на втором из них. Пусть $n = g + h$ случайных величин $\xi_1(x_1)$, $\xi_2(x_1), \ldots, \xi_g(x_1)$ и $\xi_1(x_2), \xi_2(x_2), \ldots, \xi_h(x_2)$ расположены в порядке их возрастания и пусть r — порядковый номер $\xi(x_1)$ и s — порядковый номер $\xi(x_2)$. Образуем суммы

$$X = \sum_r \psi\left(\frac{r}{n+1}\right), \quad Y = \sum_s \psi\left(\frac{s}{n+1}\right),$$

где ψ — функция, обратная нормальной с параметрами (0,1).

Пусть X_β — граница, соответствующая уровню значимости β, тогда если:

$X > X_\beta$,	то считают, что верна гипотеза H_1
$Y < X_\beta$ и $X < X_\beta$	» » » » H_2
$Y > X_\beta$	» » » » H_3.

Уровень значимости данного двухстороннего критерия X не превосходит 2β. Для определения X_β построены таблицы.

Наконец, в самом общем случае можно воспользоваться неравенством Чебышева.

Авторы пользуются возможностью выразить благодарность М. Г. Теплицкому и С. С. Вениаминову, прочитавшим рукопись статьи и сделавшим ряд ценных замечаний.

---

* Эта идея была впервые высказана Л. С. Гуриным.

** См. [12], стр. 158, откуда взяты и эти обозначения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., 1961.
2. Применение математики в экономических исследованиях. Под ред. В. С. Немчинова. Т. 1. М., 1959.
3. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программирования и экономике. М., 1964.
4. Н. П. Бусленко. О решении методом Манте-Карло задач, связанных с массовым обслуживанием. Тр. IV Всес. матем. съезда, т. II. Л., 1964.
5. Н. П. Бусленко. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. М., изд-во «Наука», 1964.
6. Н. П. Бусленко. К теории сложных систем. Изв. АН СССР, Техн. киберн., 1963, № 5.
7. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа. Неравенства. М., изд-во иностр. лит., 1948.
8. К. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., изд-во иностр. лит., 1962.
9. H. P. Künzi, W. Krelle. Nichtlineare Programmierung. Berlin, 1962.
10. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., изд-во иностр. лит., 1960.
11. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1960.
12. А. Вальд. Последовательный анализ. М., Физматгиз, 1960.
13. Б. Л. Ван дер Варден. Математическая статистика. М., изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в редакцию
8 X 1964