ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1966 том II, вып. 2

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ*

М. Л. ЗАЙЧИК

(Одесса)

Стремление охватить уже сегодня как можно больше проблем, нуждающихся в применении математических методов, породило ряд попыток формулировать нелинейные задачи в терминах линейного программирования.

Сравнительно просто сводятся к схеме линейного программирования такие задачи, в которых оптимизируемая функция описывается кривой, выпуклой кверху или книзу. В этом случае кривая может иметь только один максимум или минимум. С любой заданной точностью кривая может быть аппроксимирована ломаной, каждое звено которой представляет линейную функцию от вспомогательного аргумента. По причине, о которой подробно говорится ниже, такой прием линеаризации непригоден, если кривая имеет произвольный характер. В практике управления можно найти многочисленные примеры, в которых функция отдачи имеет явно выраженные изломы и перегибы. Приведем некоторые из таких примеров.

Нарастание мощности на любом предприятии связано с последовательным расширением неоднородных «узких мест». Размеры капиталовложений на единицу прироста мощности оказываются при этом весьма различными. Кривые, представляющие изменение удельных капиталовложений в зависимости от объема производства, имеют, как правило, волнообразную форму. Характерные перегибы имеют кривые, представляющие нарастание мощности предприятий в зависимости от размера капиталовложений. Как известно, это обстоятельство приходится всегда учитывать в задачах оптимального размещения капиталовложений на реконструкцию и строительство новых предприятий.

Другой пример — постановка задач оптимальной специализации действующих предприятий. В этих задачах требуется обычно распределить ассортиментное задание между родственными предприятия таким образом, чтобы суммарная себестоимость выпуска продукции всех предприятий оказалась минимальной.

Из-за того, что мощность и другие ресурсы каждого данного предприятия ограничены, увеличение выпуска одного вида изделий требует на том же предприятии сокращения выпуска других и сопровождается переходом на новые условия работы (переходом производства на другие виды оборудования и пр.). Поэтому с изменением размера выпуска данного изделия изменяются как постоянные, так и переменные расходы, приходящиеся на единицу изделия. Полная себестоимость единицы каждого вида продукции по мере роста объема ее выпуска изменяется то в большей, то в меньшей степени, а иногда и в противоположных направлениях.

На предприятиях химической промышленности, в нефтепереработке, нефтехимии и некоторых других отраслях важнейшие технологические процессы характеризуются несколькими взаимосвязанными показателями,

* В порядке обсуждения.

ограниченными рядом условий. Например, в каталитических процессах выходные параметры нелинейно зависят как от технологического режима, так и от состояния катализатора, которое, в свою очередь, также зависит от интенсивности технологического режима. Действие обратных связей обусловливает очень часто изломы в кривых, описывающих соответствующие процессы. С ужесточением режима наблюдается увеличение выхода продукции или улучшение ее качества сначала по вогнутой кривой, а затем — по выпуклой. Примером кривой такого вида может служить зависимость октанового числа бензина риформинга от глубины разложения ([1], стр. 9). По такой же кривой изменяется и выход бензинового компонента с заданным октановым числом.

В описанных примерах отсутствует условие выпуклости функций, поэтому возникающие проблемы выбора оптимальных решений требуют таких подходов, которые не основываются на свойствах выпуклых кривых. Для решения задачи с невыпуклыми функциями практически пользуются лишь методами динамического программирования.

Как известно, динамическое программирование сводится к процессу поэтапного выбора. На каждом этапе решения отбираются частные оптимумы, которые в конечном итоге приводят к искомому глобальному оптимуму. Этим методом можно решать только некоторые нелинейные задачи очень узкого класса. В литературе (если говорить о работах, изложенных в практическом аспекте) описаны лишь неаналитические приемы решения. Так, в известной книге А. Важоньи [2] приводится табличный способ решения задачи на оптимальное распределение усилий по сбыту продукции между тремя районами. Табличный способ использован также Г. Д. Рахманиным для решения задачи размещения мощностей [3]. В статье Б. П. Суворова [4] предложен привлекательный по простоте и наглядности графический способ поэтапного выбора. Этим способом решена задача на оптимальное размещение лимита капиталовложений.

В задачах, которые удается решать табличным или графическим способом поэтапного выбора, могут учитываться лишь два вида ограничений: а) пределы, в которых допустимо изменять величину ресурсов, выделяемых тому или другому объекту; б) вытекающее из самой постановки задачи требование, чтобы сумма распределенных ресурсов не превышала располагаемый лимит. В реальных задачах приходится, как правило, учитывать и другие ограничения. Например, при распределении лимитов капиталовложений, наряду с требованием максимального прироста продукции, всегда выдвигается условие, что повышение рентабельности должно обеспечивать окупаемость капиталовложений в пределах заданного срока.

Дополнительные ограничения в реальных задачах могут быть разнообразного характера. В них отражаются определенные требования технического, технологического и производственного порядка, а также стоимостные и балансовые требования. Часто ставится условие, чтобы оптимизация важнейшего показателя не приводила к снижению сверх определенной границы ряда других показателей. Иногда приходится учитывать выполнение обязательств, вытекающих из договоров, и т. п. Так же как и в задачах линейного программирования, при постановке нелинейных задач должна обеспечиваться возможность введения некоторого числа наложенных ограничений. Графический и табличный способы поэтапного выбора такой возможности не обеспечивают.

Что же касается нелинейных задач, то в случаях, когда оптимизируемая функция имеет более одного максимума или минимума, нельзя избавиться от риска попасть в локальный экстремум вместо глобального. Общего метода преодоления связанных с этим трудностей в данный момент еще нет.

Настоящая работа представляет одну из попыток свести нелинейные задачи с невыпуклыми функциями к схеме линейного программирования.

Предлагаемое ниже построение математической модели пригодно для нелинейных задач, в которых требуется оптимальное распределение ограниченных ресурсов или заданий. В этой модели линеаризация нелинейных ограничений или оптимизируемой функции достигается при помощи особого преобразования задачи. Последнее позволяет рассматривать вместо исходных переменных другие переменные, которые могут принимать только два значения — единицу или нуль.

Построение модели покажем на условном примере, заимствованном из указанной выше статьи Б. П. Суворова.

Таблица 1

Объем капиталовложений	Завод 1 $f_1(K)$	Завод 2 $f_2(K)$	Завод 3 $f_3(K)$
1	2	3	2
2	4	4	4
3	7	5	8
4	8	7	11
5	9	9	14
6	10	13	16
7	13	15	17
8	15	16	18
9	18	17	19
10	20	19	20

Таблица 2

Объем капиталовложений	Завод 1	Завод 2	Завод 3
1	0,3	0,4	0,2
2	0,8	0,8	0,6
3	1,2	1,0	0,8
4	1,6	1,4	1,3
5	1,8	1,5	1,6
6	1,9	2,0	1,7
7	2,3	2,3	2,0
8	2,5	2,8	2,2
9	2,8	3,0	2,6
10	3,1	3,3	3,0

Необходимо распределить лимит капиталовложений, равный 10 единицам, между тремя заводами 1, 2 и 3, для которых определены функции отдачи $f_1(K)$, $f_2(K)$, $f_3(K)$, отражающие зависимость прироста продукции от величины капиталовложений (см. табл. 1).

Требуется найти такое распределение лимита, при котором суммарный прирост продукции по всем трем заводам будет максимальным.

Из табл. 1 видно, что функции отдачи не линейны и не выпуклы.

Применяя метод динамического программирования, Б. П. Суворов нашел, что максимальный прирост продукции равен 26 единицам и достигается при следующем распределении лимита: 1-му заводу — 3 ед.; 2-му заводу — 1 ед.; 3-му заводу — 6 ед.

Предположим теперь, что, кроме всех прежних условий, поставлено дополнительное требование: для обеспечения заданного срока окупаемости капиталовложений суммарное увеличение годовой прибыли по всем трем заводам должно быть не ниже 3,4 ед.

Прирост прибыли в зависимости от объема капиталовложений приведен в табл. 2.

Легко заметить, что прежнее решение не удовлетворяет дополнительному требованию.

Согласно табл. 2, прирост прибыли при прежнем оптимальном распределении лимита будет следующий:

Заводы	Объем капиталовложения	Прирост прибыли
1	3	1,2
2	1	0,4
3	6	1,7
Итого:	10	3,3

Вместо 3,4 ед. годовая прибыль равна только 3,3 ед.

Должно быть найдено новое распределение лимита, при котором максимальный прирост продукции будет уже ниже 26 ед., но зато прибыль будет не ниже заданной.

Метод поэтапного выбора здесь уже неприменим (если не сочетать его с прямым перебором, который в задачах большого размера невозможен).

Чтобы решить задачу предлагаемым точечным методом, преобразуем ее.

По условию лимит капиталовложений, выделяемый заводу 1, может принять одно из десяти дискретных значений: 1, 2, ..., 10. Обозначим через x_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ переменную, которая может быть либо единицей, либо нулем. Если i-е значение лимита завода 1 участвует в оптимальном варианте распределения (в этом случае будем говорить, что i принадлежит оптимальному варианту), то $x_i = 1$, в противном случае $x_i = 0$. Аналогичные переменные y_j и z_k введем соответственно для заводов 2 и 3.

Для каждого из возможных значений аргумента (лимита капиталовложений) известно соответствующее значение функции (прироста продукции и прибыли). Умножив каждую пару значений аргумента и функций на соответствующую переменную x_i, y_j или z_k, мы не нарушим существующую функциональную зависимость.

Используя данные табл. 1, можем записать выражение для целевой функции (общего прироста продукции по всем трем заводам) в следующем виде:

$$C = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 10x_6 + 13x_7 + 15x_8 + 18x_9 + 20x_{10} +$$
$$+ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 7y_4 + 9y_5 + 13y_6 + 15y_7 + 16y_8 + 17y_9 + 19y_{10} +$$
$$+ 2z_1 + 4z_2 + 8z_3 + 11z_4 + 14z_5 + 16z_6 + 17z_7 + 18z_8 + 19z_9 +$$
$$+ 20z_{10} = \max. \qquad (1)$$

Очевидно, что по каждому заводу в оптимальном распределении может участвовать не более чем одно из десяти значений лимита. Из этого следует, что сумма значений всех переменных, введенных для соответствующего завода, не может превышать единицу.

Записываем ограничения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leqslant 1, \qquad (2)$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \leqslant 1, \qquad (3)$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} \leqslant 1. \qquad (4)$$

Условие, по которому сумма лимитов не должна превышать 10 единиц, запишется в следующем виде:

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} +$$
$$+ 1y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 6y_6 + 7y_7 + 8y_8 + 9y_9 + 10y_{10} +$$
$$+ 1z_1 + 2z_2 + 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + 6z_6 + 7z_7 + 8z_8 + 9z_9 + 10z_{10} \leqslant 10. \qquad (5)$$

Требование, по которому прирост годовой прибыли должен быть не менее 3,4 ед., запишется (на основании табл. 2) так:

$$0{,}3x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}6x_4 + 1{,}8x_5 + 1{,}9x_6 + 2{,}3x_7 + 2{,}5x_8 +$$
$$+ 2{,}8x_9 + 3{,}1x_{10} +$$
$$+ 0{,}4y_1 + 0{,}8y_2 + 1y_3 + 1{,}4y_4 + 1{,}5y_5 + 2y_6 + 2{,}3y_7 + 2{,}8y_8 +$$
$$+ 3y_9 + 3{,}3y_{10} +$$
$$+ 0{,}2z_1 + 0{,}6z_2 + 0{,}8z_3 + 1{,}3z_4 + 1{,}6z_5 + 1{,}7z_6 + 2{,}0z_7 + 2{,}2z_8 + 2{,}6z_9 +$$
$$+ 3z_{10} \geqslant 3{,}4. \qquad (6)$$

И наконец, введенное нами условие целочисленности записывается следующим образом:

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ принадлежит оптимальному варианту,} \\ 0 - \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (7)$$

$$y_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j \text{ принадлежит оптимальному варианту,} \\ 0 - \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (8)$$

$$z_k = \begin{cases} 1, \text{ если } k \text{ принадлежит оптимальному варианту,} \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Мы получили задачу целочисленного линейного программирования.

Если из системы удалить неравенство (6), то она будет соответствовать первоначально поставленным условиям задачи (в том виде, как она поставлена Б. П. Суворовым).

Решая систему без неравенства (6), находим, что максимальный прирост продукции равен 26 и достигается при $x_3 = 1$, $y_1 = 1$, $z_6 = 1$. (Все остальные переменные равны нулю.) Это означает, что по заводу 1 должен быть выделен лимит капиталовложений 3 ед., заводу 2—1 ед., заводу 3—6 ед. Этот же результат нашел Б. П. Суворов графически.

Предложенная нами модель позволяет включать в систему дополнительное количество ограничений, в которых может возникнуть необходимость.

В нашем примере — только одно дополнительное ограничение (6), но ничто не препятствует учесть и другие дополнительные требования.

Ограничения (2) — (5) должны рассматриваться как структурная особенность модели. Ограничения такого рода обязательно присутствуют в любой задаче оптимального распределения ресурсов или заданий. Если число пунктов распределения равно n, то число структурных ограничений равно $n + 1$. Все остальные ограничения — технические, технологические, стоимостные и пр.— не структурные. В одних задачах одного и того же класса их может быть больше, в других меньше. В принципе описанная модель не ставит предела числу таких дополнительных ограничений.

Как уже указывалось, ненулевые переменные должны быть равны единице. Наличие первых n структурных ограничений исключает возможность того, что какая-нибудь из переменных окажется больше единицы. Необходимо исключить также возможность дробных значений переменных. Из известных способов обеспечения целочисленных решений наиболее общим в настоящее время является метод Гомори, разработанный в 1958 г. и заключающийся в главных чертах в следующем *.

Сначала задача решается симплекс-методом без учета требования целочисленности. Если оказывается, что оптимальное решение содержит дробные компоненты, то в последней симплекс-таблице выбирается строка, в которой первый элемент имеет наибольшую дробную часть. Далее в симплекс-таблицу выписывается дополнительное линейное ограничение, в котором в качестве коэффициентов принимаются дробные части соответствующих элементов выбранной строки, взятые с обратным знаком. Такому ограничению не может удовлетворять старое нецелочисленное решение, но удовлетворяет найденное по расширенной матрице новое решение, в котором компонент соответствующей строки уже целочисленный. Если в новом решении еще сохранились некоторые дробные компоненты, то процесс повторяется. Доказано, что целочисленное оптимальное решение может быть получено за конечное число шагов. Возможно применение ЭВМ.

---

* Работа Гомори, переведенная на русский язык, приведена в [5]. Алгоритм описан также в [6].

Решая приведенную выше задачу (1)—(9), получим: $x_4 = 1$, $y_1 = 1$, $z_5 = 1$; все остальные переменные равны нулю. Это означает, что 1-й завод получает 4 ед., 2-й завод — 1 ед., 3-й завод — 5 ед. Прирост годовой прибыли равен $1{,}6 + 0{,}4 + 1{,}6 = 3{,}6$ ед. Максимальный прирост продукции: $8 + 3 + 14 = 25$ ед.

Другое равноценное решение: $x_3 = 1$, $y_2 = 1$, $z_5 = 1$, все остальные переменные равны нулю. Это означает, что 1-й завод получает 3 ед., 2-й завод — 2 ед., 3-й завод — 5 ед. Прирост годовой прибыли: $1{,}2 + 0{,}8 + 1{,}6 = 3{,}6$ ед. Прирост продукции: $7 + 4 + 14 = 25$ ед.

В описанной модели мы применили точечное представление функций.

Возможность сведения нелинейных задач к линейным с помощью целочисленного программирования рассматривалась в ряде известных работ. Однако практическая ее реализация встречала трудности, так как метод Гомори не всегда оказывался эффективным при решении задач большой размерности.

Особенностью предлагаемой нами модели является то, что число дробных переменных, которые содержатся в базисе последней симплекс-таблицы (получаемой перед применением целочисленных методов), не зависит ни от общего числа переменных, ни от числа пунктов распределения.

Докажем это.

Пусть некоторый фонд ресурсов подлежит распределению между n пунктами. Тогда (после преобразования неравенств в уравнении) будем иметь n структурных ограничений вида

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1; \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

и одно структурное ограничение по ресурсам.

Пусть число дополнительных ограничений равно k. Тогда наша система содержит $n + k + 1$ уравнений. Следовательно, число ненулевых переменных в последней симплекс-таблице будет равно $n + k + 1$ (в предположении о невырожденности исходной задачи).

Предположим, что среди n уравнений типа (10) имеется l уравнений, содержащих в левой части дробные переменные. Обозначим общее число дробных переменных через s; число уравнений типа (10), не содержащих дробные переменные, будет, очевидно, $n - l$. На их долю приходится $(n + k + 1) - s$ ненулевых переменных. Отсюда $n + k + 1 - s = n - l$ и, следовательно:

$$s = k + l + 1. \tag{11}$$

Если уравнение типа (10) содержит одну дробную переменную, то оно должно содержать по меньшей мере еще одну, из чего следует $s \geqslant 2l$ и $k + 1 \geqslant l$.

Подставляя в (11), получаем

$$s \leqslant 2 + 2k,$$

что доказывает справедливость нашего утверждения.

Число k дополнительных ограничений во многих практических задачах невелико. Таким образом, даже в задачах с большим числом пунктов распределения и при введении большого числа вспомогательных переменных x_{ij} применение предлагаемой модели не вызовет появления большого числа дробных переменных в последней симплекс-таблице. Можно предположить, что при прочих равных условиях последнее обстоятельство несколько сокращает число итераций, которое потребовалось бы на стадии применения метода Гомори (или другого аналогичного метода) в случае большого исходного числа дробных переменных.

Уместно указать, что число вводимых вспомогательных переменных x_j не обязательно должно быть одинаковым для всех объектов распределения.

Шаг между переменными не обязательно должен быть постоянным. Так же как и при кусочно-линейной аппроксимации, линеаризация функций достигнута здесь введением вспомогательных переменных. Полезно указать на то принципиальное различие между кусочно-линейным и точечным методами, которое объясняет, почему в первом случае создается возможность линеаризации только выпуклых функций, а во втором — функций произвольного вида.

Вспомогательные переменные, вводимые для каждого звена кривой при кусочно-линейной аппроксимации, не могут принимать нулевые значения независимо одна от другой. Очевидно, что лишено смысла такое решение задачи, которое включает переменную с ненулевым значением, соответствующую какому-нибудь срединному или конечному звену, в то время как переменная, соответствующая предшествующему звену, оказалась равной нулю. Свойства выпуклых кривых исключает такое недопустимое решение, но этого нельзя сказать о функциях произвольного вида. Именно по этой причине кусочно-линейный метод непригоден в случае невыпуклых кривых.

В точечной модели вспомогательные переменные не зависят одна от другой в только что отмеченном отношении. В этой модели от каждой группы точек, представляющих какой-нибудь объект распределения, в программу может войти не более одной точки. Тем самым нелинейная распределительная задача, независимо от вида функций, сводится к задаче типа «да — нет». Последняя, как известно, хорошо укладывается в схему целочисленного линейного программирования.

В принципе точечный метод может применяться как для случая невыпуклых, так и выпуклых функций. По трудоемкости точечный метод сравним с кусочно-линейным. Хотя первый требует дополнительных операций для обеспечения целочисленности, он имеет перед вторым то преимущество, что не нуждается в описании ограничений, накладываемых на каждую вспомогательную переменную в отдельности. При одинаковом числе переменных t и при числе пунктов распределения n выигрыш в количестве ограничений равен $t - n$. В тех случаях, когда t велико, а n относительно мало, может оказаться выгодным применить точечный метод и к задачам выпуклого программирования, если только число дополнительных ограничений невелико.

Представление функции по отдельным точкам типично в экономических системах. Во многих экономических задачах, в частности в задачах на распределение капиталовложений или мощностей, непрерывные изменения аргумента и функции в заданном интервале невозможны. Если в такую задачу введены все точки, в которых аргумент и функция могут иметь реальные значения, то решение, полученное предложенным методом, будет совершенно точным.

В других задачах, где возможны непрерывные изменения аргумента и функции, достоверные значения последней удается определить лишь для отдельных точек. В этих случаях решение является более или менее приближенным, однако всегда имеется возможность выдержать заданную степень точности. Погрешности, связанные с интерполированием, не могут быть отнесены за счет точечного метода, так как необходимость в интерполяции вызывается неполнотой исходных данных, а не способом решения задачи. Точечный метод в отличие от кусочно-линейного не требует никаких отклонений от уже имеющихся кривых: все вводимые точки принадлежат последним. С увеличением числа вводимых точек точность решения повышается. В этом отношении точечный метод эквивалентен методу динамического программирования. В тех случаях, когда задача может быть решена как точечным методом, так и методом динамического программирования (т. е. при отсутствии неструктурных ограничений), результаты решения будут идентичны, поскольку исходным материалом для обоих методов служат парные значения аргумента и функции, взятые для одних и тех же точек.

Описанная модель охватывает задачу оптимальных размещений в различных модификациях. Например, никаких затруднений не возникает, если отыскивается такое размещение прироста мощности между предприятиями или районами, при котором минимизируется сумма капиталовложений, или себестоимость продукции, или сумма себестоимости продукции и затрат по ее доставке потребителю.

Чтобы показать пригодность точечной модели для решения нелинейных распределительных задач совсем иного рода, рассмотрим пример оптимальной загрузки разнотипных технологических установок в условиях ограниченных ресурсов сырья.

Имеется n установок, для которых на данный плановый период выделено A единиц сырья. Количество сырья, которое может быть переработано при полной загрузке всех установок, превышает A. На каждой из установок можно получать одновременно продукты k наименований. Продукты первых l наименований ($l < k$) входят в обязательный ассортимент. Известны различные соотношения вырабатываемых продуктов (выхода), которые на каждой из установок изменяются в зависимости от величины Q_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) ее возможной загрузки. Заданы отпускные цены $c^{(r)}$ ($r = 1, 2, \ldots, k$) на каждый из продуктов, что позволяет для любой установки определить стоимость выпускаемой продукции как функцию $f(Q)$ от количества переработанного сырья (кривая функции $f(Q)$ может быть произвольного вида).

Требуется распределить сырье между установками так, чтобы максимизировать общую стоимость выпуска продукции, обеспечив одновременно выполнение обязательного ассортимента.

Должно быть выработано
продукта $a^{(1)}$ не менее $b^{(1)}$ ед.
» $a^{(2)}$ » $b^{(2)}$ ед.
. . . .
» $a^{(l)}$ » $b^{(l)}$ ед.

Ниже приводится последовательность решения.

Шаг первый. Заполняется исходная таблица для определения значений d_{ij} функции $f_j(Q)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) по выходам $a_{ij}^{(r)}$ и ценам $c^{(r)}$ соответствующих продуктов.

Q_i	Установка 1				Установка 2				...	Установка n			
	выход продуктов			общая стоимость продуктов $f_1(Q)$	выход продуктов			общая стоимость продуктов $f_2(Q)$		выход продуктов			общая стоимость продуктов $f_n(Q)$
	1	2	k		1	2	k			1	2	k	
Q_1	$a_{11}^{(1)}$	$a_{11}^{(2)}$	$a_{11}^{(k)}$	d_{11}	$a_{12}^{(1)}$	$a_{12}^{(2)}$	$a_{12}^{(k)}$	d_{12}		$a_{1n}^{(1)}$	$a_{1n}^{(2)}$	$a_{1n}^{(k)}$	d_{1n}
Q_2	$a_{21}^{(1)}$	$a_{21}^{(2)}$	$a_{21}^{(k)}$	d_{21}	$a_{22}^{(1)}$	$a_{22}^{(2)}$	$a_{22}^{(k)}$	d_{22}		$a_{2n}^{(1)}$	$a_{n}^{(2)}$	$a_{2n}^{(k)}$	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Q_m	$a_{m1}^{(1)}$	$a_{m1}^{(2)}$	$a_{m1}^{(k)}$	d_{m1}	$a_{m2}^{(1)}$	$a_{m2}^{(2)}$	$a_{m2}^{(k)}$	d_{m2}		$a_{mn}^{(1)}$	$a_{mn}^{(2)}$	$a_{mn}^{(k)}$	d_{mn}

Шаг второй. Вводятся вспомогательные переменные x_{ij}, которые могут принимать только значения 1 и 0.

Q_i	Номер установки			
	1	2	...	n
Q_1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}
Q_2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
Q_m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}

Если какая-нибудь установка не может работать с загрузкой Q_i, то соответствующая переменная x_{ij}, равная нулю, сразу исключается из дальнейшего рассмотрения.

Шаг третий. Записываются ограничения и целевая функция.

Структурные ограничения

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ограничение по сырью

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} Q_i x_{ij} \right) \leqslant A.$$

Ограничения, выражающие требование обязательного ассортимента:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}{}^{(r)} x_{ij} \right) \geqslant b^{(r)}, \qquad r = 1, 2, \ldots, l.$$

Целевая функция

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} d_{ij}\, x_{ij} \right) = \max.$$

Получив целочисленное решение системы, находят по ненулевым значениям x_{ij} тот вариант распределения сырья между установками, который обеспечивает максимальную стоимость выпуска и выполнение обязательного ассортимента.

Точечный метод в применении к задаче описанного типа проверялся на реальном материале Одесского нефтеперерабатывающего завода в периоды, когда имел место недостаток сырья. В задачах участвовало до 60 вспомогательных переменных, а число дополнительных ограничений достигало трех. В описанном выше виде точечная модель пригодна для решения и других актуальных задач нелинейного программирования.

На уровне предприятия, а в отдельных случаях и отраслевого управления модель позволяет, как и в случае задач линейного программирования, учитывать действие различных производственных факторов и другие ограничительные условия.

В очень сложных задачах с нелинейными связями могут возникнуть качественно новые затруднения. Для их преодоления могут потребоваться существенные изменения модели и специализированная ее отработка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Изменение топливных схем нефтеперерабатывающих заводов Башкирской АССР. Сборник. М., ГОСИНТИ, 1961.
2. А. Важоньи. Научное программирование в промышленности и торговле. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Математические методы и проблемы размещения производства. Сборник. М., Экономиздат, 1963.
4. Б. П. Суворов. Применяя динамическое программирование. Плановое хозяйство, 1963, № 8.
5. Численные методы оптимального планирования. Сборник. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
6. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
20 IV 1965