ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1966 том II, вып. 2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ МАТРИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ

В. А. ВОЛКОНСКИЙ

(Москва)

Принципиальные представления о направлении исследований, излагаемых в настоящей работе, разрабатывались в непосредственном контакте с Э. Б. Ершовым. Данная статья и работа [1] могут рассматриваться как дополняющие друг друга.

1. Как известно, производственные связи наиболее точно отражаются с помощью матриц затрат и выпусков. Матричный способ их формализации является неоценимым теоретическим аппаратом, дающим основу для методов организации информации и для теоретического анализа. Однако в практике планирования довольно редко используются сама матричная форма записи и тем более матричные операции в том виде, как это принято в математических учебниках.

Причиной этого является, с одной стороны, слишком большая размерность тех матриц, которые были бы необходимы для конкретных плановых расчетов (например, слишком большая номенклатура продукции), а с другой стороны, возможность и необходимость выделять в исходной информации важнейшие показатели, которые позволяли бы определить искомые величины с достаточной точностью без полного знания всех элементов матриц.

Это противоречие можно рассматривать как довод против использования матриц в плановых расчетах и пытаться применять для описания экономических связей методы, свойственные другим областям математики (например, теорию графов). Однако эти трудности можно расценивать как указание на то, что матричные расчеты и представления используются у нас слишком прямолинейно и не учитывают многих важных приемов, которые дают возможность на практике управлять народнохозяйственным механизмом. Одним из таких приемов является выделение основных, наиболее существенных связей и учет остальных связей более грубо и укрупненно (см. пп. 2—4 настоящей статьи и 1—3 работы [1]). Другой важнейший прием, используемый на практике,— это агрегирование, т. е. использование модели в укрупненных показателях (см. [2] и пп. 5—6 настоящей статьи). Следующим приемом, сильно сокращающим объемы перерабатываемой информации, является упорядочение отраслей с целью рационализации информационных связей (выявление технологической последовательности в обработке материалов).

Методам выявления треугольной и блочно-треугольной формы матриц (технологическая последовательность отраслей) в задачах планирования посвящены работы [3—8]. Наиболее полно этот вопрос решается алгоритмом, разработанным в [1]. Этот алгоритм в сочетании с выделением существенных элементов матриц (пп. 2—4) можно рассматривать как математический аппарат для конструктивного выявления хозяйственной структуры и, в частности, как метод рационального агрегирования.

Сочетание таких приемов может обеспечить быстрое решение систем линейных уравнений и задач линейного программирования большой размерности с приемлемой точностью.

До сих пор проводилось довольно мало исследований в этом направлении, причем они касались в основном систем линейных уравнений, а не задач линейного программирования. Однако эти области настолько тесно связаны, что прогресс в одной из них может быть непосредственно использован в другой. Действительно, нахождение решения системы линейных уравнений представляет собой частный случай задачи линейного программирования. С другой стороны, решение задачи линейного программирования можно представить в виде итеративного процесса, в котором на каждой итерации решается система линейных уравнений (например, симплекс-метод). Поэтому эффективные методы решения систем уравнений могут явиться основой для построения эффективных алгоритмов решения задач оптимального программирования.

В наиболее общем виде такой процесс решения задач линейного программирования можно представить так. Рассмотрим пару двойственных задач.

Задача L

Прямая задача	Двойственная задача
$(c, x) = \max$	$(p, b) = \min$
$Ax \leqslant b$	$pA \geqslant c$
$x \geqslant 0$	$p \geqslant 0$

Пусть на n-й итерации были получены векторы x^n и p^n. Тогда по значениям вектора p^n можно определить, какие из ограничений в системе неравенств $Ax \leqslant b$ вероятнее всего окажутся существенными, и потребовать их выполнения как равенств (например, можно сделать равенствами те неравенства, для которых соответствующие компоненты вектора p^n положительны), и какие компоненты вектора x окажутся равными нулю (например, выбираются те компоненты, для которых величины $x_j{}^n(c_j - \sum_i p_i a_{ij})$ наименьшие). Если выбор производить так, чтобы общее число выбранных равенств равнялось числу компонент вектора x, то решение $\hat{x}^{n+1}$ полученной системы уравнений можно принять за значение вектора x на $(n+1)$-й итерации:

$$x^{n+1} = \hat{x}^{n+1}$$

или использовать его для корректировки предыдущего решения, полагая $x^{n+1} = x^n + \alpha(\hat{x}^{n+1} - x^n)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Аналогично можно построить систему уравнений для получения нового вектора $\hat{p}^{n+1}$.

Какие методы выбора равенств окажутся наиболее эффективными для получения приближенного решения, это зависит от структуры задачи и, скорее всего, должно определяться экспериментом.

Итеративные процессы такого типа могут оказаться эффективными для задач определенной структуры за счет того, что уже после небольшого числа итераций окажется застабилизированной большая часть строк и столбцов системы уравнений. Это приведет к стабильности значений большинства переменных задачи, так что каждое решение системы будет начинаться с хорошего начального приближения.

Представляло бы несомненный интерес доказать сходимость к решению задачи возможно более широкого класса таких процессов. Пока такие доказательства отсутствуют.

Описанный процесс решения задачи оптимального программирования можно рассматривать как моделирование процесса планирования и ценообразования, основанного на затратном принципе. В дальнейших работах автор надеется разобрать это утверждение на модели функционирования механизма экономического управления.

В настоящей статье рассматривается только полностью детерминированная постановка задачи. В то же время большой интерес для экономических приложений представляет изучение влияния случайных вариаций исходных данных на получаемое решение.

Заметим, что не все утверждения статьи представляют собой законченные математические или экспериментальные результаты. Часть из них следует рассматривать скорее как постановку проблем и описание направления теоретических и особенно экспериментальных исследований, по-видимому, перспективных с точки зрения применения математических методов в планировании.

ИТЕРАТИВНЫЙ ПРОЦЕСС, ОСНОВАННЫЙ НА ВЫДЕЛЕНИИ СУЩЕСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦ

2. Практический прием, который сплошь и рядом применяется в экономических расчетах, состоит в том, что выделяются несколько наиболее существенных статей расхода или несколько наиболее важных потребителей товара, а остальная часть расходов или потребности остальных потребителей характеризуется одним показателем «прочие расходы» или «потребление прочих отраслей». Причем этот показатель полагают равным тому значению, которое он фактически принимал в предыдущие периоды времени.

После этого искомые величины определяются путем последовательных расчетов с учетом только существенных связей. Это резко сокращает количество информации, которая должна быть собрана и переработана, не говоря уже о том, что при машинных расчетах это может резко сократить используемый объем оперативной и внешней памяти вычислительных устройств.

Одним из практических приложений этого приема можно считать способ оценки необходимой степени детализации и возможности не учитывать отдаленные производственные связи при расчетах народнохозяйственной трудоемкости продукции, предлагаемый в «Методических рекомендациях по определению народнохозяйственной трудоемкости продукции» *.

В настоящей статье сделана попытка математического обоснования выделения существенных связей и упрощения таким путем структуры задачи.

Автор рад отметить, что мысль о постановке такой математической задачи возникла у него во время обсуждения вышеупомянутых «Методических рекомендаций» с одним из их авторов — И. А. Машинским и поблагодарить его за содержательные беседы.

В математическом, вернее в вычислительном, аспекте та же проблема может быть изложена следующим образом.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

где b — m-мерный вектор и A — квадратная неособенная матрица некоторого специального вида (треугольная или блочно-треугольная, тридиагональная и т. д.), позволяющего легко решать систему (1). Пусть, кроме того, B — матрица, состоящая из малых элементов (точный смысл малости элементов будет указан ниже), и надо решить систему

$$(A + B)x = b. \tag{2}$$

---

* Разработаны в 1964 г. НИИ Труда Госкомитета Совета Министров СССР по вопросам труда и заработной платы совместно с ЦЭМИ АН СССР.

Предлагается следующий итеративный процесс нахождения решения системы (2): n-е приближение x^n получается как решение системы уравнений

$$Ax^n = b - Bx^{n-1}, \tag{2a}$$

т. е. системы с простой матрицей A.

Очевидно,

$$A(x^{n+1} - x^n) = -B(x^n - x^{n-1}), \quad n > 0.$$

Поэтому вектор невязок

$$v^n = b - Ax^n - Bx^n = A(x^{n+1} - x^n) \quad (n > 0)$$

удовлетворяет равенству

$$v^n = -BA^{-1}v^{n-1}$$

или

$$v^n = (-BA^{-1})^n v^0. \tag{3}$$

Пусть выбраны некоторая норма $\| v \|$ векторов v и согласованная с ней норма матриц, т. е. норма $\| C \|$ матриц C, такая, что $\| Cv \| \leqslant \| C \| \cdot \| v \|$ (см. [9], стр. 123).

Тогда получаем

$$\| v^n \| \leqslant \| v^0 \| \cdot \| BA^{-1} \|^n, \tag{4}$$

и если $\| BA^{-1} \| < 1$, то норма невязки v^n при $n \to \infty$ стремится к нулю, причем убывание идет не медленнее, чем со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\| BA^{-1} \|$.

Например, если в качестве нормы вектора v выбрать сферическую норму:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_i v_i^2},$$

где v_i — i-я компонента вектора v, то

$$\| v^n \| \leqslant \rho^{n/2}((BA^{-1})^T(BA^{-1})) \cdot \| v^0 \|, \tag{5}$$

где $\rho(0)$ — спектральный радиус матрицы C, т. е. наибольший из модулей ее собственных значений.

3. Методы, связанные с выделением существенных элементов матриц, могут быть применены не только при решении систем линейных уравнений, но и в задачах линейного и нелинейного программирования с линейными ограничениями.

Рассмотрим задачу оптимального программирования

$$\begin{gathered} U(x) \to \max, \\ (A + B)x = b, \quad x \geqslant 0 \end{gathered} \tag{6}$$

с выпуклой вверх функцией $U(x)$.

Здесь A и B являются, вообще говоря, прямоугольными матрицами, причем A — матрица некоторого специального вида, а B — матрица «с малыми элементами».

Пусть в процессе итераций n-е приближение x^n получается как решение задачи оптимального программирования:

$$\begin{gathered} U(x) \to \max, \\ Ax = b - Bx^{n-1}. \end{gathered} \tag{7}$$

Для каждой такой задачи будем предполагать функцию $U(x)$ ограниченной на непустом множестве допустимых векторов x.

В этом процессе снова вектор невязок

$$v^n = b - Ax^n - Bx^n = A(x^{n+1} - x^n) = -B(x^n - x^{n-1}). \tag{8}$$

Если при некоторой норме $\|\cdot\|$ векторов имеем

$$\lambda = \max_{\|Ax\|>0} \frac{\|Bx\|}{\|Ax\|} < 1 \tag{9}$$

(условие «малости элементов» матрицы B), то норма $\|v^n\|$ вектора невязок убывает со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|v^n\| \leqslant \lambda \cdot \|v^{n-1}\|$$

и

$$\|v^n\| \leqslant \lambda^n \|v^0\|.$$

Докажем, что при выполнении неравенства (9) последовательность $U(x^n)$ сходится к оптимальному значению функционала $U(x)$ задачи (6). Если решение x^* задачи (6) единственно, то последовательность x^n сходится к этому решению.

Пусть (x^*, y^*) — некоторая седловая точка функции Лагранжа

$$\varphi(x, y) = U(x) + (y, b - Ax - Bx)$$

исходной задачи. Аналогично (x^n, y^n) — произвольная седловая точка функции Лагранжа задачи (7). С помощью леммы 1.П работы [10] можно дать следующую оценку разности $U(x^*) - U(x^n)$ оптимальных значений критерия в обеих задачах:

$$(y^*, f(x^n)) \leqslant U(x^*) - U(x^n) \leqslant (y^n, f(x^*)), \tag{10}$$

где $f(x)$ — разность вектор-функций, задающих уравнения ограничений задач (6) и (7). В нашем случае

$$f(x) = (b - Ax - Bx) - (b - Ax - Bx^{n-1}) = -B(x - x^{n-1}).$$

Поэтому

$$\|f(x^n)\| = \|-B(x^n - x^{n-1})\| = \|v^n\| \leqslant \lambda^n \|v^0\|.$$

Легко проверить также, что

$$\|-B(x^* - x^{n-1})\| = \|A(x^n - x^*)\| \leqslant \lambda^n \|A(x^0 - x^*)\|,$$

и, следовательно:

$$\|f(x^*)\| \leqslant \lambda^n \|A(x^0 - x^*)\|.$$

Поэтому имеем

$$|(y^n, f(x^*))| \leqslant \lambda^n \max_{y \in Y,\ \|v\| \leqslant \|v^0\|} |(y, v)| = C'\lambda^n,$$

где (X, Y) — множество седловых точек исходной задачи,

$$|(y^n, f(x^*))| \leqslant \lambda^n \max_{y \in Y^n,\ \|v\| \leqslant \|A(x^0 - x^*)\|} |(y, v)| = C_n(x^*)\lambda^n,$$

где (X^n, Y^n) — множество седловых точек задачи (7).

В теореме 1.П работы [10] доказывается, что если множество Y ограничено, то любая предельная точка последовательности

$$\{(x^n, y^n),\ n = 1, 2, \ldots\} \quad x^n \in X^n, \ \ y \in Y^n$$

принадлежит множеству (X, Y).

Поэтому

$$|(y^n, f(x^*))| \leqslant (C''(x^*) + \alpha_n)\lambda^n,$$

где

$$C''(x^*) = \max_{y \in Y,\ \|v\| \leqslant \|A(x^0 - x^*)\|} |(y, v)|, \quad \alpha_n \to 0 \, (n \to \infty).$$

Обозначим

$$C = \max(C', \min_{x^* \in X} C''(x^*)).$$

Из (10) вытекает

$$|U(x^n) - U(x^*)| \leqslant (C + \alpha_n)\lambda^n,$$

что и доказывает наше утверждение.

4. Выразим с помощью матриц A и B достаточное условие стремления к нулю вектора невязок v_n для случая сферической нормы вектора v. Предположим, что A и B суть матрицы размером $m \times n$ (m строк и n столбцов) и строки матрицы A линейно независимы. Тогда матрица AA^T есть положительно определенная (не вырожденная) квадратная матрица (порядка m).

Пусть Px есть проекция вектора x на пространство $\bar{P}$:

$$\bar{P} = \{x : Ax = 0\}$$

и Qx — проекция на Q, ортогональное дополнение к $\bar{P}$:

$$Qx = x - Px.$$

Предположим также, что

$$BPx = 0. \tag{11}$$

Нетрудно проверить (см., например, [11]), что

$$Qx = A^T(AA^T)^{-1}Ax.$$

Поэтому условие (9) записывается в виде

$$B = BA^T(AA^T)^{-1}A. \tag{12}$$

Лемма. *Если выполняется условие* (12) *и* μ — *наибольшее собственное значение симметрической матрицы* $B^T(AA^T)^{-1}B$ *меньше единицы, то последовательность норм векторов невязок* v^n *мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем* $\sqrt{\mu}$.

Доказательство. Выберем систему координат в пространстве Q и обозначим через $\bar{A}$ и $\bar{B}$ (квадратные) матрицы, соответствующие в этой системе преобразованиям $x \to Ax$ и $x \to Bx$. При этом матрица $\bar{A}$ окажется невырожденной и в силу (8) и (12) получим

$$\bar{v} = \bar{A}(x^{n+1} - x^n) = -\bar{B}(x^n - x^{n-1}),$$

откуда, как и в п. 2, имеем

$$\|v^n\| \leqslant \lambda^n \operatorname{const},$$

где

$$\lambda = \rho(\bar{B}\bar{A}^{-1}) = \rho(\bar{A}^{-1}\bar{B}).$$

Но, как известно (см. [2], стр. 224), всегда

$$\rho^2(C) \leqslant \rho(C^TC).$$

Поэтому

$$\lambda^2 \leqslant \rho(\bar{B}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{B}) = \rho(B^T(AA^T)^{-1}B) = \mu.$$

Лемма доказана.

В частности, если A — не особенная квадратная матрица, то есть максимальный модуль собственных значений матрицы $(A^{-1}B)^T(A^{-1}B)$.

Замечание. Улучшения сходимости предлагаемого итеративного процесса можно добиваться с помощью следующего приема. Решение системы (2а), а также задачи (7) мы выбирали в качестве n-го приближения к решению исходной системы (2) или исходной задачи (6). Теперь обозначим этот вектор через $\hat{x}^n$ и используем его для улучшения решения x^{n-1}, полагая

$$x^n = x^{n-1} + \alpha(\hat{x}^n - x^{n-1}),$$

где α — некоторый скалярный множитель. Легко проверить, что в этом случае справедливы следующие соотношения:

$$v^n = \frac{1}{1-\alpha} A\Delta x^n,$$

$$A\Delta x^n = -B_\alpha \Delta x^{n-1},$$

где

$$B_\alpha = (1-\alpha)B - \alpha A.$$

Теперь все утверждения, основанные на соотношении (3), остаются справедливыми, если заменить B на B_α. Так, в случае нахождения решения системы (2) знаменатель λ прогрессии, мажорирующей последовательность норм невязок $\|v^n\|$, есть спектральный радиус матрицы

$$A^{-1}B_\alpha = (1-\alpha)A^{-1}B - \alpha E.$$

Очевидно, что собственные значения $\lambda_\alpha{}^i$ этой матрицы (i — номер собственного значения) связаны с соответствующими им собственными значениями $\lambda_0{}^i$ матрицы $A^{-1}B_0 = A^{-1}B$ формулой:

$$\lambda_\alpha{}^i = (1-\alpha)\lambda_0{}^i - \alpha.$$

Поэтому за счет удачного выбора α можно надеяться уменьшить спектральный радиус матрицы $A^{-1}B_\alpha$ по сравнению со спектральным радиусом матрицы $A^{-1}B$. Параметр α играет роль параметра, управляющего демпфированием колебаний процесса итераций $\{x^n\}$. Если в процессе итераций наблюдаются сильные колебания, то целесообразно использовать большее значение α. Аналогичное утверждение может быть сформулировано и в случае задач оптимального программирования.

Нахождение наибольшего из модулей собственных значений матрицы BA^{-1} или $B^T(AA^T)^{-1}B$, или его удовлетворительной оценки в случае матриц большой размерности представляет серьезные трудности. Поэтому применение изложенных итеративных алгоритмов вряд ли следует ограничивать теми случаями, когда может быть определено значение λ или дана достаточно точная его оценка. В большом классе случаев, по-видимому, следует проводить вычисления, опираясь на опыт или интуицию, указывающие на то, что матрица несущественных элементов B должна оказывать меньшее влияние на решение, чем оставшаяся матрица A.

МЕТОД ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

5. Как известно, большое значение для плановых расчетов и для построения экономико-математических моделей имеет прием агрегирования показателей. Связи между показателями цен и объемов выпуска, характеризующими определенную отрасль производства или группу взаимозаменяемых продуктов, как правило, являются гораздо более сильными, чем между показателями разных отраслей или разных групп продуктов. Ис-

пользование этого обстоятельства путем объединения групп строк или групп столбцов в матрицах большого размера может оказаться не только полезным для уменьшения размерности задачи, но и необходимым для улучшения обусловленности используемых матриц (объединение строк или столбцов, связанных приближенно-линейной зависимостью). Способ агрегирования для включения в модель взаимозаменяемых ресурсов подсказывается использованием в практике таких показателей, как единицы условного топлива, общевесовые характеристики групп ресурсов, включающих однородные, но не тождественные виды, и т. д.

Применение таких обобщенных показателей наряду с детализированными может позволить за счет несущественного увеличения размерности учесть взаимозаменяемость ресурсов в различных процессах производства и использования. Однако прием агрегирования не ограничивается введением условных показателей для взаимозаменяемых ресурсов, при которых технологические коэффициенты остаются постоянными и модели — линейными. В практике применяются агрегированные показатели, для которых технологические коэффициенты могут более или менее существенно изменяться при изменении детализированных показателей, составляющих агрегат. При этом в процессе составления плана должны проводиться расчеты по двум взаимосвязанным моделям: модели в укрупненных показателях и модели в детализированных показателях. Причем на каждой итерации укрупненные показатели используются для уточнения детализированных, а детализированные — для уточнения коэффициентов затрат-выпуска в укрупненной модели. Такие процессы предлагались в работах Ю. Н. Гаврильца [12] для решения задачи линейного программирования и Л. М. Дудкина и Э. Б. Ершова [2], [13] для решения системы линейных уравнений.

Ниже будет описан метод итеративного агрегирования для решения задач линейного программирования в той математической форме, в которой, как нам представляется, он более полно учитывает специфику задач планирования. Этот метод можно рассматривать как аналог метода, предложенного в [2] для решения систем уравнений. В п. 6 будет дан анализ условий, влияющих на сходимость процесса итеративного агрегирования для систем уравнений.

Пусть имеется задача L линейного программирования (см. п. 1), состоящая из m ограничений и n неизвестных (соответственно двойственная задача содержит n ограничений и m неизвестных). Пусть компоненты векторов x и v разбиты соответственно на K и L групп, так что

$$x^T = (x_1, \ldots, x_{n_1}; \ldots; x_{n-n_K+1}, \ldots, x_n), \quad n = \sum_1^K n_k,$$

$$v = (v_1, \ldots, v_{m_1}; \ldots; v_{m-m_L+1}, \ldots, v_m), \quad m = \sum_1^L m_l.$$

Будем характеризовать каждую группу компонент одним агрегированным показателем. Векторы агрегированных показателей обозначим через

$$X^T = (X_1, \ldots, X_K) \text{ и } V = (V_1, \ldots, V_L).$$

Если рассматривать задачу L как модель народнохозяйственного планирования, в которой в качестве ограничений учтены имеющиеся мощности, необходимость выполнения балансовых соотношений и т. д., то можно обобщенно трактовать переменные x как интенсивности производственных способов или режимов производства, а переменные v — как оценки ресурсов (в частности, наличие различных видов оборудования). Тогда разбиение на группы вектора x соответствует разделению хозяйства на секторы или хозяйственные комплексы, а вектора v — разделению на группы всех видов ресурсов. Естественный способ агрегирования ограничений по ресурсам, связанным условиями взаимозаменяемости,— сложение соответствующих ограничений, умноженных на их оценки (или их приближенные значения, полученные в ходе итераций).

Выбор в качестве весов агрегирования оценок (цены или проектные оценки) естествен потому, что они характеризуют сравнительную жесткость ограничений, возможность и целесообразность их ослабления. При агрегировании производственных способов, видимо, более естественно считать, что фиксируются определенные пропорции между интенсивностями группы способов и при изменении агрегированного показателя интенсивности всей группы умножаются на одно число. Отсюда вытекает способ построения моделей в укрупненных (агрегированных) показателях, соответствующих прямой и двойственной задачам. Пусть

$$\bar{a}_{ik} = \frac{1}{X_k} \sum_{j\in k} a_{ij}x_j,\ \bar{a} = \|\bar{a}_{ik}\|_{m\times K},\ \tilde{a}_{lj} = \frac{1}{V_l} \sum_{i\in l} v_i a_{ij},\ \tilde{a} = \|\tilde{a}_{lj}\|_{L\times n},$$

$$\bar{c}_k = \frac{1}{X_k} \sum_{j\in k} c_j x_j,\ \bar{c} = (\bar{c}, \ldots, \bar{c}_K),\ \tilde{b}_l = \frac{1}{V_l} \sum_{i\in l} v_i b_i,\ \tilde{b} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_L),$$

$$\tilde{\bar{a}}_{lk} = \frac{1}{X_k V_l} \sum_{\substack{j\in k\\ i\in l}} v_i a_{ij} x_j, \quad \tilde{\bar{a}} = \|\tilde{\bar{a}}_{lk}\|_{L\times K}.$$

Здесь запись $j \in k$ ($i \in l$) означает, что берутся только те значения j (или i), которые входят в k-ю (l-ю) группу. Запишем укрупненные модели в виде:

L_1 — модель прямой задачи

$$(\bar{c}, X) = \max$$
$$\tilde{\bar{a}}X \leqslant \tilde{b}$$
$$X \geqslant 0$$

L_2 — модель двойственной задачи

$$(V, \tilde{b}) = \min$$
$$V\tilde{\bar{a}} \geqslant \bar{c}$$
$$V \geqslant 0$$

Метод представления задачи планирования народного хозяйства моделью в укрупненных показателях предложен в [14].

Если агрегирование произведено так, что «детальные» переменные x и v внутри одного агрегата связаны между собой более тесно, чем переменные из разных агрегатов, то становится естественным следующий итеративный процесс решения задачи L. Пусть на t-й итерации получены некоторые значения векторов x^t и v^t. Они используются для построения укрупненных моделей L_1 и L_2. (Матрицы и векторы $\bar{a}$, $\tilde{a}$, $\tilde{\bar{a}}$, $\tilde{b}$, $\bar{c}$ снабдим индексом t.)

Решение этих задач дает новые значения переменных X^{t+1} и V^{t+1}. Эти переменные можно интерпретировать как прогноз на следующий период времени о предполагаемых изменениях в уровнях производства и цен.

При предположении о сохранении структуры производства внутри секторов разности

$$b - \bar{a}^t X^{t+1}$$

будут характеризовать прогноз дефицитности или перепроизводства ресурсов в детальной номенклатуре. Он может быть использован для изменения соотношений оценок ресурсов внутри агрегатов. Например, можно из предполагаемого перепроизводства некоторых ресурсов в агрегате сделать вывод о необходимости на следующей итерации придать ему нулевую оценку:

$$v_i^{t+1} = 0, \qquad \text{если } b_i - \sum_k \bar{a}_{ik}^t X_k^{t+1} < 0.$$

В общем случае, используя идею демпфирования колебаний в духе работ [15—17], следует считать, что вопрос о конкретной формуле регулирования оценок v по разностям $b - \bar{a}X$ требует экспериментального решения.

Изменение по тому или иному алгоритму соотношений оценок в агрегатах в зависимости от разностей $b - \bar{a}X$ дает новый вектор v^{t+1}, который может быть использован для следующей итерации.

Аналогично разности $c - V^{t+1}\bar{a}^t$ могут выполнять роль предполагаемых прибылей, соответствующих различным режимам работы производственных комплексов.

Эти разности должны быть использованы для изменения соотношения между интенсивностями отдельных способов производства (или режимов) внутри каждого производственного комплекса, т. е. для получения нового вектора x^{t+1}. После этого начинается новая итерация.

Выбор наиболее рентабельных режимов на основании «прибылей» $c - V\bar{a}$ и наиболее дефицитных ресурсов на основании соотношений «спроса и предложения» — разности $b - \bar{a}X$ — повлечет за собой (на следующей итерации) изменение коэффициентов «средних» затрат и выпуска (элементы $\bar{\bar{a}}_{lk}$), что соответствует учету «предельных» коэффициентов затрат. В оптимальном плане, очевидно, «средние» коэффициенты становятся действительно средними из «предельных», и предлагаемый процесс демонстрирует формирование весов такого усреднения с помощью их усреднения по времени.

6. Пока не выяснены достаточно общие математические условия, при которых методы, перечисленные в п. 5, сходятся к решению задачи. Относительно процесса, предложенного в [2], доказано, что для систем уравнений типа межотраслевого баланса такой процесс сходится к решению, если агрегирование производится в одну отрасль (см. [18]).

Представляется очевидным, что при определенных условиях разумности агрегирования однократное решение укрупненной модели даже при неправильном соотношении переменных, входящих в агрегат, может дать достаточно хорошее приближение к значениям укрупненных показателей, соответствующих истинному решению полной задачи. Такими условиями являются, например, слабая зависимость укрупненных коэффициентов затрат и выпуска от соотношений показателей, входящих в агрегат, и хорошая обусловленность матрицы для укрупненных показателей.

Представляется также очень вероятным, что эти условия в той или иной математической форме являются достаточными для сходимости процессов итеративного агрегирования и определяют скорость этой сходимости. Поэтому не меньший интерес, чем доказательство сходимости таких процессов для широких классов задач, представляет выяснение «условий правильного агрегирования», т. е. такого разбиения столбцов и строк на группы, при котором обеспечиваются сходимость итеративного процесса и, что еще важнее, достаточная скорость этой сходимости.

Ниже сделана попытка выяснить, в какой форме эти условия являются достаточными для сходимости процесса итеративного агрегирования для решения систем уравнений. Полученные условия, конечно, не близки к необходимым и не должны рассматриваться как конструктивные условия для проверки сходимости процесса. Они представляют интерес только как математическое подтверждение тех качественных условий, которые сформулированы выше.

Опишем метод решения системы уравнений с помощью итеративного агрегирования (см. [2]). Пусть требуется решить систему уравнений

$$(E_m - a)x' = b',$$

где $a = (a_{ij})$ — некоторая квадратная матрица, а E_m — единичная матрица m-го порядка.

Пусть компоненты векторов-столбцов x' и b' разбиты на r групп, т. е.

$$(x')^T = (x_1, \ldots, x_{m_1};\ x_{m_1+1}, \ldots, x_{m_1+m_2};\ \ldots;\ x_{m-m_r+1}, \ldots, x_m),$$

$$(b')^T = (b_1, \ldots, b_{m_1};\ b_{m_1+1}, \ldots, b_{m_1+m_2};\ b_{m-m_r+1}, \ldots, b_m)$$

(здесь и далее $(\ldots)^T$ — символ транспонирования векторов, рассматриваемых как матрицы).

Будем характеризовать каждую группу компонент одним агрегированным показателем. Векторы агрегированных показателей обозначим

$$(X')^T = (X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_r), \quad (B')^T = (B_1, \ldots, B_k, \ldots, B_r).$$

Будем рассматривать случай линейного агрегирования.

Положим

$$X_k = \sum_{j \in k} p_{kj} x_j; \qquad B_k = \sum_{j \in k} p_{kj} b_j,$$

где запись $j \in k$ означает, что берутся только те значения j, которые входят в k-ю группу, и p_{kj} — веса, с которыми показатели x_j входят в показатель X_k. Удобнее эти соотношения записывать в матричной форме. Пусть x есть диагональная матрица, в которой на диагонали стоят компоненты вектора x'. Если I_m есть вектор-столбец, состоящий из m единиц, то $x' = xI_m$. Соответственно определяем диагональные матрицы b и B. В этих обозначениях рассматриваемая система уравнений запишется в виде

$$xI_m - axI_m = bI_m. \tag{13}$$

Пусть P есть матрица:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \ldots & p_{1,m_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{2,m_1+1} & \ldots & p_{2,m_1+m_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{r,m-m_r+1} & \ldots & p_{r,m} \end{pmatrix}$$

и $\widetilde{P}$ — матрица, которая получается из P^T, если заменить единицами веса $p_{k,j}$.

Тогда

$$X = Px\widetilde{P} \tag{14}$$

и

$$B = Pb\widetilde{P}. \tag{15}$$

Заметим, что умножение матрицы a слева на матрицу $\widetilde{P}^T$ соответствует сложению строк матрицы a, а умножение справа на $\widetilde{P}$ соответствует сложению столбцов:

$$(\widetilde{P}^T a)_{ki} = \sum_{j\in k} a_{ji}, \qquad (a\widetilde{P})_{ik} = \sum_{j\in k} a_{ij}.$$

Рассмотрим матрицы $\bar{a} = (\bar{a}_{ik})$ и $\widetilde{\bar{a}} = (\widetilde{\bar{a}}_{kl})$, определяемые соотношениями

$$(\bar{a})_{m\times r} = ax\widetilde{P}X^{-1}, \tag{16}$$

$$(\widetilde{\bar{a}})_{r\times r} = P\bar{a}. \tag{17}$$

Если x есть решение системы (13) то, как легко проверить, выполняются равенства

$$xI_m - \bar{a}XI_r = bI_m \tag{18}$$

и

$$XI_r - \widetilde{\bar{a}}XI_r = BI_r. \tag{19}$$

Если x не есть решение, то, вообще говоря, эти равенства не выполняются. Обозначим через $\hat{X}$ диагональную матрицу, соответствующую решению системы (19), и положим

$$x\hat{I}_m = \bar{a}X\hat{I}_r + bI_m. \tag{18a}$$

Если обозначить $A = (E - \widetilde{\bar{a}})^{-1}$ (матрица «полных затрат»), то

$$\hat{X}I_r = ABI_r. \tag{19a}$$

Пусть x^* — решение исходной системы (13) и $\widetilde{\bar{a}}^*$ — матрица агрегированных коэффициентов, полученная из a по формуле $\widetilde{\bar{a}}^* = Pax^*\widetilde{P}(Px^*\widetilde{P})^{-1}$. Тогда

$$X^*I_r = A^*BI_r,$$

где

$$A^* = (E - \widetilde{\bar{a}}^*)^{-1}.$$

Так как

$$(\hat{X} - X^*)I_r = (A^* - A)BI_r = A^*(\widetilde{\bar{a}}^* - \widetilde{\bar{a}})ABI_r = A_*(\widetilde{\bar{a}}^* - \widetilde{\bar{a}})\hat{X}I_r,$$

$$(\hat{X} - X^*)I_r = A(\widetilde{\bar{a}}^* - \widetilde{\bar{a}})A^*BI_r = A(\widetilde{\bar{a}}^* - \widetilde{\bar{a}})X^*I_r,$$

то близость вектора $\hat{X}$ к решению X^* определяется нормой матрицы A^* и слабой зависимостью матрицы $\widetilde{\bar{a}}$ от весов агрегирования. Эти свойства естественно считать условиями хорошего, или рационального, агрегирования.

Покажем, что эти же свойства важны и для сходимости итеративного процесса типа [19].

Итеративный процесс, описанный в работе [19], состоит в следующем. Пусть $(x^n)'$ — вектор, полученный на n-й итерации. Тогда полагаем:

$$\begin{aligned}
&(x^n)' = (x^n)I_m, && X^n = Px\widetilde{P},\\
&\bar{a}^n = ax^n\widetilde{P}(X^n)^{-1}, && \widetilde{\bar{a}}^n = P\widetilde{\bar{a}}^n\\
&A^n = (E - \widetilde{\bar{a}}^n)^{-1}, && \hat{X}^nI_r = A^nBI_r,\\
&\hat{x}^n = \bar{a}^n\hat{X}^nI_r + bI_m, && (\hat{x}^n)' = (\hat{x}^n)I_m.
\end{aligned} \tag{20}$$

Вектор $(\hat{x}^n)'$ можно принять за значение вектора x' на следующей итерации: $(x^{n+1})' = (\hat{x}^n)'$. Мы рассмотрим следующее обобщение этого процесса.

Вектор $(\hat{x}^n)'$ используем для корректировки вектора $(x^n)'$:

$$(x^{n+1})' = (x^n) + h_n[(\hat{x}^n)' - (x^n)'] \tag{21}$$

(чтобы $(x^n)'$ было решением, вектор $(\hat{x}^n)'$ должен совпасть с $(x^n)'$).

После этого начинается новый цикл итераций. При подходящем выборе параметра t уравнение (21) становится разностным аналогом дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t), \tag{21a}$$

где $\dot{x}$ обозначает производную от x, а $\hat{x}(t)$ получается из $x(t)$ с помощью соотношений (20).

Мерой отклонения вектора $x(t)I_m$ от решения может служить длина вектора $((\hat{x} - x)I_m)$. При каких условиях будет уменьшаться эта величина, показывает следующая выкладка.

Положим

$$\Delta x = \hat{x} - x, \qquad U = \frac{1}{2}|\Delta x I_m|^2.$$

Точка сверху всюду будет обозначать производную по t. Имеем:

$$\dot{\hat{X}} I_r = \dot{A} B I_r = A\dot{\tilde{\bar{a}}} A B I_r = AP(\dot{\bar{a}}\hat{X}) I_r,$$

$$\dot{\bar{a}}\hat{X} = (a\dot{x}\widetilde{P} - \bar{a}\dot{X})(X^{-1}\hat{X}) = (a\Delta x\widetilde{P} - \bar{a}P\Delta x\widetilde{P})(X^{-1}\hat{X}),$$

$$\dot{\hat{x}} I_m = \dot{\bar{a}}\hat{X} I_r + \bar{a}\dot{\hat{X}} I_r = (E + \bar{a}AP)(a - \bar{a}P)\Delta x\widetilde{P}(X^{-1}\hat{X}) I_r.$$

Пусть знак $\langle w\rangle$ обозначает диагональную матрицу, соответствующую вектору w. Тогда

$$\Delta x\widetilde{P}(X^{-1}\hat{X}) I_r = \langle\widetilde{P}(X^{-1}\hat{X}) I_r\rangle \Delta x I_m.$$

Окончательно получаем:

$$\dot{U} = I_m{}^T\Delta x(\dot{\hat{x}} - \dot{x}) I_m = -I_m{}^T\Delta x(E - \delta)\Delta x I_m, \tag{22}$$

где

$$\delta(t) = (E + \bar{a}AP)(a - \bar{a}P)\langle\widetilde{P}(X^{-1}\hat{X}) I_r\rangle.$$

Соотношение (22) показывает, что уменьшение длины вектора $(\Delta x I_m)$ гарантировано при условии малости матрицы $\delta(t)$. Это же условие может быть использовано для получения достаточного условия сходимости решения дифференциального уравнения (21a) к решению системы (13) (сходимость $U \to 0$). Например, если спектральный радиус матрицы $\delta(t)$ меньше некоторой константы $\delta_0 < 1$, то из (22) получаем:

$$\dot{U} \leqslant -2(1 - \delta_0)U, \quad U(t) \leqslant U(0)e^{-2(1-\delta_0)t} \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Это условие малости матрицы $\delta(t)$ также дает некоторое подтверждение описанных выше качественных условий хорошего агрегирования: хорошая обусловленность агрегированной матрицы и слабая зависимость ее элементов от детализированных показателей. Следует подчеркнуть еще раз, что выведенное условие является гораздо более жестким, чем это необходимо для сходимости процесса к решению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Б. Ершов. О выявлении и использовании структурных особенностей матриц в задачах планирования. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 2.
2. Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов. Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов. Плановое хозяйство, 1965, № 5.
3. K. Wenke. Praktische Anwendung Linearer Wirtschaftsmodelle. Unternehmensforschung, 1964, Bd. 8, № 1. (РЖ Экономика промышленности, 1964, № 10, 10Д2. Практическое применение линейных хозяйственных моделей).
4. Э. Б. Ершов. Приведение матриц к блочно-треугольному виду и анализ связности вершин графов. НИЭИ Госплана СССР, 1965 (ротапринт).
5. Э. Ф. Баранов. Особенности разработки системы районных межотраслевых балансов и методы расчета на их основе. Диссерт., МГУ, эконом. ф-т, 1964.
6. Ю. Н. Гаврилец. Приведение матриц к треугольному виду. ЛЭММ АН СССР, 1961 (ротапринт).
7. Ю. Р. Лейбкинд. Применение блочных матриц для приближенных плановых расчетов. В сб. Экономико-матем. методы, вып. 1. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., Изд-во АН СССР, 1963.
8. Ю. Р. Лейбкинд. Некоторые вопросы приближенных плановых расчетов на основе межотраслевого баланса. ЛЭММ АН СССР, 1961 (ротапринт).
9. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., Физматгиз, 1960.
10. В. А. Волконский. Схема оптимального перспективного планирования и оценки ресурсов. В сб. Применение матем. в эконом. исслед., т. 3. М., «Мысль», 1965.
11. J. B. Rosen. The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. P. I. Linear Constraints. Industr and Appl. Mathem., 1960, v. 8.
12. Ю. Н. Гаврилец. Проблема агрегирования и оптимизация экономико-математических моделей. В сб. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Экономико-матем. тетради, вып. V. ЛЭММ АН СССР, 1963 (ротапринт).
13. Э. Б. Ершов. Итеративные методы в моделях межотраслевого баланса. НИЭИ Госплана СССР, 1965 (ротапринт).
14. В. Ф. Пугачев. Аппроксимационная схема многоступенчатого оптимального планирования народного хозяйства. В сб. Экономико-математические методы, вып. II. М., «Наука», 1965.
15. В. А. Волконский. Система текущего отраслевого планирования с помощью оценок ресурсов на основе матричных моделей. В сб. Планирование и экономико-матем. методы. М., «Наука», 1964.
16. В. Г. Медницкий. О методе решения задачи оптимального распределения плановых заданий в отрасли. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
17. В. И. Данилов-Данильян. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. В сб. Модели и алгоритмы оптимального планирования. ЦЭМИ АН СССР, М., 1966.
18. Б. А. Щенников. Блочный метод решения системы линейных уравнений большой размерности. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
19. И. С. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычислений, т. II. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
25 VIII 1965