ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1965
том I, вып. 2

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

(ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИНЦИП ДЕКОМПОЗИЦИИ)

В. А. ВОЛКОНСКИЙ

(*МОСКВА*)

ВВЕДЕНИЕ

1. Наиболее естественное и плодотворное представление о системе планирования и экономического регулирования сводится к непрерывно решаемой задаче оптимального программирования большой сложности, условия которой меняются с течением времени.

Проблема формализации и математизации задач планирования может быть успешно решена только при условии, если будет накоплен достаточно богатый арсенал математических инструментов, при помощи которых можно отразить наиболее существенные черты механизмов реального экономического регулирования.

Методы оптимизации, как и методы решения систем линейных уравнений, состоят из многократного повторения однотипных операций, которые можно назвать циклами, или итерациями. При этом все методы можно разделить на две большие группы.

К первой относятся те методы, при которых приближение к решению происходит в том или ином смысле монотонно, как, например, симплекс-метод линейного программирования. Как правило, такие методы отличаются определенной жесткостью: в них все операции каждого цикла (итерации) полностью определяются структурой самой задачи и они приводят к точному решению за конечное число шагов.

Такие методы будем называть монотонными. В отличие от них ко второй группе можно отнести собственно итеративные методы, в которых нет монотонности приближения к решению. Такие методы обычно не дают точного решения за конечное число шагов. В них каждый «шаг итерации» содержит свободные параметры и может определяться в большой мере свободно в процессе решения. К этой группе следует отнести градиентные методы и их модификации, метод Брауна — Робинсон для решения матричных игр и др.

Естественно, в условиях большой сложности системы не может ставиться вопрос о полном учете всех хозяйственных связей и нахождении точного оптимума. Наоборот, принципиальное значение приобретает задача нахождения приближенного оптимума за достаточно короткий срок. В частности, вопрос о скорости сходимости методов оптимального программирования и о числе итераций, необходимых для нахождения приближенного оптимума, перестает быть только техническим вопросом в условиях, когда проведение каждой итерации связано с обменом информацией между многими плановыми органами.

В силу приведенных особенностей задач планирования итеративные методы имеют определенное преимущество перед методами первой группы, так как их гибкость (например, в выборе шага итерации) может позволить решать при наличии определенного опыта задачи планирования в достаточно короткие сроки. Накопление такого опыта следует рассматривать как необходимый при построении сложных систем процесс их самосовершенствования.

Относительно слабая разработанность итеративных методов по сравнению с монотонными делает задачу их исследования особенно актуальной.

Следует отметить, что в условиях большой размерности оказывается более плодотворным представление об изменении параметров задачи при ее решении не как о детерминированном процессе, а как об управляемом случайном процессе. Такое представление открывает путь к использованию в оптимальном планировании эвристических методов с применением понятий теории автоматического регулирования; эта теория отражает многие качественные особенности реального процесса увязки планово-экономических показателей в результате деятельности большого числа хозяйственных организаций и процессы составления планов планирующими органами.

Нахождение приближенного оптимума в задаче большой размерности можно представить себе следующим образом. Выбирают достаточно общую схему итеративного процесса, характеризуемую небольшим числом свободных параметров типа шага итерации. Затем, руководствуясь эвристическими соображениями и проверяя их экспериментальным путем, подбирают простые правила изменения этих параметров в зависимости от характеристик процесса итераций, например от значения функционала в прямой и двойственной задаче.

В условиях большой сложности систем экономического регулирования и соответствующей большой размерности моделей планирования другой важнейшей особенностью этих систем и моделей является их многоступенчатый характер и очевидное распадение на более или менее автономные подсистемы или подмодели. С точки зрения математической формализации примерами отражения этой особенности являются блочные методы обращения матриц или методы декомпозиции (разложения) в линейном программировании [1, 2]. Представление задачи оптимального планирования в виде игры и описанные ниже итеративные методы дают общую концепцию, позволяющую формализовать эту автономность отдельных подсистем и использовать ее для упрощения расчетов. При этом модель оптимального планирования или управления большой экономической системой представляется в виде системы взаимосвязанных моделей, каждая из которых представляет собой модель оптимального планирования или управления некоторой более или менее автономной части всей системы. Каждое звено управления стремится к достижению оптимума в своих моделях. В начале процесса итераций решения, оптимальные с точки зрения частных моделей, не являются оптимальными с точки зрения всей системы, но в процессе итераций эти частные решения сходятся к оптимальным с точки зрения всей системы.

В Центральном экономико-математическом институте АН СССР ведутся такие исследования в связи с разработкой методики оптимального планирования для промышленных комплексов и плановых органов. Здесь накоплен некоторый опыт использования представлений теории автоматического регулирования при управлении итеративным процессом решения задач оптимального планирования большой размерности. Применение таких методов к нахождению оптимального плана загрузки оборудования в целлюлозно-бумажной промышленности (В. Т. Медницкий, А. К. Пителин, В. Ф. Пугачев) дало хорошие результаты.

Попыткой сочетания языка теории математического программирования и теории автоматического регулирования для описания модели экономической системы является схема текущего планирования, описанная в работе [3], где предлагается процесс итераций, учитывающий перечисленные выше требования и использующий метод демпфирования колебаний параметров в процессе решения как необходимое условие сходимости. Эту схему можно рассматривать и как метод решения задач математического программирования большой размерности, имеющих достаточно выраженную блочную структуру. Частными видами применения демпфирования в процессе нахождения оптимального решения являются метод Брауна — Робинсон в теории игр [4] и метод Б. Поляка ускорения сходимости градиентного метода [5]. Свобода в выборе параметров демпфирования дает возможность так управлять процессом итераций, чтобы скорость сходимости оказывалась приемлемой даже в случае очень большой размерности.

2. Медленная скорость сходимости многих существующих методов линейного программирования в условиях большой размерности, в том числе блочных методов Данцига — Вольфа [1] и Корнаи — Липтака [2], объясняется следующим. В этих методах шаг итерации определяется раз навсегда заданным правилом. В методе Данцига — Вольфа, как во всяком конечном методе, движение происходит по соседним вершинам соответствующих многогранников, что в условиях большой размерности происходит крайне медленно. В методе Корнаи — Липтака используется итеративный метод Брауна — Робинсон [4] для решения игр, в котором величина шага итерации раз навсегда определена фиксированным способом взвешивания вновь полученной оптимальной ответной стратегии и смешанной стратегии, полученной усреднением прошлых стратегий (прошлый опыт).

В то же время очевидно, что вначале, когда процесс идет вдали от оптимума, шаг должен быть большим, так как опасность «проскочить» оптимум мала, и шаг должен уменьшиться по мере приближения к оптимуму (регулирование должно становиться более точным). Поэтому для нахождения приближенного оптимума применение итеративных методов может быть, по-видимому, более эффективным.

Наоборот, при нахождении точного оптимума в условиях, когда известно хорошее приближение, но целевая функция или граница допустимого множества не являются гладкими (например, в случае линейного программирования), эффективность итеративных методов должна быть ниже, чем конечно-шаговых. Эти выводы вполне согласуются с результатами экспериментов. Отсюда вытекает, что хорошие результаты при нахождении точных значений оптимума в задачах большой размерности может дать сочетание итеративного метода для нахождения приближенного решения с последующим его улучшением при помощи конечно-шагового метода.

Найденные итеративным методом приближенное решение и оценки ограничений могут быть использованы для упрощения задачи путем отбрасывания заведомо излишних ограничений и замены неравенств равенствами (например, в задаче линейного программирования можно положить равными нулю многие компоненты вектора-плана, руководствуясь приближенными оценками). После этого приближенное решение следует улучшить каким-либо конечно-шаговым методом, в котором можно использовать в качестве начального более или менее любой план, а не только угловые точки (базисные решения), как в симплекс-методе. Примером такого метода является градиентный метод Розена [11]. В одном из следующих номеров журнала «Экономика и математические методы» будет опубликована статья Е. Г. Гольштейна, где исследуется класс методов блочного программирования, которые можно рассматривать как соединение монотонных и итеративных методов.

В настоящей статье излагаются результаты теоретических исследований в области построения и сходимости общей схемы итеративного процесса. Вторая часть статьи, которая будет закончена в ближайшее время, посвящена результатам теоретической разработки и экспериментальной проверки конкретных моделей и методов расчетов.

В качестве общей схемы итеративного процесса удобным оказывается использовать теоретико-игровую схему. В пункте 3 обсуждается связь модели линейного программирования и схемы игры двух лиц с нулевой суммой и дается их экономическая интерпретация. В пункте 4 обсуждается понятие выпуклых и квазивыпуклых игр. В пункте 5 описывается класс итеративных методов и формулируются теоремы об их сходимости к оптимуму. Пункты 6—9 посвящены доказательству теорем сходимости. В пунктах 10—11 дается обзор некоторых известных итеративных методов с точки зрения изложенной общей концепции. В пунктах 12—13 описывается сведение задачи квазивыпуклого программирования к нахождению точки равновесия в игре нескольких лиц с нулевой суммой. При этом итеративный метод ее нахождения может служить алгоритмом декомпозиции для широкого круга задач оптимизации.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК ИГРЫ

3. При обсуждении итеративных методов решения задач математического программирования весьма удобно пользоваться методами и языком теории игр. Для наглядности часто удобно также использовать непосредственно экономико-математическую интерпретацию.

Поэтому мы вначале приведем известную интерпретацию решения задачи линейного программирования как нахождение минимаксной стратегии в игре с нулевой суммой (см., например, [12]), и дадим интерпретацию полученной игры в экономических терминах.

Запишем пару двойственных (сопряженных) задач линейного программирования в виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \max, \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} p_i b_i = \min,$$

$$b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant 0, \quad (\mathrm{Ia}) \qquad\qquad c_j + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} \leqslant 0, \quad (\mathrm{I}б)$$

$$x_j \geqslant 0; \quad j = 1, \ldots, n. \qquad\qquad p_i \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, m.$$

Легко проверить, что эта задача эквивалентна (см. [12]) игре двух лиц с нулевой суммой, в которой множеством стратегий первого (максимизирующего) игрока является множество векторов $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$; множеством стратегий второго игрока (минимизирующего) — множество векторов $\tilde{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $p_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, а функция выигрыша первого игрока есть функция Лагранжа исходной задачи

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{p}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{ij} p_i a_{ij} x_j. \qquad (\mathrm{II})$$

Для компактности записи можно ввести обозначения:

$$c_j = a_{0j}; \quad j = 1, \ldots, n; \quad b_i = a_{i0}; \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$x = (x_0, \ldots, x_n); \qquad p = (p_0, p_1, \ldots, p_m);$$
$$A = \| a_{ij} \|; \quad i = 0, 1, \ldots, m; \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

(a_{00} — произвольная константа).

Тогда задача линейного программирования запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{n} a_{0j}x_j = \max, \qquad\qquad \sum_{i=0}^{m} p_i a_{i0} = \min,$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0, \quad \text{(IIIa)} \qquad \sum_{i=0}^{m} p_i a_{ij} \leqslant 0, \quad \text{(IIIб)}$$

$$x_0 = 1, \quad x_j \geqslant 0 (j \neq 0). \qquad\qquad p_0 = 1 \quad p_i \geqslant 0 (i \neq 0).$$

При этом стратегиями игроков будут векторы x и p, взятые из множеств $\{x / x_0 = 1, x_j \geqslant 0, j \neq 0\}$ и $\{p / p_0 = 1, p_i \geqslant 0, i \neq 0\}$, а платежная функция

$$\varphi(x, p) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_i a_{ij} x_j = pAx^*. \tag{IV}$$

Задачу линейного программирования (IIIa), (IIIб) и полученную из нее игру с платежной функцией (IV) будем называть задачей Л и игрой Л.

Эта игра имеет следующую наглядную экономическую интерпретацию. Первый игрок — предприятие, выбирающее план производства продукции x из имеющихся в его распоряжении ресурсов $a^0 = (a_{10}, \ldots, a_{m0})$, причем коэффициентами затрат и выпуска ресурсов служат коэффициенты a_i (соответственно отрицательные для затрат и положительные для выпуска). Остатки ресурсов $a_{i0} + \Sigma a_{ij}x_j$ и продукцию он продает второму игроку — оптовой базе, стратегиями которой являются цены p на ресурсы. Всю продукцию x, произведенную предприятием, база обязана покупать по фиксированным ценам $a_0 = (a_{01}, \ldots, a_{0n})$ и обязана также обеспечить предоставление любого количества недостающих предприятию ресурсов по ею самой установленным ценам p.

Первый игрок стремится к максимизации прибыли, а второй — к минимизации стоимости закупок. Легко проверить, что такая интерпретация согласуется с задачей линейного программирования и с ее игровой формализацией. Сразу можно отметить, что при нахождении равновесной пары стратегий множества возможных стратегий могут быть заранее сужены неравенствами $\sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}x_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=0}^{m} p_i a_{ij} \leqslant 0$, так как на стратегии, не удовлетворяющие этим условиям, есть ответы, приводящие к как угодно большому значению платежной функции.

Описанная игра не является матричной игрой в установившемся значении этого термина, так как множества стратегий для матричной игры должны описываться неравенствами

$$x_j \geqslant 0; \quad j = 0, 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=0}^{n} x_j = 1;$$

$$p_i \geqslant 0; \quad i = 0, 1, \ldots, m; \quad \sum_{i=0}^{m} p_i = 1.$$

Чтобы свести задачу линейного программирования к матричной игре, можно взять в качестве чистых стратегий первого игрока вершины многогранника (Iа), в качестве чистых стратегий второго — вершины многогранника (Iб) и в качестве платежной функции (выигрыш первого игрока) — значения функции Лагранжа $\varphi = pAx$ для векторов x и p, соответствующих выбранным вершинам.

Мы приведем еще один способ сведения задачи линейного программирования к матричной игре, но предварительно опишем известный метод симметризации игры (см. [12]), которому отводится важная роль в дальнейшем изложении.

Игра с нулевой суммой называется симметричной, если множества стратегий обоих игроков совпадают, и функция выигрыша $\Phi(x, y)$, где x и y — соответственно стратегии первого и второго игроков, обладает свойством:

$$\Phi(x, y) = -\Phi(y, x)$$

для любых x и y. Симметризованная игра получается, если считать, что каждый из игроков играет две партии: на своем месте и на месте партнера, а выигрыш есть сумма выигрышей в этих двух партиях.

Пусть в исходной игре Г множество стратегий первого игрока есть X, множество стратегий второго $\widetilde{\Gamma}$ и функция выигрыша $\varphi(x, p)$, $x \in X$, $p \in P$. Тогда в симметризованной игре P стратегиями игроков будут пары $\chi = (x, p)$ и $\pi = (x', p')$, $x, x' \in X, p, p' \in P$, а функция выигрыша

$$\Phi(\chi, \pi) = \varphi(x, p') - \varphi(x', p).$$

Легко проверить, что множество оптимальных (минимаксных) стратегий X^* в симметризованной игре есть множество пар минимаксных стратегий (x, p) исходной игры.

Применяя к игре Л метод симметризации, получаем симметричную игру с множеством стратегий в $n + m + 2$-мерном пространстве векторов $(x, p) = (x_0, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_m)$: $x_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $p_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$; $x_0 = p_0 = 1$ и с платежной функцией $\Phi = pAx' - p'Ax$.

Очевидно, эта игра эквивалентна игре с множеством стратегий в $n + m + 1$-мерном пространстве векторов $X = (\lambda, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m)$: $x_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$; $p_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$; $\lambda = 1$ и с платежной функцией $\Phi = X\widetilde{A}Y$, где

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & a_{10} & & a_{m0} & -a_{10} & & -a_{m0} \\ \hline -a_{01} & 0 & & 0 & -a_{11} & & -a_{m1} \\ & & & & & & \\ -a_{0n} & 0 & & 0 & -a_{1n} & & -a_{mn} \\ \hline a_{10} & a_{11} & & a_{1n} & 0 & & 0 \\ a_{m0} & a_{m1} & & a_{mn} & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

Легко проверить, что минимаксная стратегия в этой игре отличается только скалярным множителем от минимаксной стратегии в матричной игре с такой же матрицей $\widetilde{A}$.

ВЫПУКЛЫЕ И КВАЗИВЫПУКЛЫЕ ИГРЫ

4. Важнейшим обобщением матричной игры является выпуклая игра. Будем называть игру Г выпуклой в том случае, если множества стратегий X и P обоих игроков выпуклы, замкнуты и ограничены, а функция выигрыша $\varphi(x, p)$ является непрерывной, выпуклой вверх, как функция стратегии x первого игрока (при любой фиксированной стратегии p второго игрока) и выпуклой вниз, как функция стратегий p второго игрока (при

любой фиксированной стратегии x). Будем обозначать игру Г через (X, P, φ). У всякой выпуклой игры существует пара минимаксных стратегий (см. [14], п. 1.5). Если для функции выигрыша выполняются соответствующие требования строгой выпуклости, то и игра называется строго выпуклой.

Обозначим $C(x) = \min\limits_{p'} \varphi(x, p')$, $B(p) = \max\limits_{x'} \varphi(x', p)$.

Определим множества $X(p)$ и $P(x)$ из условий

$$\varphi(x, \hat{p}_x) = C(x) \text{ для } \hat{p}_x \in P(x), \quad \varphi(\hat{x}_p, p) = B(p) \text{ для } \hat{x}_p \in X(p).$$

Легко проверить, что функции $C(x)$ и $B(p)$ непрерывны и выпуклы (соответственно вверх и вниз). Их непрерывность непосредственно следует из непрерывности $\varphi(x, p)$. Для доказательства выпуклости $C(x)$ возьмем x_0 и $x_1 \in X$, обозначим для некоторого $\alpha \in (0,1)$ $x_\alpha = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_0$ и выберем $p_\alpha \in P(x_\alpha)$. Имеем

$$C(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha, p_\alpha) \geqslant \alpha\varphi(x_1, p_\alpha) + (1-\alpha)\varphi(x_0, p_\alpha) \geqslant \alpha\varphi(x_1, p_1) + \\ + (1-\alpha)\varphi(x_0, p_0) = \alpha C(x_1) + (1-\alpha)C(x_2).$$

Аналогично доказывается выпуклость функции $B(p)$.

Переход от матричной игры к выпуклой аналогичен переходу от задачи линейного программирования к задаче выпуклого программирования.

Дадим общую формулировку задачи выпуклого программирования в следующих обозначениях.

Задача U:

$$U(x) \underset{x \in X}{=} \max,$$

где $U(x)$ — непрерывная выпуклая вверх функция, а X — выпуклое, ограниченное, замкнутое множество.

Задача нахождения минимаксных стратегий в выпуклой игре может быть различными способами сведена к задаче выпуклого программирования, и задача выпуклого программирования может быть различными способами сведена к решению выпуклой игры. Нам понадобятся следующие из этих способов.

Пусть задана выпуклая игра $\Gamma = (X, P, \varphi)$.

Задача решения игры Г эквивалентна задаче U, если $U(x) = C(x)$ и множество допустимых планов X в задаче U совпадает с множеством X стратегий первого игрока. (Аналогично можно взять в качестве множества допустимых планов задачи U множество P стратегий второго игрока и положить $U(p) = -B(p)$).

Близость функций $C(x)$ или $B(p)$ к экстремуму является характеристикой близости соответствующей стратегии к минимаксной. Однако в условиях, когда экстремальное значение неизвестно, удобнее использовать как меру отклонения от оптимума значение соответствующей функции для игры в симметризованной форме $\tilde{\Gamma}$. Для симметричной игры функция $U(x) = C(x) = -B(x) \leqslant 0$ (множества стратегий игроков совпадают: $X = P$). Минимаксные стратегии x^* характеризуются тем, что

$$U(x^*) = 0.$$

Обобщением понятия выпуклости функции является понятие квазивыпуклой функции.

Функция $f(x)$ называется квазивыпуклой вверх, если из равенства

$$x_\alpha = x_0(1-\alpha) + x_1\alpha \, (0 < \alpha < 1)$$

следует

$$f(x_\alpha) \geqslant \min\,[f(x_0), f(x_1)].$$

Это определение эквивалентно следующему. Функция $f(x)$ квазивыпукла вверх, если для любого α множество $\{x : f(x) \geqslant \alpha\}$ выпукло. Если для всех $\alpha \in (0,1)$ выполняется строгое неравенство

$$f(x_\alpha) > \min [f(x_0), f(x_1)],$$

то функция называется строго квазивыпуклой вверх.

Б. Мартошем [15] рассматривается класс функций более узкий, чем класс квазивыпуклых, и более широкий, чем класс строго квазивыпуклых функций. Будем называть его классом сильно квазивыпуклых функций (по Б. Мартошу «explicit quasiconcave functions»).

Функция $f(x)$ сильно квазивыпуклая вверх, если из равенства

$$x_\alpha = x_0(1-\alpha) + x_1\alpha \ (0 < \alpha < 1)$$

следует

$$f(x_\alpha) \geqslant \min [f(x_0), f(x_1)],$$

причем

$$f(x_\alpha) > \min [f(x_0), f(x_1)],$$

если

$$f(x_0) \neq f(x_1).$$

Этот класс включает все выпуклые функции, в то время как класс строго квазивыпуклых функций включает только строго выпуклые функции. Эквивалентное условие: для любого α множество $\bar{A}_\alpha = \{x : f(x) \geqslant \alpha\}$ выпукло, и множество $A_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\}$, если оно не пусто, содержит все внутренние точки множества $\bar{A}_\alpha$.

Это условие переходит в условие строгой квазивыпуклости, если потребовать строгой выпуклости множества $\bar{A}_\alpha$.

Требования квазивыпуклости, сильной или строгой квазивыпуклости вниз считаются выполненными для функции $f(x)$ в случае, если функция $-f(x)$ соответственно (сильно, строго) квазивыпукла вверх.

В соответствии с этими определениями естественно рассматривать квазивыпуклые, сильно квазивыпуклые и строго квазивыпуклые игры. Определение таких игр получится, если в определении выпуклых игр заменить требования выпуклости платежной функции соответствующим требованием квазивыпуклости или строгой квазивыпуклости.

Легко проверить, что для квазивыпуклых игр (соответственно, сильно, строго квазивыпуклых) функции $C(x)$ и $B(p)$ обладают свойством квазивыпуклости (сильной, строгой квазивыпуклости), а множества $X(p)$ и $P(x)$ выпуклы для любых p и x.

Пусть, например, $x_0, x_1 \in X$, $\alpha \in (0,1)$, $x_\alpha = ax_1 + (1-\alpha)x_0$, $p_\alpha \in P(x_\alpha)$.

Тогда для квазивыпуклой игры

$$C(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha, p_\alpha) \geqslant \min [\varphi(x_0, p_\alpha), \varphi(x_1, p_\alpha)] \geqslant$$

$$\geqslant \min [\varphi(x_0, p_0), \varphi(x_1, p_1)] = \min [C(x_0), C(x_1)],$$

причем первое неравенство является строгим неравенством ($>$), если игра строго квазивыпукла.

Заметим еще, что для строго квазивыпуклых игр, так же как для строго выпуклых, множества $P(x)$ и $X(p)$ содержат только по одной точке (оптимальные ответы $\hat{p}_x$ и $\hat{x}_p$ единственны).

ИТЕРАТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ СХОДИМОСТИ

5. Рассмотрим следующие два класса итеративных процессов, которые служат обобщением нескольких известных методов решения игр и задач оптимального программирования.

Пусть x^n, p^n — стратегии игроков на n-й итерации, $\hat{x}^n \in X(p^n)$ и $\hat{p}^n \in P(x^n)$.

Итеративные процессы определим соотношениями:

$$\text{A)}\ x^{n+1} = \alpha_n \hat{x}^n + (1-\alpha_n)\, x^n, \quad p^{n+1} = \alpha_n \hat{p}^n + (1-\alpha_n)\, p_n,$$

$$\text{B)}\ x^{n+1} = \alpha_n \hat{x}^n + (1-\alpha_n)\, x^n, \quad p^{n+1} = \hat{p}^n, \tag{1}$$

где α_n — последовательность чисел из отрезка $[0,\ 1]$.

Метод А является непосредственным обобщением известного итеративного процесса решения матричных игр Брауна — Робинсон (см. [4]). Легко проверить, что процесс Брауна — Робинсон является частным случаем процесса А при $\alpha_n = 1/n$. Результат Робинсон не вытекает из теоремы 1 (см. ниже), так как в них требуется единственность оптимальных ответов. Однако, как показывает теорема 1, по-видимому, для сходимости процесса не существенно, что последовательность $\{\alpha_n\}$ убывает как гармонический ряд. Существенными свойствами коэффициентов α_n, с точки зрения сходимости, являются следующие:

$$\text{а)}\ \alpha_n \to 0, \qquad \text{б)}\ \sum^{\infty} \alpha_n = \infty. \tag{2}$$

В следующих теоремах этот факт доказывается для сильно квазивыпуклых игр при условии единственности оптимальных ответов $\hat{x}_p$ и $\hat{p}_x$. В теореме 2 требуется единственность только ответа $\hat{p}_x$. Ответ $\hat{x}_p$ может быть не единственным.

В дальнейшем будет всегда предполагаться, что последовательность $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условиям (2). Когда нужно будет рассмотреть другие случаи, это будет оговариваться специально.

Теорема 1. *Если для сильно квазивыпуклой игры функции $\hat{x}_p$ и $\hat{p}_x$ однозначны (множества $X(p)$ и $P(x)$ содержат только по одной точке), то в процессе* А *при любой начальной паре стратегий* (x^0, p^0)

$$x^n \to x^*, \quad p^n \to p^* \quad (n \to \infty),$$

где (x^*, p^*) *— пара минимаксных стратегий.*

Теорема 2. *Если для сильно квазивыпуклой игры функция p_x однозначна, то в процессе* Б *при любой начальной паре стратегий* (x^0, p^0)

$$p^n \to p^*,\ x^n \to X^* \ (n \to \infty),$$

где X^* — множество минимаксных стратегий первого игрока, а p^* — минимаксная стратегия второго игрока.

Так как для строго квазивыпуклой игры обе функции $\hat{x}_p$ и $\hat{p}_x$ однозначны, то непосредственным следствием этих двух теорем является следующая.

Теорема 3. *Для строго квазивыпуклых игр в обоих процессах* А *и* Б

$$x^n \to x^*, \quad p^n \to p^* \quad (n \to \infty),$$

где (x^*, p^*) *— пара минимаксных стратегий.*

Вопрос о сходимости к минимаксу процесса А без предположения однозначности функций $\hat{x}_p$ и $\hat{p}_x$ остается открытым даже для матричных игр. Такая сходимость доказана Дж. Робинсон для матричных игр только в случае весов $\alpha_n \equiv 1/n$.

Однако уже сформулированные теоремы о сходимости могут быть использованы в практических расчетах для любых квазивыпуклых игр, так как любая квазивыпуклая игра может быть сделана строго квазивыпуклой с помощью произвольно малого изменения ее платежной функции. Например, вместо $\varphi(x, p)$ можно взять функцию выигрыша

$$\varphi_\varepsilon(x, p) = \varphi(x, p) - \varepsilon\|x\|^2 + \varepsilon\|p\|^2,$$

где $\|x\|^2 = \sum_j x_j^2$, $\|p\|^2 = \sum_i p_i^2$, а ε — произвольное положительное число.

Дж. Данскином [16] доказана сходимость для любых выпуклых игр алгоритма, совпадающего с процессом Брауна — Робинсон в случае матричных игр. Однако алгоритм Данскина в общем случае отличается от процесса А и требует запоминания оптимальных ответов на всех предыдущих итерациях.

Что требование однозначности функции $\hat{p}_x$ в теореме 2 является существенным, доказывается следующим примером.

Пример. Рассмотрим матричную игру. Стратегиями x_1, x_2, x_3 максимизирующего игрока являются три точки плоскости (y, z): $x_1 = (-1, 0)$, $x_2 = (1, 0)$, $x_3 = (0, 1)$.

Стратегиями минимизирующего игрока служат два числа: $p_1 = -1$, $p_2 = 1$. Выигрыш первого игрока есть

$$\varphi(x_i, p_j) = Mp_j y_i + \varepsilon z_i,$$

где $M \gg 1 \gg \varepsilon > 0$ и $(y_i, z_i) = x_i$. Множество смешанных стратегий первого игрока есть треугольник с вершинами x_1, x_2, x_3. Легко проверить, что оптимальным ответом второго игрока на стратегии $x = (y, z)$ при $y > 0$ является p_1 и $\hat{x}_x = x_1$ и при $y < 0$ будет $\hat{x}_x = x_2$. Поэтому существует последовательность $\{x^n\}$, удовлетворяющая равенству (1) и сходящаяся к точке $(0, 0)$, в то время как минимаксной стратегией является точка $x_3 = (0, 1)$.

Сведем задачу решения игры к задаче выпуклого программирования. Для доказательства сходимости процесса А возьмем симметризованную игру $\tilde{\Gamma}$, в которой множеством стратегий каждого игрока служит множество $\mathfrak{X}$ всех пар $\chi = (x, p)$ стратегий игроков исходной игры, а платежной функцией служит

$$\Phi(\chi, \chi') = \varphi(x, p') - \varphi(x', p).$$

Очевидно, симметризация игры не нарушает свойства выпуклости или квазивыпуклости.

Процесс А в обозначениях игры $\tilde{\Gamma}$ можно рассматривать как движение по множеству пар стратегий, одинаковых для обоих игроков: $\chi = \chi'$. Поэтому итеративный процесс можно рассматривать не на пространстве $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, а на пространстве $\mathfrak{X}$:

$$\chi^{n+1} = \alpha_n \hat{\chi}^n + (1 - \alpha_n)\chi^n,$$

где $\hat{\chi}^n$ — оптимальный ответ на стратегию χ^n. Заметим, что множество пар минимаксных стратегий есть часть множества $\{\chi = \chi'\}$. После этих объяснений можно вернуться к прежним обозначениям и, не нарушая общности, считать, что исходная игра Γ симметрична — $\Gamma = (X, X, \varphi)$ и итеративный процесс определяется уравнением

$$x^{n+1} = \alpha_n \hat{x}^n + (1 - \alpha_n) x^n \qquad \text{(a1)}$$

в пространстве X. Соответствующая задача U есть задача максимизации функции

$$U(x) = \varphi(x, \hat{x}),\ x \in X,$$

где $\hat{x}$ — оптимальный ответ на стратегию x. Очевидно, $U(x) < 0$, если x не есть точка максимума, и $\max\limits_{x \in X} U(x) = 0$.

Теперь утверждение теоремы 1 можно записать так:

$$U(x^n) \to 0\ \ (n \to \infty). \tag{3}$$

Процесс Б в силу однозначности функции $\hat{p}_x$ также можно рассматривать как процесс (1а) в пространстве X, а утверждение теоремы 2 как соотношение (3) для функции

$$U(x) = \varphi(x, \hat{p}_x) - \max_y \varphi(y, \hat{p}_y) = \varphi(x, \hat{p}_x) - \varphi(x^*, p^*),$$

где (x^*, p^*) — минимаксная пара стратегий.

Для выпуклых игр можно доказать следующую теорему, проливающую некоторый свет на факторы, определяющие скорость сходимости итеративного процесса (1а) в случае, когда веса α_n достаточно малы. Рассмотрим произвольную выпуклую игру и последовательность итеративных процессов (1а), начинающихся со стратегии x^0. Обозначим последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{x^n\}$ для k-го процесса индексом k соответственно сверху и снизу: $\{\alpha_n{}^k,\ n = 1, 2, \ldots\}$ и $\{x_k{}^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ $(x_k{}^0 \equiv x^0)$. Пусть $\alpha^k = \sup\limits_n \alpha_n{}^k$.

Предполагаем, что если процесс (1а) получен из процесса А, то выполняются условия теоремы 1, если он получен из процесса Б, то выполнены условия теоремы 2. Функцию $U(x)$ выбираем в обоих случаях так, как описано выше. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $\alpha^k \to 0$ $(k \to \infty)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{N_k} \alpha_n{}^k \geqslant t,$$

то

$$\lim_{k \to \infty} U(x_k{}^{N_k}) \geqslant U(x_0)\, e^{-t}. \tag{4}$$

Аналогичное неравенство выводится Белманом ([10], стр. 323) для непрерывного процесса.

Запишем для наглядности соответствующее приближенное неравенство в виде

$$U(x^n) \geqslant U(x^0) \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right\}.$$

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ

6. Построим ломаную, соединяющую прямолинейными отрезками последовательные стратегии, получаемые в ходе итераций, и установим функциональную связь между точками ломаной и значениями параметра t. Точнее говоря, положим

$$t_n = \sum_{k=1} \alpha_k, \quad x^n = \tilde{x}(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\tilde{x}(t) = x^n + (\alpha / \alpha_{n+1})(x^{n+1} - x^n),\ \text{если}\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_{n+1},\quad t = t_n + \alpha.$$

В силу условия (2) ломаная $\tilde{x}(t)$ определена на всей полуоси $t > 0$. Теперь, если обозначить

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n,\ \Delta\tilde{x}(t_n) = \tilde{x}(t_{n+1}) - \tilde{x}(t_n),$$

то уравнение (1а) сводится к виду

$$\Delta\tilde{x}(t_n) \,/\, \Delta t_n = \hat{x}^n - \tilde{x}(t_n). \tag{1б}$$

Если оптимальный ответ $\hat{x}$ есть однозначная функция от стратегии x:

$$\hat{x} = \hat{x}(x),$$

то равенство (1б) записывается в виде

$$\frac{\Delta\tilde{x}(t_n)}{\Delta t_n} = \hat{x}(\tilde{x}(t_n)) - \tilde{x}(t_n),$$

что есть, очевидно, разностный аналог дифференциального уравнения

$$dx \,/\, dt = f(x), \tag{1в}$$

где $f(x) = \hat{x}(x) - x$.

Ломаная $x = \tilde{x}(t)$ есть ломаная Эйлера для этого дифференциального уравнения. Переход к аналогичным дифференциальным уравнениям от процесса Брауна — Робинсон рассматривается Белманом (см. [10], гл. 15). Заметим еще, что, как следует из леммы 1 (см. ниже), если функция $\hat{x}(x)$ однозначна, то она и непрерывна, а следовательно, для уравнения (1в) справедливы теоремы о существовании и единственности решения.

Пусть рассматривается последовательность итеративных процессов (1). Обозначим последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{x^n\}$ для k-го процесса индексом k, как при формулировке теоремы 4, и предположим, что

$$\alpha^k = \sup_n \alpha_n{}^k \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Пусть $\tilde{x}_k(\tau)$ — ломаная, соответствующая k-му итеративному процессу. Если $\max\limits_{x \in X} \|x\| = D$, то легко доказать, что ломаные $\tilde{x}_k(\tau)$ удовлетворяют условию Лифшица

$$\|x_k(\tau') - \tilde{x}_k(\tau'')\| \leqslant 2D|\tau' - \tau''|.$$

Кроме того, они равномерно ограничены. Поэтому из них можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на любом конечном интервале изменения τ. Обозначим ее предел через $y(\tau)$. (В случае однозначности функции $\hat{x} = \hat{x}(x)$, очевидно, $y(\tau)$ есть единственное решение уравнения $dy \,/\, dt = f(y)$, проходящее через точку $y(0)$).

Рассмотрим функцию

$$u(\tau) = U(y(\tau)).$$

Доказательство теорем 1—3 основывается на следующем фундаментальном факте.

Основная лемма. *Если выполняются условия какой-нибудь из теорем, то функция $u(\tau)$ строго возрастает для всех значений τ, для которых $u(\tau) < 0$.*

Это утверждение будет доказано в пункте 8.

Теперь докажем соотношение (3) в предположении, что это утверждение верно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2

7. Доказать равенство (3) — значит доказать, что все предельные точки последовательности $\{x^n, n = 1, 2, \ldots\}$ принадлежат множеству минимаксных стратегий.

Возьмем сходящуюся подпоследовательность $\{x^{n_k}\}$:

$$n_k \to \infty, \quad x^{n_k} \to x_0 \quad (k \to \infty).$$

Рассмотрим ломаные $y_k(\tau)$ $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$y_k(\tau) = \tilde{x}(t_{n_k} + \tau) \quad (\tau \geqslant 0).$$

Из сказанного в п. 6 вытекает, что существует подпоследовательность ломаных $y_k(\tau)$, сходящаяся к некоторой кривой $y(\tau)$. Без ограничения общности можно предполагать, что сама последовательность $\{y_k(\tau), k = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $y(\tau)$.

Выберем предельную точку x_0 и подпоследовательность $\{x^{n_k}\}$ такую, что $n_k \to \infty$, $x^{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$, $U(x_0) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, U(x^n)$ и предположим, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ U(x^n) = -\varepsilon < 0.$$

Из основной леммы следует, что

$$u(\tau) > -\varepsilon \quad \text{при } \tau > 0.$$

Из определения функции $y(\tau)$ следует, что для любого $\tau > 0$ существует подпоследовательность последовательности $\{x^n, n = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся к $y(\tau)$, и, следовательно, подпоследовательность последовательности $\{U(x^n), n = 1, 2, \ldots\}$, сходящаяся к $u(\tau)$. Это противоречит предположению, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ U(x^n) = -\varepsilon.$$

Таким образом,

$$U(x_0) = u(0) = 0.$$

Предположим теперь, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ U(x^n) = -\varepsilon < 0,$$

и выберем подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$ так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} U(x^{m_k}) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ U(x^n).$$

Так как $\overline{\lim\limits_{n}}\, U(x^n) = 0$, то можно выбрать такие $r_k < m_k$, чтобы $r_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, $U(x^{r_k}) \geqslant -\varepsilon/2$, $U(x^l) < -\varepsilon/2$ для $r_k < l \leqslant m_k$.

Из последовательности $\{r_k\}$ выберем подпоследовательность $s_j \to \infty$ $(j \to \infty)$ такую, чтобы $\{x^{s_j}\}$ сходилась. Предельную точку обозначим x_2 и построим функцию $y(\tau)$ с началом в точке x_2: $y(0) = x_2$. Из определения чисел r_k вытекает, что $u(0) = U(y(0)) = -\varepsilon/2$.

Так как $u(\tau)$ непрерывна, то существует $\Delta > 0$ такое, что для $\tau \in (0, \Delta)$

$$u(\tau) = U(y(\tau)) > -\varepsilon.$$

По определению чисел r_k для $\tau \in (0, \Delta)$ $u(\tau) \leqslant -\varepsilon/2$, т. е. $u(\tau) \leqslant u(0)$, что противоречит основной лемме. Таким образом, для доказательства теорем остается доказать только основную лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ

8. Рассмотрим точечно-множественное отображение $x \to \Phi(x)$, где $x \in X$ и $\Phi(x)$ — некоторое подмножество множества X. Отображение $x \to \Phi(x)$ называется полунепрерывным сверху, если из соотношений

$$x_k \to x_0, \quad y_k \to y_0, \quad y_k \in \Phi(x_k)$$

следует

$$y_0 \in \Phi(x_0).$$

Пусть $P(x)$ — множество оптимальных ответов второго игрока на стратегию x первого игрока.

Лемма 1. *Отображение $x \to P(x)$ полунепрерывно сверху для любой непрерывной игры.*

Доказательство. Пусть $x_k \to x_0$, $y_k \to y_0$ и $y_k \in P(x_k)$. Тогда в силу непрерывности функций $\varphi(x, y)$ и $U(x) = \min\limits_{y \in X} \varphi(x, y)$ имеем

$$U(x_0) = \lim_{k \to \infty} U(x_k) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x_k, y_k) = \varphi(x_0, y_0),$$

т. е. y_0 есть оптимальный ответ на x_0: $y_0 \in P(x_0)$. Лемма доказана.

В частности, из леммы 1 следует, что если функция $\hat{p}_x$ однозначна, то она и непрерывна. То же можно сказать, конечно, и о функции $\hat{x}_p$.

При условиях теоремы 2 функция $\hat{p}_x$ однозначна. Поэтому множество оптимальных ответов на $\hat{p}_x$ есть функция от x. Обозначим это множество $X(x)$. Так как функция $\hat{p}_x$ непрерывна, то отображение $x \to X(x)$ полунепрерывно сверху.

При сведении процесса Б к процессу (Ia) в пространстве X стратегия $\hat{x}^n$ означает произвольную стратегию из множества $X(x^n)$.

Лемма 2. *Если выполняются условия теоремы* 1 *или теоремы* 2, *то при* $t \downarrow +0$

$$y(0) + \frac{1}{t}[y(t) - y(0)] \to X(x_0).$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_{n_k + r} = \alpha_k{}^r, \qquad \sum_{r=1}^{m} \alpha_k{}^r = \tau_k{}^m.$$

Имеем

$$\frac{1}{\tau_k{}^m}[y_k(\tau_k{}^m) - y_k(0)] = \frac{1}{\tau_k{}^m} \sum_{r=1}^{m} \alpha_k{}^r [\hat{y}_k(\tau_k{}^r) - y_k(\tau_k{}^r)],$$

где $\hat{y}_k(\tau_k{}^r) \in X(y_k(\tau_k{}^r))$.

Обозначаем

$$v_k{}^m = \sum_{r=1}^{m} \frac{\alpha_k{}^r}{\tau_k{}^m} \hat{y}_k(\tau_k{}^r)$$

и получаем

$$\left\| y_k(0) - \frac{1}{\tau_k{}^m}[y_k(\tau_k{}^m) - y_k(0)] - v_k{}^m \right\| = \left\| \sum_{r=1}^{m} \frac{\alpha_k{}^r}{\tau_k{}^m}[y_k(\tau_k{}^r) - y_k(0)] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{r \leqslant m} \| y_k(\tau_k{}^r) - y_k(0) \| \leqslant 2D\tau_k{}^m.$$

Пусть $\rho(x, A)$ — расстояние точки x от множества А.

В силу полунепрерывности сверху отображения $X(x)$ расстояние $\rho(v_k{}^m, X(x_0))$ мажорируется некоторой монотонной функцией

$$F(\tau) = F(\max_{\tau_k{}^r \leqslant \tau} \| y_k(\tau_k{}^r) - y_k(0) \|),$$

где $F(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$.

Поэтому расстояние от $y_k(0) + (1 / \tau_k{}^m)[y_k(\tau_k{}^r) - y_k(0)]$ до множества $X(x_0)$ мажорируется величиной

$$2D\tau_k{}^m + F(2D\tau_k{}^m).$$

Если $\tau_k{}^m < \sigma$, то

$$\rho\left(y_k(0) + \frac{1}{\tau_k{}^m}[y_k(\tau_k{}^m) - y_k(0)],\ X(x_0) \right) \leqslant 2D\sigma + F(2D\sigma).$$

Отсюда для $\tau < \sigma$ получаем

$$\rho\left(y(0) + \frac{1}{\tau}[y(\tau) - y(0)],\ X(x)_0 \right) \leqslant 2D\sigma + F(2D\sigma).$$

Правая часть стремится к нулю при $\sigma \to 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если выполняются условия теоремы 1 или теоремы 2 и если $U(x_0) < 0$ и $x_1 \in X(x_0)$, то существует такое $\Delta > 0$, что для $\alpha \in (0, \Delta)$*

$$U(x_\alpha) > U(x_0).$$

Доказательство проведем для процесса Б.

Пусть (x^*, p^*) — пара минимаксных стратегий.

Тогда

$$\varphi(x_1, \hat{p}_0) = \max_x \varphi(x, \hat{p}_0) \geqslant \varphi(x^*, \hat{p}_0) \geqslant \varphi(x^*, p^*)$$

и

$$0 > U(x_0) = \varphi(x_0, \hat{p}_0) - \varphi(x^*, p^*) \geqslant \varphi(x_0, \hat{p}_0) - \varphi(x_1, \hat{p}_0). \tag{5}$$

С другой стороны,

$$U(x_\alpha) - U(x_0) = \varphi(x_\alpha, \hat{p}_\alpha) - \varphi(x_0, \hat{p}_0) \geqslant \varphi(x_\alpha, \hat{p}_\alpha) - \varphi(x_0, \hat{p}_\alpha).$$

В силу леммы 1

$$\hat{p}_\alpha \to \hat{p}_0 \ (\alpha \downarrow 0).$$

Поэтому из неравенства (5) вытекает, что существует $\Delta > 0$ такое, что для $\alpha \in (0, \Delta)$

$$\varphi(x_0, \hat{p}_\alpha) < \varphi(x_1, \hat{p}_\alpha).$$

В силу квазивыпуклости функции $\varphi(\cdot, \hat{p}_\alpha)$ для $\alpha \in (0, \Delta)$ имеем:

$$\varphi(x_\alpha, \hat{p}_\alpha) > \min[\varphi(x_0, \hat{p}_\alpha), \quad \varphi(x_1, \hat{p}_\alpha)] = \varphi(x_0, \hat{p}_\alpha)$$

и

$$U(x_\alpha) - U(x_0) > 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 (основная лемма). *Если выполняются условия теорем 1 или 2 и если $u(t) < 0$, то существует $\Delta > 0$ такое, что при $\tau \in (t, t + \Delta)$*

$$u(\tau) > u(t).$$

Доказательство. Допустим, что лемма не верна и существует последовательность $t_k \downarrow +0$ такая, что

$$u(t+t_k) \leqslant u(t).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $t=0$, $y(0)=x_0$ и что последовательность

$$z_k(1)=y(0)+\frac{1}{t_k}[y(t_k)-y(0)], \qquad k=1,2,\dots$$

сходится при $k\to\infty$. Пусть $\lim Z_k(1)=x_1$. Очевидно, последовательность

$$z_k(\alpha)=y(0)+\frac{\alpha}{t_k}[y(t_k)-y(0)], \qquad k=1,2,\dots,(0<\alpha<1)$$

сходится к x_α при $k\to\infty$. Вследствие сильной квазивыпуклости функции $U(x)$ из $U(y(t_k))\leqslant U(x_0)$ и $\alpha>t_k$ вытекает

$$U(z_k(\alpha))\leqslant U(x_0),$$

а, следовательно,

$$U(x_\alpha)=\lim_{k\to\infty} U(z_k(\alpha))\leqslant U(x_0)$$

для любого $\alpha\in(0,\ 1)$. Это противоречит леммам 2 и 3. Лемма доказана.

На этом заканчивается доказательство теорем 1—3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

9. Доказательство теоремы, очевидно, вытекает из следующего усиления основной леммы.

Лемма 4′. *Если для выпуклой игры выполняются условия теорем* 1 *или* 2, *то*

$$\varliminf_{\Delta t\downarrow+0} \frac{\Delta u(t)}{\Delta t}\Big|_{t=0} \geqslant -u(0)$$

(обозначения прежние).

Из леммы 4′ легко выводится неравенство

$$u(t)\geqslant u(0)e^{-t}.$$

Чтобы доказать лемму 4′, воспользуемся понятием производной $U'(x_0,\ x_1)$ функции $U(x)$ в точке x_0 по направлению к точке x_1. Как обычно,

$$x_\alpha=x_0+\alpha(x_1-x_0) \quad (0\leqslant\alpha\leqslant1).$$

Тогда

$$U'(x_0,x_1)=D^+U(x_\alpha)\,|_{\alpha=0}=\lim_{\alpha\downarrow+0}\frac{1}{\alpha}[U(x_\alpha)-U(x_0)].$$

В силу выпуклости функции $U(x)$ такой предел всегда существует. Это правая производная в нуле функции $U(x_\alpha)$ как функции от α.

Перед доказательством леммы 4′ докажем аналог леммы 3.

Лемма 3′. *Пусть* $x_1\in X(x_0)$ *и*

$$\varphi(x_0,\hat p_0)-\varliminf_{\alpha\downarrow0}\varphi(x_1,\hat p_\alpha)\leqslant U(x_0), \tag{6}$$

тогда

$$U'(x_0,\ x_1)\geqslant -U(x_0).$$

Доказательство. Имеем

$$U(x_\alpha) - U(x_0) = \varphi(x_\alpha, \hat{p}_\alpha) - \varphi(x_0, \hat{p}_0) \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(x_\alpha, \hat{p}_\alpha) - \varphi(x_0, \hat{p}_\alpha) \geqslant \alpha [\varphi(x_1, \hat{p}_\alpha) - \varphi(x_0, \hat{p}_\alpha)].$$

Поэтому

$$U'(x_0, x_1) = \varliminf_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}[U(x_\alpha) - U(x_0)] \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{\alpha \downarrow 0} \varphi(x_1, \hat{p}_\alpha) - \varphi(x_0, \hat{p}_0) \geqslant -U(x_0).$$

Лемма доказана.

Из доказательства леммы 3 следует, что в случае однозначности функции $\hat{p}_\alpha$ условие (6) следует из условия $x_1 \in X(x_0)$.

Доказательство леммы 4′. Предположим, что лемма не верна. Тогда существует последовательность $t_k \downarrow 0$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} 1/t_k [U(y(t_k)) - U(x_0)] \leqslant -U(x_0) - \delta, \quad \delta > 0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность

$$z_k(1) = y(0) + 1/t_k[y(t_k) - y(0)], \quad k = 1, 2, \ldots$$

сходится при $k \to \infty$. Обозначим $\lim\limits_{k\to\infty} z_k(1) = x_1$. При этом последовательность

$$z_k(\alpha) = y(0) + \alpha/t_k[y(t_k) - y(0)], \quad k = 1, 2, \ldots$$

сходится к x_α при $k \to \infty$. В силу выпуклости функции $U(x)$ при $\alpha > t_k$

$$1/t_k[U(y(t_k)) - U(y(0))] \geqslant 1/\alpha[U(z_k(\alpha)) - U(x_0)],$$

и для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$1/\alpha[U(x_\alpha) - U(x_0)] = \lim_{k\to\infty} 1/\alpha[U(z_k(\alpha)) - U(x_0)] \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{k\to\infty} 1/t_k[U(y(t_k)) - U(y(0))] \leqslant -U(x_0) - \delta.$$

В силу леммы 2 $x_1 \in X\ (x_0)$ и согласно лемме 3′ последнее неравенство не может выполняться для любого $\alpha \in (0, 1)$. Лемма доказана.

СВЯЗЬ РАССМАТРИВАЕМЫХ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕКОТОРЫМИ ИЗВЕСТНЫМИ МЕТОДАМИ ОПТИМИЗАЦИИ

10. Рассмотрим несколько известных итеративных процессов оптимизации с точки зрения их связи с процессами А и Б, описанными выше.

Пусть требуется найти максимум выпуклой вверх непрерывной функции $U(x)$ на выпуклом замкнутом ограниченном множестве X n-мерного пространства (задача U). Задача U эквивалентна нахождению точки равновесия в следующей выпуклой игре Г с нулевой суммой. Стратегиями первого — максимизирующего игрока являются точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ множества X, стратегиями второго — векторы $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Множеством стратегий P второго игрока является множество таких p, для которых

$$\psi(p) = \min_{x\in X} [(p, x) - U(x)] < \infty.$$

Здесь $(p, x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k$.

Функция $\psi(p)$ называется обычно сопряженной с функцией $U(x)$, а отображение функции $U(x)$ (с областью ее определения X) в функцию $\psi(p)$ (с областью определения P) — преобразованием Лежандра (см., например, [14], п. 7.5).

Пусть выигрыш первого игрока равен

$$\varphi(x, p) = (p, x) - \psi(p).$$

Легко проверить, что функция $\psi(p)$ выпукла вверх и непрерывна и множество P выпукло (см. [14], пп. 7.5; 7.7). При таком определении, если множество X ограничено, множество P оказывается не ограниченным. Оно совпадает со всем пространством. Однако седловые точки игры лежат в конечной части пространства, и можно ограничить множество стратегий второго игрока множеством $\{\|y\| \leqslant R\}$, где R — достаточно большое число.

В этом случае описанная игра является выпуклой игрой. Кроме того,

$$U(x) = \min_{p \in P} [(p, x) - \psi(p)],$$

т. е. для каждого $p \in P$ гиперплоскость

$$\varphi = (p, x) - \psi(p)$$

в пространстве (x, φ) является опорной для множества $\overline{U} = \{(x, \varphi): \varphi \leqslant U(x), x \in X\}$. Таким образом, первый игрок выбирает точку $x \in X$, второй — гиперплоскость в пространстве (x, φ), опорную к множеству $\overline{U}$, и выигрыш первого игрока равен значению φ для точки x на этой гиперплоскости. Очевидно, оптимальным ответом $\hat{p}$ на стратегию $x^0 \in X$ является гиперплоскость, опорная к множеству $\overline{U}$ в точке $(x^0, U(x^0))$. В случае дифференцируемости функции $U(x)$ для любой точки x^0, внутренней для множества X, эта гиперплоскость единственна (касательная гиперплоскость):

$$\varphi = (\operatorname{grad} U(x^0), x - x^0) - U(x^0).$$

Поэтому процесс Б в этом случае состоит в нахождении на n-й итерации максимума линейной функции

$$\varphi = (\operatorname{grad} U(x^n), x)$$

на множестве X и движении по направлению к точке максимума $\hat{x}^n$:

$$x^{n+1} = x^n(1 - \alpha_n) + \hat{x}^n \alpha_n. \tag{1a}$$

В этом смысле частным случаем процесса Б для данной игры является метод Франка и Вольфа [6] для решения задач квадратичного и выпуклого программирования.

Градиентный метод нахождения максимума выпуклой функции $U(x)$ без ограничений, когда X есть все пространство [7], также можно рассматривать как предельный случай применения процесса Б в описанной игре. Рассмотрим задачу нахождения максимума функции $U(x)$ внутри сферы X_R радиуса $R : X = X_R$. Очевидно, при $R \to \infty$

$$\frac{\hat{x}^n}{R} \to \frac{\operatorname{grad} U(x^n)}{|\operatorname{grad} U(x^n)|}.$$

Поэтому, полагая $\alpha_n \equiv (h / R) |\operatorname{grad} U(x^n)|$ и переходя к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (1a), получим

$$x^{n+1} = x^n + h \operatorname{grad} U(x^n).$$

В таком же смысле предельным случаем процесса А для рассмотренной игры можно считать метод ускорения сходимости градиентного метода, предложенный Б. Т. Поляком [5].

В работе [5] рассматривается задача нахождения максимума дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(x)$ на всем пространстве (задача без ограничений). Доказывается, что если в точке максимума матрица вторых производных строго положительна, то гораздо быстрее, чем процесс градиентного спуска, сходится к максимуму последовательность $\{x^n\}$, построенная по формуле

$$x^{n+1} - x^n = g(x^n - x^{n-1}) + h \operatorname{grad} U(x^n).$$

Рассмотрим описанную выше игру, связанную с задачей нахождения максимума функции $U(x)$ на круге X_R радиуса R. Как уже говорилось, очевидно:

$$\hat{p}^n = \operatorname{grad} U(x^n),$$

$$\hat{x}^n - x^n \approx R \frac{p^n}{|p^n|} \quad (R \to \infty).$$

Поэтому в процессе А

$$p^n \approx \frac{|p^n|}{R_{\alpha_n}} (x^{n+1} - x^n)$$

и равенство

$$p^n = \alpha_{n-1} \hat{p}^{n-1} + (1 - \alpha_{n-1}) p^{n-1}$$

может быть заменено следующим приближенным равенством, точность которого увеличивается при $R \to \infty$:

$$x^{n+1} - x^n \approx \frac{R\alpha_n\alpha_{n-1}}{|p^n|} \operatorname{grad} U(x^{n-1}) + \frac{(1-\alpha_{n-1})\alpha_n |p^{n-1}|}{\alpha_{n-1}|p^n|} (x^n - x^{n-1}).$$

Выбирая α_n так, чтобы

$$\frac{R\alpha_n\alpha_{n-1}}{|p^n|} = h, \qquad \frac{(1-\alpha_n)\alpha_n |p^{n-1}|}{\alpha_{n-1}|p^n|} = g,$$

получим процесс, приближающийся к методу Б. Т. Поляка при $R \to \infty$.

11. В определенном смысле можно считать частным случаем процесса Б метод Булавского [9]. В работе [9] предлагается метод для решения задачи линейного программирования.

Задача 1а. $(c, x) = \min$, $Ax = b$, $f \leqslant x \leqslant d$.

(В [9] вместо $Ax = b$ записывается $Ax = p$).

Неравенства, записанные для векторов, как обычно, означают покомпонентные неравенства. Предлагается вместо задачи линейного программирования решить следующую задачу квадратичного программирования.

Задача 1б. $(c, x) + \frac{\sigma}{2}(Bx, x) = \min$, $Ax = b$, $f \leqslant x \leqslant d$, и B — положительно определенная матрица. Доказывается, что решения задачи 1б сходятся к решению задачи 1а при $\sigma \downarrow 0$. Для решения задачи 1б предлагается брать матрицу В специального вида и применять итеративный процесс, сходящийся к решению.

Оказывается, что если ограничения $f \leqslant x \leqslant d$ отсутствуют ($f = -\infty$,

$d = +\infty$), то этот процесс является частным случаем процесса Б для $\alpha_n \equiv \sigma$. А именно, возьмем функцию Лагранжа для задачи 1б:

$$\varphi(x, p) = (c, x) + \frac{\sigma}{2}(Bx, x) + (p, b - Ax).$$

Рассмотрим игру с платежной функцией $\varphi(x, p)$ и множествами стратегий: X — все пространство; P — круг большого радиуса R ($R \gg 1$) и итеративный процесс

$$x^n = \hat{x}^n,\ p^{n+1} = \frac{\sigma}{R}\hat{p}^n + \left(1 - \frac{\sigma}{R}\right)p^n.$$

Второе равенство при $R \to \infty$ превращается в равенство

$$p^{n+1} = p^n + \sigma \operatorname{grad}_p \varphi(x^n, p) = p^n + \sigma(b - Ax^n),$$

а x^n есть решение системы уравнений

$$\sigma Bx = pA - c.$$

Легко проверить, что решение $\hat{x}_p$ этой системы совпадает с оператором $x = T(p)$, введенным в [9] в § 2. Таким образом, итеративный процесс может быть записан в виде

$$p^{n+1} = p^n + \sigma(b - Ax^n),\ x^n = T(p^n),$$

что совпадает с точностью до обозначений с процессом, предлагаемым в [9].

В случае нетривиальных ограничений $f \leqslant x \leqslant d$ значение $x = T(p)$ не совпадает с решением системы $\sigma Bx = pA - c$, т. е. с x_p и процесс уже нельзя рассматривать как частный случай процесса Б. Точка $x = T(p)$ является в определенном смысле ближайшей к x_p среди точек параллелепипеда $f \leqslant x \leqslant d$.

Однако в данном конкретном случае для сходимости к оптимуму не обязательно, чтобы значение x^n было оптимальным ответом на p^n.

Тем же методом, каким доказывалась теорема 2, можно доказать сходимость и этого процесса.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ КАК МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ В ИГРЕ НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

12. Схемы решения задач оптимального планирования, использующие принцип декомпозиции (по терминологии Данцига — Вольфа) или «планирования на двух уровнях» (по терминологии Корнаи — Липтака), удобно представлять в виде нахождения точки равновесия (точки Нэша) в выпуклой бескоалиционной игре нескольких игроков с нулевой суммой.

Рассмотрим игру Г n игроков, в которой множеством стратегий k-го игрока является вектор x_k конечно-мерного компакта X_k и выигрыш есть $\varphi_k(x_k, x)$, где

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

— набор стратегий всех n игроков.

Если при каждом k множество X_k выпуклое, а функция $\varphi_k(x_k, x)$ непрерывна, выпукла вверх по x_k и выпукла вниз по x, то игру Г будем называть выпуклой игрой. Игра называется игрой с нулевой суммой, если

$$\sum_k \varphi_k(x_k, x) \equiv 0$$

для любого $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in X_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Достаточно общая схема декомпозиции может быть построена следующим образом. Пусть необходимо найти максимум выпуклой вверх функции $U(x)$ на выпуклом компакте X, причем аргумент $x \in X$ может быть представлен в виде вектора

$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$

каждая координата которого x_k в свою очередь есть точка некоторого конечно-мерного выпуклого компакта X_k и множество X есть пересечение прямого произведения множеств X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ с выпуклым замкнутым множеством X^0: $X = X^0 n \prod\limits_k X_k$.

Рассмотрим следующую игру $n+2$ игроков. Множеством стратегий k-го игрока является множество X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Стратегиями $(n+1)$-го игрока являются векторы $x_{n+1} = p = (p_1, \ldots, p_n)$, где p_k есть вектор в пространстве такого же числа измерений, что и вектор x_k. Множество стратегий этого игрока есть

$$X_{n+1} = P = \{p : \|p\| \leqslant R\},$$

где R — достаточно большое число (см. п. 10).

Последний $(n+2)$-й игрок (присвоим ему номер 0) имеет только одну стратегию. Обозначим ее для общности обозначений x_0.

Пусть $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$. Выигрыш k-го игрока для $k = 1, 2, \ldots, n$ есть

$$\varphi_k(x_k, \bar{x}) = (x_k, p_k).$$

Выигрыш $(n+1)$-го игрока

$$\varphi_{n+1}(p, \bar{x}) = \psi(p) - (p, x),$$

где

$$\psi(p) = \min_{x \in X} [(p, x) - U(x)], \qquad (p, x) = \sum_k (p_k, x_k).$$

Выигрыш $(n+2)$-го игрока

$$\varphi_0(x_0, \bar{x}) = -\psi(p).$$

Из свойств сопряженных функций вытекает, что функция $\psi(p)$ выпукла вверх и непрерывна. Следовательно, рассмотренная игра — выпуклая. Кроме того, это есть игра с нулевой суммой, так как

$$\sum_k (p_k, x_k) + \psi(p) - (p, x) - \psi(p) \equiv 0.$$

Назовем эту игру игрой $\Gamma(X, U)$.

Лемма 5. 1) *Если $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_{n+1})$ есть равновесная стратегия в игре $\Gamma(X, U)$, то в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ функция $U(x)$ достигает максимума на множестве X.* 2) *Обратно, если $U(x_1, \ldots, x_n) = \max\limits_{x \in X} U(x)$, то существует $x_{n+1} = p \in P$ такое, что $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ есть точка равновесия в игре $\Gamma(X, U)$.*

Доказательство. 1) Очевидно, если $\bar{x}^* = (x_0, x_1^*, \ldots, x_n^*, p^*)$ есть точка равновесия игры $\Gamma(X, U)$, то x^*, p^* есть седловая точка функции

$$-\varphi_{n+1} = -\psi(p) + (p, x),$$

рассматриваемой как функции двух переменных x и p, т. е.

$$(p^*, x^*) - \psi(p^*) = \max_{x \in X} \min_{p \in P} [(p, x) - \psi(p)].$$

Но из теории сопряженных функций известно, что

$$\min_{p\in P}[(p,x)-\psi(p)]=U(x)$$

(см. [14], п. 7.5). Поэтому x^* есть точка максимума функции $U(x)$.

2) Обратно, если $x^*=(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ есть точка максимума функции $U(x)$, то определим p^* из равенства

$$(p^*,x^*)-\psi(p^*)=\min_{p\in P}[(p,x)-\psi(p)].$$

Легко проверить, что пара x^* и p^* — седловая точка функции $(p,x)-\psi(p)$, а набор стратегий $\bar{x}^*=(x_0, z_1^*, \ldots, x_n^*, p^*)$ — точка равновесия. Лемма доказана.

Таким образом, задача выпуклого программирования сводится к нахождению точки равновесия в игре $n+2$ игроков.

Теперь решим обратную проблему — сведем нахождение точек равновесия в выпуклой игре с нулевой суммой к решению задачи выпуклого программирования. Пусть игра Г задается функциями выигрыша $\varphi_k(x_k, x)$ и множествами стратегий X_k $(k=1,2,\ldots,n)$.

Рассмотрим функцию

$$U(x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\hat{x}_k,x),\quad x\in X,$$

где X есть прямое произведение множеств X_k и $\hat{x}_k$ — оптимальный ответ k-го игрока на набор стратегий $x=(x_1,\ldots,x_n)$, т. е.

$$\varphi_k(\hat{x}_k,x)=\max_{y_k\in X_k}\varphi_k(y_k,x).$$

Очевидно, $U(x)\geqslant 0$.

По аналогии с игрой двух игроков естественно ввести понятие квазивыпуклой, строго и сильно квазивыпуклой игры n игроков.

Из [13, § 23] следует, что любая квазивыпуклая игра имеет по крайней мере одну точку равновесия.

Лемма 6. *Множество точек равновесия квазивыпуклой игры совпадает с множеством* $\{x\colon U(x)=0\}$.

Доказательство. Если $x^*=(x^*_1,\ldots,x_m^*)$ есть точка равновесия, то $\varphi_k(x_k^*,x^*)=\varphi_k(\hat{x}_k,x^*)$ для всех k, где $\hat{x}_k$ есть оптимальный ответ на x^*, и

$$U(x)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(x_k^*,x^*)=0.$$

Обратно, если $x=(x_1,\ldots,x_m)$ не есть точка равновесия, то для всех k

$$\varphi_k(\hat{x}_k,x)\geqslant\varphi_k(x_k,x)$$

и хотя бы для одного k

$$\varphi_k(\hat{x}_k,x)>\varphi_k(x_k,x).$$

Поэтому

$$U(x)=\sum_k\varphi_k(\hat{x}_k,x)>\sum_k\varphi_k(x_k,x)=0.$$

Лемма доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается более общая теорема для игр r игроков.

Пусть $\hat{x}_x = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_r)$ — набор оптимальных ответов игроков на набор стратегий $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Рассмотрим итеративный процесс (1а), где $\hat{x}^n$ есть набор оптимальных ответов на x^n.

Теорема 1′. *Если для сильно квазивыпуклой игры функция $\hat{x}_x$ однозначна (набор оптимальных ответов для каждого $x \in X$ единствен), то $x^n \to x^*$ $(n \to \infty)$, где x^* — точка равновесия.*

Утверждение теоремы эквивалентно утверждению

$$U(x^n) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где

$$U(x) = \sum_k \varphi_k(\hat{x}_k, x).$$

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 1.

13. Покажем, что алгоритм разложения Данцига — Вольфа и алгоритм «планирования на двух уровнях» Корнаи — Липтака можно рассматривать как нахождение точек равновесия в игре n лиц с нулевой суммой.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования (задача L_1):

$$\sum_k (c_k, x_k) = \max, \qquad \sum_k A_k x_k + b \geqslant 0, \qquad B_k x_k + b_k \geqslant 0,$$

$$x_k \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N;$$

здесь прописные буквы — A, B — означают матрицы, а строчные — x, c, b — векторы; неравенства между векторами понимаются как покомпонентные неравенства.

Введем обозначения:

$$X_k = \{x_k : B_k x_k + b_k \geqslant 0,\ x_k \geqslant 0\}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_N),$$

$$X^0 = \left\{x : \sum_k A_k x_k + b \geqslant 0\right\}, \qquad U(x) = \sum_k (c_k, x_k).$$

В дальнейшем будем предполагать, что множества X_k не пусты и ограничены.

В этих обозначениях итеративный алгоритм нахождения точки равновесия в описанной выше игре $\Gamma(X, U)$ является алгоритмом решения задачи L, весьма напоминающим алгоритм разложения Данцига — Вольфа [1]. Чтобы сделать эту аналогию более прозрачной, будем считать, что $(N+1)$-й игрок выбирает не вектор p, а вектор $x_{n+1} = v$, размерность которого равна числу строк в матрицах A_k, из множества

$$X_{N+1} = V = \{v:\ 0 \leqslant v \leqslant v_{\max}\},$$

где $v_{\max}$ — вектор с достаточно большими компонентами. Функции выигрыша запишем в виде

$$\varphi_k(x_k, \bar{x}) = (c_k + vA_k, x_k),$$

$$\varphi_{N+1}(v, \bar{x}) = \psi(v) - \sum_k (c_k + vA_k, x_k),$$

$$\psi(v) = \min_{x \in X} \sum_k (vA_k x_k),$$

$$\varphi_0(x_0, \bar{x}) = -\psi(v).$$

Легко проверить, что если множество X не пусто, то каждое решение $x = (x_1, \ldots, x_N)$ задачи L и каждый вектор v оценок первой группы ограничений $\sum_k A_k x_k + b \geqslant 0$ дает точку равновесия описанной игры и, наоборот, компоненты $x_1, \ldots, x_n$, v любой точки равновесия в игре суть решение задачи L и оценки первой группы ограничений. Теперь алгоритм Данцига — Вольфа [1] можно интерпретировать как алгоритм нахождения точки равновесия в игре $\Gamma(X, U)$, в котором на каждой итерации первые N игроков выбирают оптимальный ответ на стратегии партнеров, а $(N+1)$-й игрок выбирает свою стратегию более сложным способом.

Для представления в виде решения игры процесса Корнаи — Липтака запишем задачу линейного программирования в виде (задача L_2):

$$U(x) = \sum_k (c_k, x_k) = \max,$$

$$A_k x_k + u_k \geqslant 0, \qquad B_k x_k + b_k \geqslant 0,$$

$$x_k \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \qquad \sum_k u_k = b.$$

Пусть $Y_k(u_k) = \{x_k\colon B_k x_k + b_k \geqslant 0,\ A_k x_k + u_k \geqslant 0,\ x_k \geqslant 0\}$.

Без ограничения общности можно предположить, что $Y_k(u_k)$ не пусто при любом значении u_k. Этого всегда можно добиться путем введения дополнительных переменных в вектор x_k, обладающих большим отрицательным коэффициентом в целевой функции (штраф за нарушение ограничений). Положим

$$\overline{U}_k(u_k) = \max_{x_k \in Y_k(u_k)} (c_k, x_k).$$

Теперь можно переформулировать задачу так (задача L_2'):

$$\sum_k \overline{U}_k(u_k) = \max, \qquad \sum_k u_k = b, \qquad \|u_k\| \leqslant R,$$

где R — достаточно большое число.

Легко проверить, что функции $\overline{U}_k(u_k)$ выпуклы вверх. Возьмем функцию, сопряженную с $\overline{U}_k(x_k)$:

$$\psi_k(p_k) = \min_{\|u_k\| \leqslant R} [(p_k,\ u_k) - \overline{U}_k(u_k)].$$

Построим игру $(N+2)$ лиц, в которой стратегиями первых N игроков являются ограниченные множества P_k векторов p_k такой же размерности как вектора u_k $(k = 1, \ldots, N)$:

$$0 \leqslant p_k \leqslant \bar{p}_k,$$

где $\bar{p}_k$ имеет достаточно большие компоненты. Стратегиями $(N+1)$-го игрока являются наборы векторов $u = \{u_1, \ldots, u_N\}$

$$X_{N+1} = \left\{u : \sum_k u_k = b\ \|u_k\| \leqslant R\right\}.$$

Чтобы сделать игру игрой с нулевой суммой, как и раньше, введем еще фиктивного игрока с номером 0 и единственной стратегией x_0.

Если обозначим

$$\bar{x} = \{x_0, p_1, \ldots, p_N, u\},$$

то функции выигрыша можно записать так:

$$\varphi_0(x_0, \bar{x}) = -\sum_k \psi_k(p_k),$$

$$\varphi_k(p_k, \bar{x}) = \psi(p_k) - (p_k, u_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\varphi_{N+1}(u, x) = \sum_k (p_k, u_k).$$

Легко проверить, что точки равновесия этой игры совпадают с решениями исходной задачи L_2, и оптимальным ответом p_k k-го игрока ($k = 1, \ldots, N$) является градиент любой опорной плоскости к функции $U_k(u_k)$, т. е. к множеству $\{(\varphi, u_k): \varphi \leqslant U_k(u_k)\}$. Итеративный процесс, предлагаемый Корнаи и Липтаком [2], эквивалентен процессу А для нахождения точек равновесия в описанной игре. Для решения задачи L_2' естественно, очевидно, применить и градиентный метод, описанный в п. 10, или его модификации. Во всех случаях одна итерация состоит в решении «секторных задач» нахождения $\bar{U}_k(u_k) = \max\limits_{x_k \in Y_k(uk)} (c_k, x_k)$ при фиксированном распределении u (распределение ресурсов и заданий между секторами) и в использовании полученных оценок ограничений u_k для исправления этого распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Данциг, Ф. Вольф. Алгоритм разложения для задач линейного программирования. Математика, 1964, т. 8, № 1.
2. J. Kornai, T. Liptak. Ketszintu tervezes: jatekelmeleti modell es iterativ szamitassi eljares nepgazdasagi tavlati tervezesi feladatok megoldasara. Madyar tud. akad. Mat. Kutato int. Kozl., 1962 (1963), vol. 7, No. 4.
3. В. А. Волконский. Система текущего планирования с помощью оценок ресурсов на основе матричных моделей. Сб. Планирование и экономико-математические модели. М., изд-во «Наука», 1964.
4. Дж. Робинсон. Итеративный метод решения игр. Сб. Матричные игры. М., Физматгиз, 1961.
5. Б. Т. Поляк. О некоторых способах ускорения сходимости итерационных методов. Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1964, т. 4, № 5.
6. M. Frank, P. Wolfe. An Algorithm for quadratic programming. Naval res. logistics quart., 1956, vol. 3, No. 1—2.
7. Н. З. Шор. О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования. Диссертация. Институт математики — Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1964.
8. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. В. А. Булавский. Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования. Сб. Численные методы оптимального планирования. СО АН СССР, эконом.-матем. сер., 1962, вып. 1.
10. Р. Белман, И. Гликсберг, О. Гросс. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
11. J. B. Rosen. The gradient projection method for nonlinear programming. P. I. Linear constraints. Industr. Appl. Mathem., 1960, vol. 8, No. 1.
12. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
13. К. Берж. Общая теория игр нескольких лиц. М., Физматгиз, 1961.
14. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., изд-во «Мир», 1964.
15. B. Martos. The direct power of simplicial methods in continuous programming. Magyar tud. akad. Kozl. int. Ин-т экономики Венгерской Академии наук, 1964.
16. Дж. М. Данскин. Итеративный метод решения непрерывных игр. Сб. Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
22 IX 1964