

О РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАЗРЕШАЮЩИХ СЛАГАЕМЫХ

Е. П. НЕСТЕРОВ

(МОСКВА)

Опыт решения большого количества транспортных задач, накопленный в лаборатории транспорта Центрального экономико-математического института АН СССР, показывает, что одним из эффективных по времени решений является алгоритм разрешающих слагаемых (условно-оптимальных планов) [1, 2] для задач в матричной форме как вручную, так и на электронных машинах. Небольшая модификация алгоритма, дающая ускорение и упрощение вычислительного процесса, предложена автором настоящей статьи в [4].

Ниже излагается модификация метода разрешающих слагаемых, основанная на идеях Флуда [5], которая уменьшает число итераций и ускорит вычислительный процесс.

Как известно, транспортная задача линейного программирования формулируется следующим образом:

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (3)$$

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} = \min, \quad (4)$$

где a_i — объем производства в i -м пункте; b_j — объем потребления в j -м пункте; x_{ij} — объем поставок из пункта i в пункт j ; c_{ij} — стоимость перевозки из пункта i в пункт j .

Начальный план в [4] строится следующим образом: в каждом столбце находится минимальный элемент, и в эту клетку помещается весь объем потребления данного пункта, как это показано в табл. 1.

В правом верхнем углу каждой клетки помещены стоимостные показатели. В нижнем левом — величины корреспонденций. M — большое число. Справа и снизу матрицы показаны объемы производства и потребления.

После построения плана перевозок в каждой строке определяется величина $[a_i - \sum_j x_{ij}]$. Эта величина записывается справа от величины объема производства. Если величина $(a_i - \sum_j x_{ij})$ отрицательна, строка называется недостаточной, если положительна — избыточной. Кроме того, могут быть нейтральные строки, где величина $(a_i - \sum_j x_{ij}) = 0$, которые классифицируются по правилам, изложенным в [1, 2, 4].

Присвоим классу избыточных строк индекс I , а недостаточных $\bar{I}$. Затем произведем преобразование матрицы. Для каждого столбца, снабжаемого недостаточными строками, находим

$$d_j = \min_{i \in I} c_{ij} - \min_{i \in \bar{I}} c_{ij}.$$

Таблица 1

41	1	7	3	5	6	10	M	40—201
			63	37	72	28		
4	2	8	9	11	M	12	50	50—59
	59							
21	M	19	15	14	M	17		60+60
M	20	22	M	26	18	24		100+100
31	M	29	27	M	M	M		100+100
41	59	63	37	72	28	50		350
20	18	16	10	8	8	5		—260

Теперь требуется определить разрешающее слагаемое Δ . По [1, 2, 4] $\Delta = \min d_j$. Мы будем определять разрешающее слагаемое по-другому. Расположим d_j в порядке возрастания их величины так, чтобы

$$d_{j_1} \leq d_{j_2} \leq \dots \leq d_{j_{k-1}} \leq d_{j_k} \leq d_{j_{k+1}} \leq \dots d_n$$

С каждым d_{j_k} сопоставим число b_j и определим k таким образом, чтобы

$$\sum_{j=1}^k b_j \geq \left| \sum_{i \in \bar{I}} (a_i - \sum_j x_{ij}) \right| > \sum_{j=1}^{k-1} b_j.$$

Положим $\Delta = d_{j_k}$.

Далее ко всем показателям недостаточных строк прибавляем разрешающее слагаемое Δ . Как показано Ю. А. Олейником и К. В. Кимом, целесообразнее разрешающее слагаемое записывать отдельно, а не прибавлять к показателям матрицы. При необходимости произвести сравнение к показателям матрицы прибавляется разрешающее слагаемое.

После преобразования матрицы необходимо построить новый план перевозок. Имеются два способа перераспределения перевозок. В первом из них [1, 2, 4] большая часть корреспонденций остается без изменения на своих местах, а меньшая перемещается по цепям. Во втором [3] определяется вычеркивающая нумерация и распределение перевозок на каждой итерации производится заново. При первом способе меньше перемещений, но более сложная логика; при втором план строится вновь, но зато простая логика.

Поскольку в модифицированном алгоритме большинство корреспонденций x_{ij} перемещается на другие места, следует отдать предпочтение второму способу построения плана перевозок.

После конечного числа итераций алгоритм приводит к оптимальному плану, при котором соблюдаются условия (1—4).

Стоимости каждой строки будут увеличены в конце решения на величину Δ_i . В задаче ищем минимум целевой функции:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (c_{ij} + \Delta_i) x_{ij} &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i \sum_j \Delta_i x_{ij} = \\ &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i \Delta_i \sum_j x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_i \Delta_i a_i, \end{aligned}$$

поскольку по условию (1) $\sum_j x_{ij} = a_i$.

Второй член формулы от x_{ij} не зависит. Поскольку разрешающее слагаемое Δ не принималось равным $\min d_j$ и в доказательстве оптимальности мы использовали условие $\sum_j x_{ij} = a_i$, модифицированный алгоритм нельзя применять к открытым моделям транспортной задачи, когда $\sum x_{ij} < a_i$.

Проследим применение алгоритма на примере. В табл. 1

$$\sum_{i \in \bar{I}} (a_i - \sum_j x_{ij}) = -260,$$

$$\sum_{j=1}^k b_j = 50 + 28 + 72 + 37 + 63 + 59 = 309,$$

$$309 > 260 > 250, \Delta = 18.$$

Новая матрица и новый план перевозок представлены в табл. 2.

Таблица 2

18	41	1	7	3	5	6	10	М	40—1
18		4	2	8	9	11	М	12	50+0
	21	М	19	15	14	М	17		60—162
		63	37	72		50			
	М	20	22	М	26	18	24		100+63
		9			28				
	31	М	29	27	М	М	М		100+100
	41	59	63	37	72	28	50		350
	3	—	3	12	12	—	7		—163

Новый план перевозок и разрешающих слагаемых показан в табл. 3.

Таблица 3

30		1	7	3	5	6	10	М	40+40
18	41	4	2	8	9	11	М	12	50—0
		9							
12	21	М	19	15	14	М	17		60—0
				60					
	М	20	22	М	26	18	24		100—103
		50	63		12	28	50		
	31	М	29	27	М	М	М		100+63
				37					
	41	59	63	37	72	28	50		350
	9	17	7	—	10	22	М		—103

Продолжим решение задачи. В табл. 2 — недостаточные строки 1-я и 3-я:

$$\sum_{i \in \bar{I}} (a_i - \sum_j x_{ij}) = -163,$$

$$\sum_{j=1}^k b_j = 41 + 63 + 50 + 37 = 191,$$

$$191 > 163 > 154, \quad \Delta = 12.$$

Оптимальный план и система потенциалов построены в табл. 4.

Таблица 4

	31	29	29	27	35	27	33	
30	1 40	7	3	5	6	10	М	40
27	4 1	2 49	8	9	11	М	12	50
21	21	М	19	15	14 60	М	17	60
9	М	20 10	22	М	26 12	18 28	24 50	100
0	31 0	М	29 63	27 37	М	М	М	100
	41	59	63	37	72	28	50	350

Для достижения оптимального плана потребовались всего три итерации, считая за итерацию наращивание разрешающих слагаемых.

Если производить расчет прежним способом, принимая разрешающее слагаемое $\Delta = \min d_j$, то для решения приведенной выше задачи требуется девять итераций. Таким образом, новая модификация алгоритма сократила в данном примере число итераций ровно в три раза. При решении нескольких реальных примеров модифицированным алгоритмом всегда наблюдалась экономия числа итераций.

Однако можно составить такой пример, в котором число итераций при решении модифицированным алгоритмом будет больше обычного. Поскольку в большинстве примеров разрешающее слагаемое в последних итерациях становится равным $\min d_j$, рекомендуется такая последовательность решения задачи: в первой части итераций числом E $0,5m$, где m — число строк матрицы, применять модифицированный алгоритм, а затем определять разрешающее слагаемое обычным образом. Остается показать, что число итераций предлагаемой модификации алгоритма конечно. Число итераций разбивается на две части. Первая часть равна половине числа строк матрицы, т. е. конечна. Во второй части применяется обычный алгоритм. А. Л. Лурье [1] доказал, что число итераций обычного алгоритма разрешающих слагаемых конечно. Тем самым доказывается, что общее число итераций модифицированного алгоритма также конечно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Лурье. Алгоритм решения транспортной задачи путем приближения условно-оптимальными планами. В сб. Применение математических методов в экономике и планировании. Т. 4. Линейное программирование. М., изд-во АН СССР, 1961.
2. Ю. А. Олейник. Решение задачи о транспортировке на электронной вычислительной машине условно-оптимальными планами. Вычислительный центр АН СССР, 1960.
3. А. Л. Брудно. Решение транспортной задачи методом вычеркивающей нумерации. В сб. Применение цифровых вычислительных машин в экономике. М., изд-во АН СССР, 1962.
4. Е. П. Нестеров. Транспортные задачи линейного программирования. М., Транспорт, 1962.
5. Ford L. R., Fulkerson D. R. Flows in networks. Princeton Univ. Press, 1962.

Поступила в редакцию
23 XI 1964