ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ — 1966, том II, вып. 2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАБИРИНТЕ ПРИ РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Н. А. НИКИТИНА, И. В. РОМАНОВСКИЙ

(Ленинград)

При решении транспортной задачи в сетевой постановке, как правило, в допустимом базисном плане используется лишь часть пунктов сети. Поэтому для определения потенциалов в остальных пунктах приходится вводить фиктивные «нулевые» грузопотоки. Как нам кажется, этот выход из положения не является наилучшим. В настоящей работе предлагается иной метод, основанный на использовании алгоритма для решения задачи о лабиринте. Эта модификация удобна не только в вычислительном отношении (она дает улучшение плана при каждом исправлении потенциалов), но и позволяет очень просто формулировать и доказывать теорему о потенциалах для транспортной задачи в сетевой постановке (особенно для невырожденного случая), а также легко переносить метод потенциалов на задачи, обобщающие обычную транспортную задачу. Мы вернемся к этому ниже.

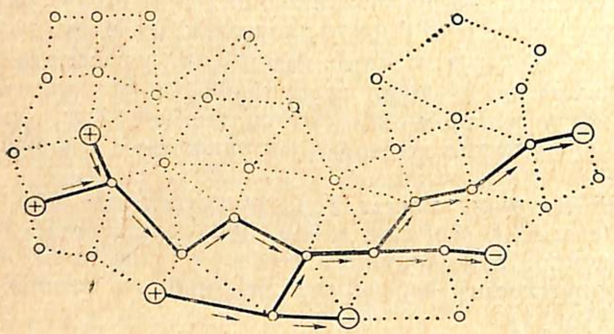

Рис. 1. Граф перевозок (сплошные линии — дуги графа, пунктирные — остальные дуги сети)

В основу данной заметки легло сообщение И. В. Романовского об использовании метода решения задачи о лабиринте при решении транспортной задачи, сделанное им на конференции в Новосибирске в 1962 г., и дипломная работа Н. А. Никитиной, выполненная ею в Ленинградском университете в 1963 г.

Отметим, что одновременно с нашей работой в Институте кибернетики АН УССР был разработан метод решения транспортной задачи, также базирующийся на задаче о лабиринте, но использующий не метод потенциалов, а венгерский метод (см. [1]).

Предлагаемый метод состоит в следующем.

При задании допустимого базисного плана (для простоты мы рассматриваем невырожденный случай) множество участков сети, на которых перевозка происходит (граф перевозок), образует дерево (рис. 1), являющееся частичным подграфом транспортной сети. Выберем произвольно один из пунктов производства i и положим потенциал v_i этого пункта равным 0. Обычным образом мы можем определить потенциалы всех пунктов, входящих в граф перевозок, в том числе всех пунктов производства и потребления (как обычно, $v_i + c_{ij} = v_j$, если идет перевозка из пункта i в соседний пункт j).

Будем теперь рассматривать эти потенциалы как «кратчайшие расстояния» до пунктов от какого-то несуществующего «начала» сети (эти «расстояния» могут быть и отрицательными), а «длинами» участков сети будем считать соответствующие стоимости проезда. Используя имеющиеся расстояния, мы можем вычислить «расстояния» до всех остальных пунктов. Для этого удобнее всего использовать алгоритм Минти, который состоит в следующем *:

Все пункты делятся на три категории: A — пункты, расстояния до которых уже вычислены; B — пункты, расстояния до которых вычисляются; C — остальные пункты.

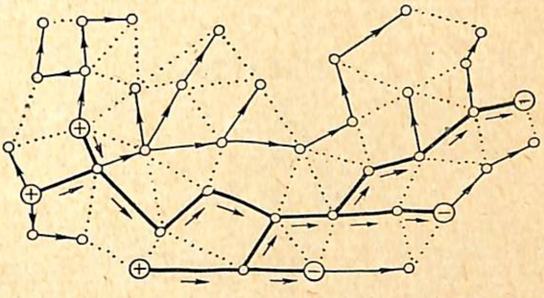

Рис. 2. Скелет перевозок (жирные линии — основной граф, остальные сплошные линии — «наросты»)

В начале работы алгоритма в категорию A входят те пункты, которые входят в граф перевозок (мы будем в дальнейшем называть эти пункты занятыми, в отличие от остальных — свободных), остальные пункты входят в C. Множество B пусто.

1. Вписать в B все свободные пункты, которые соседствуют с занятыми. В качестве временного расстояния v_j до свободного пункта j, входящего в B, взять минимум по всем занятым пунктам i, соседним с j, величины $v_i + c_{ij}$, где v_i — потенциал пункта i, а c_{ij} — стоимость перевозки из i в j.

2. Если множество B пусто, то СТОП!

Если B непусто, выбрать в B пункт i_0 с минимальным расстоянием v_i и перевести его в A.

3. Для каждого j, соседнего с i_0 и не входящего в A, найти

$$\bar{v}_j = v_{i_0} + c_{i_0 j}$$

и записать j в B, определив временное расстояние до j равным $\bar{v}_j$, если раньше пункт j находился в C, и минимуму из $\bar{v}_j$ и v, если раньше пункт j находился в B и временное расстояние до него было равно v. Перейти к пункту 2.

Пути, по которым находятся величины v_j для свободных пунктов, дополняют граф перевозок до дерева, содержащего все пункты сети (будем называть это дерево *скелетом перевозок*). Мы получаем своего рода «наросты» на дереве перевозок (рис. 2). Отметим, что все эти «наросты» имеют направление «от» основного графа.

При проверке допустимости системы потенциалов каждой невязке соответствует добавление одной дуги в скелет перевозок, в результате этого добавления появляется контур. В этом контуре «наросты» могут участвовать только рядом с началом добавляемой дуги, образуя путь, направленный так же, как эта новая дуга (рис. 3). Действительно, «наросты» не могут соединять вершин, входящих в основной граф, так как он был связным, а «наросты» не меняют циклического числа. Входящие в кон-

---

* Удобство алгоритма Минти в том, что в нем потенциалы не пересчитываются, а вычисляются «сразу» (пересчитываются «временные расстояния»). Поэтому потенциалы занятых пунктов будут при этом алгоритме храниться без специальных сохраняющих мер.

тур «наросты» не могут граничить с концом вводимой дуги, так как в этом случае конец этой дуги j был бы свободным пунктом и по самому построению его потенциала v_j мы должны иметь

$$v_j = \min\,[v_i + c_{ij}],$$

где минимум берется по всем соседним пунктам i, а следовательно, невязка, в которой v_j стоит в правой части, невозможна.

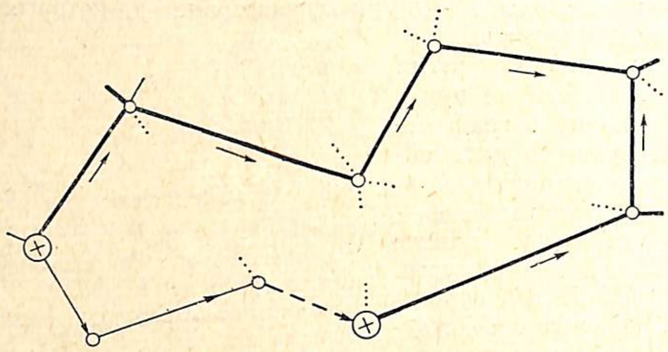

Рис. 3. Контур исправлений (вводимая дуга изображена пунктиром)

Из сказанного следует, что при проверке допустимости системы потенциалов можно ограничиться лишь проверкой «на занятые пункты», т. е. проверить неравенство

$$v_i + c_{ij} \geqslant v_j,$$

когда j пробегает все занятые пункты, а i все пункты, соседние с j.

При пересчете потенциалов некоторое сокращение вычислений может быть достигнуто использованием следующего приема: пусть (рис. 4) в скелет перевозки вводится путь $\bar\mu$, начало которого $\bar i$, а конец — $\bar j$; исключается путь $\bar{\bar\mu}$, начало которого $\bar{\bar i}$, а конец $\bar{\bar j}$.

Если удалить из скелета перевозок оба эти пути, то он распадется на две части.

1. Вычислим потенциал в части, содержащей j, взяв за основу прежний потенциал пункта j (отметим, что все эти потенциалы не изменяются, и если мы можем опознать пункты, лежащие в той же части, что и j, вычислений можно и не производить).

2. Добавим к скелету путь $\bar\mu$ и вычислим потенциал остальных занятых вершин (все они увеличатся на величину невязки).

3. Используя алгоритм Минти, вычислим потенциалы остальных свободных вершин.

4. Вычтем из всех потенциалов величину v_1.

Последнее делается для того, чтобы предотвратить «сползание» системы потенциалов. Этот метод пересчета потенциалов имеет и более экономные реализации.

Все изложенное позволяет дать очень простую формулировку и (что существеннее) доказательство теоремы о потенциалах (для невырожденного случая).

Назовем системой потенциалов, соответствующей допустимому базисному (понятно, что можно ограничиться лишь базисными планами) плану перевозок, систему чисел, вычисленных так, как это описано выше.

Скажем, что система потенциалов допустима, если для любых соседних пунктов i и j выполняется неравенство

$$v_i + c_{ij} \geqslant v_j.$$

Теорема о потенциалах. *Для того чтобы план перевозок был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему система потенциалов была допустимой.*

Достаточность условия доказывается так же, как обычно. Для того чтобы доказать необходимость, мы показываем, что если система потенциалов не является допустимой, то возможно уменьшение стоимости перевозки. Это вытекает из специфики «наростов» дерева и их вхождения в контур исправлений.

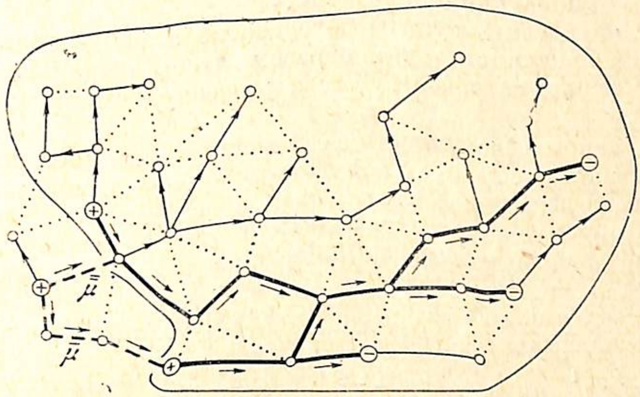

Рис. 4. Контур исправлений и пересчет потенциалов (выделена область, в которой потенциалы вычисляются в первую очередь)

При обычном же исчислении потенциалов не каждое исправление уменьшает стоимость перевозки, и условие допустимости системы потенциалов не является необходимым.

Мы не видим никаких препятствий для использования описанного приема и в случае сетевой задачи с ограничениями пропускных способностей. Что же касается вырождений, то метод нулевых потоков представляется нам в настоящее время наиболее удачным средством их устранения. Использование метода нулевых потоков для борьбы с вырождением нисколько не препятствует использованию задачи о лабиринте для доопределения системы потенциалов.

Тот же метод может быть использован при решении следующей задачи о размещении [2]. Имеется несколько видов сырья. Из них изготовляется готовая продукция, причем на единицу готовой продукции идет по единице сырья каждого вида. Заданы пункты производства сырья каждого вида с количеством производимого в них сырья. Заданы пункты потребления готовой продукции с количествами потребляемой продукции. Заданы возможные пункты переработки сырья. Даны стоимости перевозки единицы сырья каждого вида из пунктов производства в пункты потребления, стоимости переработки единицы продукции в каждом пункте, затрат на перевозку единицы готовой продукции из каждого пункта переработки в пункты потребления. Требуется определить пункты переработки так, чтобы общая величина затрат на перевозку всех видов сырья, переработку его и перевозку готовой продукции была минимальной.

Мы будем использовать следующую формализацию этой задачи.

Дан связный неориентированный граф, имеющий n вершин и m ребер. Имеется p видов сырья, из которого производится однородная готовая продукция, причем на единицу продукции идет по единице сырья каждого вида.

Заданы следующие величины: A_i^l — количество сырья l-го вида, производимое в i-й вершине графа ($i = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, p$); B_i — потребность i-й вершины в готовой продукции ($i = 1, 2, \ldots, n$), c_i — стоимость производства единицы продукции ($i = 1, 2, \ldots, n$); a_u^l — стоимость перевозки единицы сырья l-го вида по ребру u; b_u — стоимость перевозки единицы готовой продукции по ребру u'.

Требуется определить пункты переработки сырья и количество производимой в них продукции таким образом, чтобы общая величина затрат на перевозку сырья, переработку его и развозку готовой продукции была минимальной.

Назовем планом совокупность всех искомых неизвестных, а именно: пункты переработки сырья с количеством производимой там продукции, планы перевозок всех видов сырья, план перевозки готовой продукции.

Критерий оптимальности для задачи вытекает из теоремы двойственности линейного программирования, которая в нашем случае принимает следующий вид.

Для того чтобы план был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала система потенциалов

$$v_i^l,\ u_i,\ w, \qquad i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, p,$$

которая удовлетворяла бы следующим условиям:

1) для всех ребер графа

$$\left.\begin{array}{l} v_{x_n}^l + a_n^l \geqslant v_{y_n}^l \\ v_{y_n}^l + a_n^l \geqslant v_{x_n}^l \\ u_{x_n} + b_n \geqslant u_{y_n} \\ u_{y_n} + b_n \geqslant u_{x_n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} l = 1, \ldots, p, \\ x, y \text{ — граничные вершины ребра } u, \end{array}$$

2) для всех вершин графа

$$w - \sum_{l=1}^{p} v_j^l + u_j \leqslant c_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Расслоим граф на $p+1$ (p видов сырья, один граф на готовую продукцию). Выберем какой-либо пункт как пункт переработки сырья. Назовем его *нулевым* пунктом. В p графах, где заданы пункты производства сырья, этот пункт будет пунктом потребления, в $p+1$-м графе он будет пунктом производства, а пункты потребления готовой продукции заданы. Построим начальные оптимальные базисные планы на $p+1$ графах. Будем определять общую систему потенциалов задачи для данного пункта переработки. Положим во всех $p+1$-м графах потенциал нулевого пункта равным 0. Будем строить потенциалы v_i^l ($l = 1, \ldots, p$, $i = 1, \ldots, n$) так, что если идет перевозка из i в j, то

$$v_j^l = a_{ij}^l + v_i^l.$$

У вершин, не входящих в план перевозок, определим потенциалы по алгоритму Минти.

Для того чтобы план был оптимальным, необходимо и достаточно выполнение условий теоремы. Пусть в какой-то вершине i_0 нарушается условие 2, причем для всех ребер всех графов условие 1 выполнено. Тогда в пункте i нужно вести переработку. В случае, когда на всех графах вершина i_0 связана с нулевой, переработку в i_0 будем вести за счет нулевого пункта, определив количество перерабатываемой продукции δ как минимальную величину, которая перевозится из i_0 в нулевой пункт в p графах или из нулевого пункта в i_0 в $p+1$-м графе перевозки готовой продукции. Изменим план перевозок, уменьшая потребление в нулевом пункте на δ и увеличивая в пункте i_0 на δ единиц. Граф перевозок в той сети, где достигается минимум, становится несвязным (если минимум достигается на двух или нескольких графах, то на остальных вводим нулевые перевозки). Потенциал вершины i_0 в сети, где достигается минимум, определим из условия, что пункт i_0 стал пунктом переработки:

$$\sum_{l=1}^{p} v_{i_0}^{l} - u_{i_0} + c_{i_0} = w.$$

Зная потенциалы вершин i_0 и нулевой, определим потенциалы вершин, входящих в план перевозок, по известному правилу, а потенциалы оставшихся вершин — по алгоритму Минти. В остальных графах потенциалы не изменяются, так как мы не меняем скелета перевозок. Таким образом, введя новый пункт переработки i_0, мы устраним нарушение второго условия теоремы. Пусть теперь вершина i_0, где нарушается второе условие, не связана с нулевой. Предположим, что уже имеются k пунктов переработки. Нужно ввести $k+1$-й пункт i_0. Поскольку имеется k пунктов переработки, то в графах будет $k+p$ компонент связности. Действительно, в начальном плане имеем один пункт переработки, $p+1$ компонент связности, т. е. разрывов связности ни в одном из графов нет. С введением каждого нового пункта по построению алгоритма добавляется один разрыв, а следовательно, и одна компонента связности. Обозначим множество пунктов переработки через

$$I : I = \{i_1, \ldots, i_k, i_0\}.$$

Пусть для каждого $l = 1, 2, \ldots, p+1$ количество компонент связности всего графа равно k_l. Тогда можно записать

$$I = I_1^l \cup I_2^l \cup \ldots \cup I_{k_l}^l,$$

причем

$$\sum_{l=1}^{p+1} k_l = k + p.$$

Каждая компонента связности содержит по крайней мере один пункт переработки. Вершина i_0 связана в каждом графе с одной из компонент связности.

Пусть ε_i — величина, на которую изменится количество перерабатываемой продукции в пункте i в результате введения пункта i_0.

Составим систему уравнений

$$\sum_{i \in I_j^l} \varepsilon_i = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k_l,$$

$$\sum_{i \in I} \varepsilon_i = 0.$$

Число уравнений в системе $1+\sum_{l=1}^{p+1} k_l = k+p+1$. Число неизвестных равно $k+1$.

Первые суммы связывают пункты производства каждой из k_l компонент l-го графа, но так как система включает еще условие $\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i = 0$, то из k_l уравнений независимыми могут быть лишь $k_l - 1$. Все они будут независимыми, так как каждый пункт входит лишь в одну компоненту связности. Общее число независимых уравнений не превосходит $1+\sum_{l=1}^{p+1}(k_l-1)=k$. Покажем, что их будет ровно k.

Компоненты связности, которым отвечают эти k уравнений, могут отвечать лишь графам с разрывами, так как у связного графа одна компонента связности, и уравнение, отвечающее ей, совпадает с последним уравнением системы. Мы его исключили из рассмотрения. Пусть число независимых уравнений меньше k. Значит, зависимыми могут быть уравнения, отвечающие компонентам связности разных графов, а это может быть лишь в том случае, когда компоненты связности разных графов содержат одни и те же пункты переработки. Но в таком случае план будет небазисным, так как на один пункт переработки будет приходиться два разрыва, а мы исходим при построении потенциалов из базисного плана. Нельзя однозначно определить потенциалы.

Таким образом, в данной системе уравнений число независимых уравнений равно k, число неизвестных величин — $k+1$. Одну неизвестную можем брать произвольно, остальные выражаются через нее.

Полагая ε_{k+1} равным минимальной величине, на которую можно изменить количество перерабатываемой продукции, не меняя скелета перевозок, найдем все ε_i $(i=1,\ldots,k)$ и изменим план. Потенциал вершины i_0 в графе, где достигался минимум, получим из условия безубыточности переработки

$$\sum_l v_{i_0}^l - u_{i_0} + c_{i_0} = w,$$

остальные пересчитаем так же, как и в предыдущем случае.

При введении нового пункта переработки i_0 потенциалы, полученные из условия безубыточности переработки, могут не удовлетворять первому условию теоремы. Пусть на ребрах $u_1, \ldots, u_k$ нарушается первое условие. Положим

$$z_k = v^l_{y_{u_n}} - a^l_n - v^l_{x_{u_n}}.$$

Пусть

$$\max_{u_k} z_k = z_0$$

достигается на ребре u. Введем ребро u в граф перевозок. Будем перевозить по нему δ единиц продукции — минимальное количество, которое можно ввезти еще в i_0, не меняя скелетов перевозок на остальных графах. Там, где достигается минимум, соответствующий граф перевозок разорвется, и потенциал $v_{i_0}^l$ определится из условия

$$w = \sum_l v_{i_0}^l - u_{i_0} + c_{i_0}.$$

Определив все потенциалы, вновь проверяем 1-е условие теоремы. В случае, если оно вновь нарушается, ищем новые z_0 и $\tilde{u}$ и опять увеличиваем переработку в i_0.

Замечание. Если на каком-то шаге минимальное количество, которое можно перевезти из нулевого пункта в i_0, равно количеству перерабатываемого сырья в нулевом пункте, то после изменения плана нулевой пункт перестает быть пунктом переработки. В этом случае считаем нулевым пунктом i_0, полагаем потенциал его во всех сетях равным нулю, а остальные потенциалы пересчитываем.

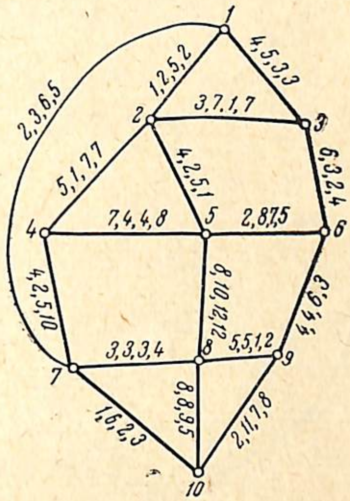

Рис. 5. Исходный граф

В случае, если нарушается первое условие теоремы на ребрах и пункт i_0 не связан с нулевым, дело вновь сводится к решению системы уравнений.

Пусть имеется $k+1$ пункт переработки. Пусть $z_0 = \max\limits_{u_j} z_j$ достигается на $\tilde{u}$. Введем $\tilde{u}$ в скелет перевозок.

Нам нужно увеличить переработку в $(k+1)$-м пункте (в пункте i_0) за счет изменения количества перерабатываемой продукции в других пунктах переработки. Ребро $\tilde{u}$ соединит две компоненты связности, ибо нарушение условий теоремы может произойти лишь тогда, когда вершины принадлежат различным компонентам. Тем самым число компонент связности уменьшится на единицу, их станет $k+p$.

Система уравнений

$$\sum_{I_j^l} \varepsilon_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, k_l; \; l = 1, \ldots p$$

имеет ровно k независимых уравнений, $k+1$ переменную.

Полагая ε_{k+1} равной минимальной величине, на которую можно увеличить переработку в u_0, не меняя скелетов перевозок на других графах, выразим остальные ε_i через ε_{k+1} и, изменив план, пересчитаем потенциалы.

Таблица 1

№ вершин	Количество производимого сырья			Количество готовой продукции, требуемой в вершинах	Стоимость переработки единицы продукции	№ вершин	Количество производимого сырья			Количество готовой продукции, требуемой в вершинах	Стоимость переработки единицы продукции
	$l=1$	$l=2$	$l=3$				$l=1$	$l=2$	$l=3$		
1	10			5	7	6				1	11
2			15	3	3	7		16			5
3			10	4	6	8					8
4				2	4	9		14	3		6
5	3		2	4	12	10	17			11	9

То, что алгоритм закончится за конечное число шагов, следует из тех же соображений, которые используются в методе потенциалов для обычной транспортной задачи.

Приведем пример.

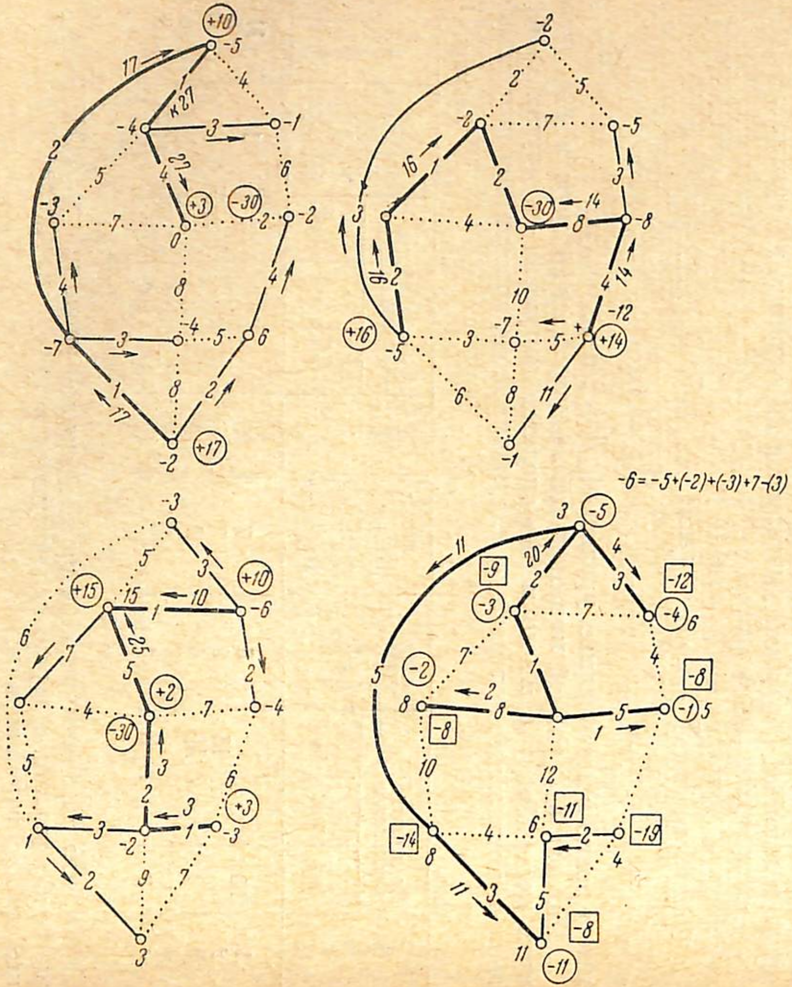

Рис. 6. Первая итерация

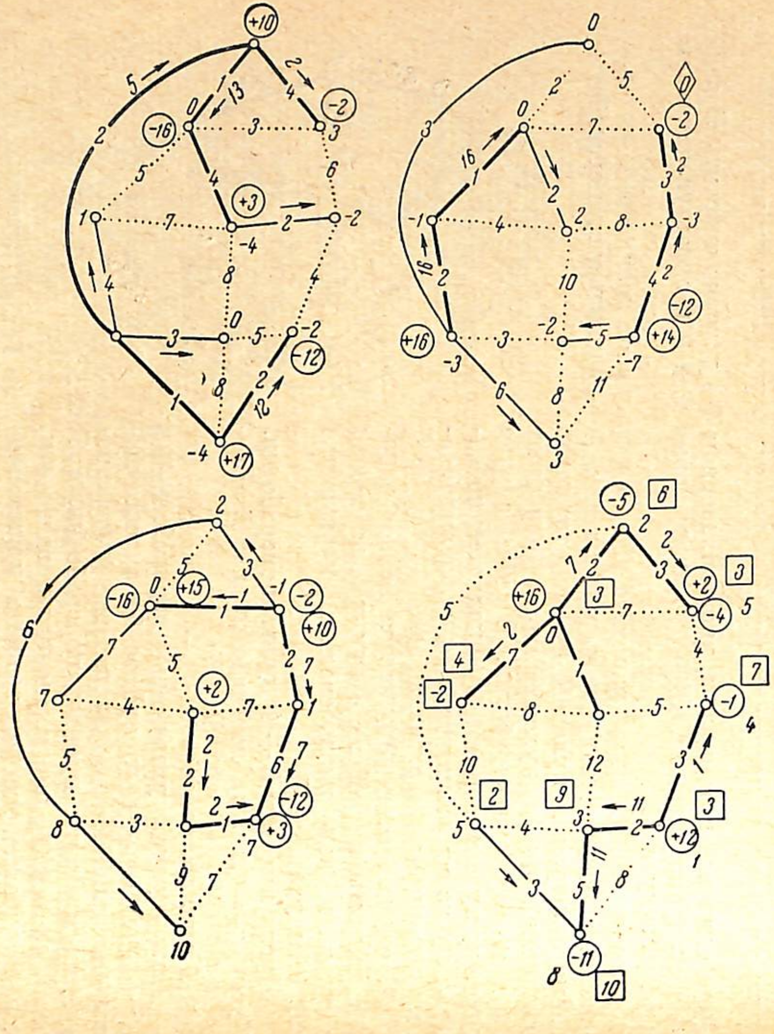

Рис. 7. Четырнадцатая итерация

Дан связный неориентированный граф, имеющий 10 вершин, 17 ребер. На каждом ребре заданы стоимости перевозок единиц сырья каждого из трех видов, а также стоимости перевозки единицы готовой продукции по этому ребру (рис. 5).

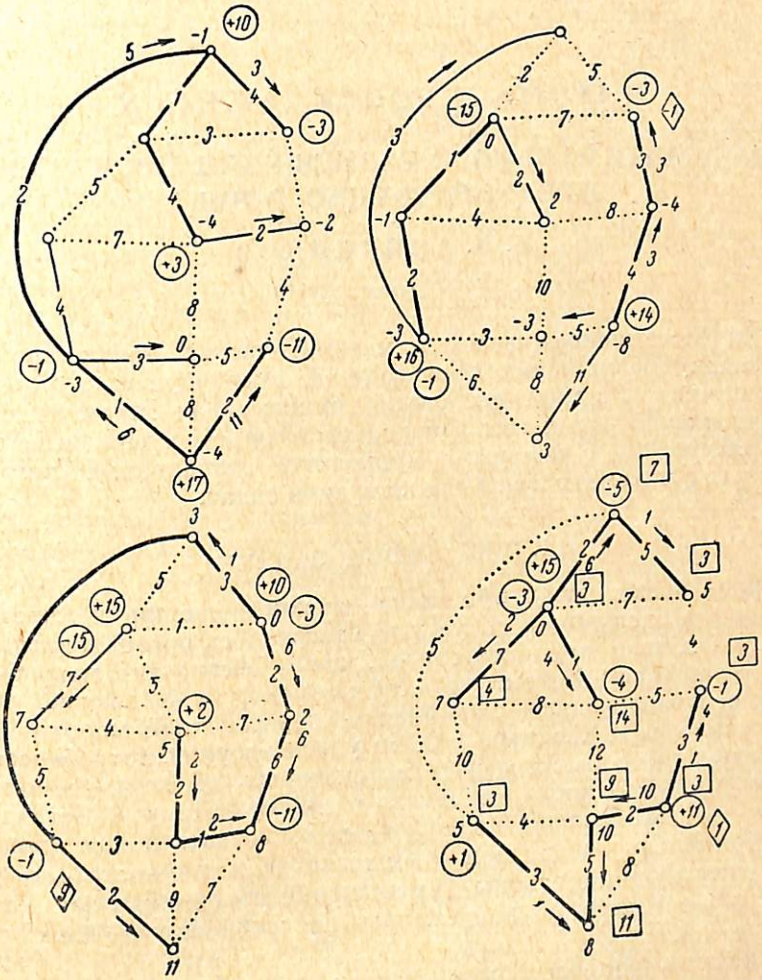

Рис. 8. Оптимальный план

Заданные величины даются в табл. 1.

Если за нулевой пункт выбрать пятую вершину, то оптимальный план получаем на пятнадцатом шаге (рис. 6—8).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Михалевич, Н. З. Шор, А. А. Бакаев, С. Б. Брановицкая. Алгоритм и опыт решения сетевых транспортных задач. В сб. Математические методы и проблемы размещения производства. М., Экономиздат, 1963.

2. Л. М. Дудкин, Т. А. Косенко, М. Х. Юсупов. Размещение, специализация и кооперирование промышленного производства как задачи оптимального программирования. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 2. М., Соцэкгиз, 1961.

Поступила в редакцию
3 IV 1965