

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА
ПРОДУКЦИИ ОДНОГО ВИДА

Б. И. АЛЕЙНИКОВ

(Москва)

Рассмотрим с экономической и математической точек зрения одну частную задачу размещения производства, являющуюся в определенном смысле типичной для многочисленной группы задач оптимального размещения производительных сил в народном хозяйстве. Покажем те характерные особенности, с которыми приходится сталкиваться при решении этих трудных с математической точки зрения задач.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Некоторое время назад при практическом решении конкретного вопроса возникла следующая ситуация. Требовалось организовать молочное производство вблизи крупного города, чтобы обеспечить потребности его населения в цельном молоке. К этому моменту уже имелось несколько молочных совхозов-заводов с первичной переработкой молока (пастеризация, розлив и т. п.), однако они не удовлетворяли потребности города, поэтому необходимо было создать в некоторых из заранее намеченных возможных пунктов новые молочные хозяйства. Причем оставались открытыми вопросы: в каких именно пунктах создать новые производства, каковы должны быть масштабы этих хозяйств, должны ли быть расширены уже существующие заводы (уменьшение объема или закрытие существующих производств не допускалось из соображений занятости рабочей силы) и т. д.

Решение этих вопросов было связано с необходимостью произвести определенные затраты на капитальное строительство и в дальнейшем нести затраты на поддержание производства в заданном объеме (текущие затраты). Как те, так и другие затраты, естественно, зависели в каждом возможном пункте производства от самого пункта (наличие водных и топливных ресурсов, рабочей силы и т. п.) и от предполагаемого объема производства в этом пункте (объемы производства, как уже говорилось, заранее неизвестны). Продукция молочных заводов должна была доставляться при помощи специализированного автомобильного транспорта по определенным маршрутам в городские магазины. Сеть магазинов уже существовала к данному моменту, и предполагалось, что в течение некоторого периода она не будет меняться. Таким образом, транспортные издержки также непосредственно зависели от выбора местоположения и объема производства заводов-производителей.

Возможны различные варианты решения поставленной задачи. Каждый такой вариант размещения молокозаводов связан с различной суммой затрат. Естественно считать наилучшим то решение, которое было бы

«дешевле» любого другого. При этом, конечно, потребности в продукте должны безусловно покрываться. Мы говорили выше о потребности населения в молоке, однако можно свести ее к более конкретным потребностям молочных магазинов, обслуживающих определенные городские районы. Эти потребности предполагаются известными для каждого магазина, и поэтому в конечном счете можно рассматривать систему, включающую заводы-производители, магазины-потребители и автотранспорт. Такова была конкретная задача.

Сформулируем эту задачу в более общем виде.

Предварительно условимся о некоторых сокращениях. Будем называть все потенциально возможные пункты производства, независимо от того, будет ли в действительности производство существовать в них, «пунктами производства» или «производителями» (так же будем называть и существующие предприятия). Получателей продукции будем называть «потребителями», независимо от того, потребляют ли они в действительности продукцию или служат лишь для ее дальнейшего распределения.

Под термином «задача оптимального размещения производства продукции одного вида» будем всюду в дальнейшем понимать следующую проблему. Требуется обеспечить всех заданных потребителей определенным продуктом

путем организации его производства в существующих и (или) специально создаваемых пунктах производства. При этом необходимо так назначить объемы производства для каждого производителя, чтобы минимизировать суммарные производственные расходы, исчисляемые с учетом зависимости себестоимости единицы продукции от объема производства, причем в себестоимость включаются приведенные капитальные затраты. В тех случаях, когда транспортные издержки играют заметную роль в общей сумме расходов, необходимо минимизировать в совокупности производственные расходы и затраты по доставке готовой продукции потребителям, или по доставке сырья от источников сырья к производителям, или те и другие вместе.

Особо подчеркнем то обстоятельство, что производственные расходы (иначе — стоимость производства) берутся как некоторая функция от объема производства для каждого производителя. Как известно, почти во всех случаях чем крупнее предприятие, тем ниже затраты на производство единицы продукции. Крупные предприятия имеют ряд экономических преимуществ перед мелкими и средними, состоящих в том, что на них меньше удельный вес административно-управленческих и прочих накладных расходов на единицу продукции, имеются большие возможности для применения передовой технологии, лучше организация труда и т. д. Поэтому не учитывать эту зависимость при постановке задачи размещения — значит сильно упрощать и огрублять действительное положение вещей, хотя такое упрощение значительно снизило бы трудность решения задачи. Примерный вид такой зависимости изображен на рис. 1.

Однако из существования такого рода зависимостей еще нельзя сделать вывод, что при всех обстоятельствах, всегда и везде крупные предприятия эффективнее мелких и средних. Превосходство крупного производства над мелким выступает лишь при прочих равных условиях. Дело в том, что при увеличении масштаба предприятия наряду с ростом положительных признаков происходит одновременно рост удельных транспортных расходов, связанных со сбытом продукции и доставкой сырья.

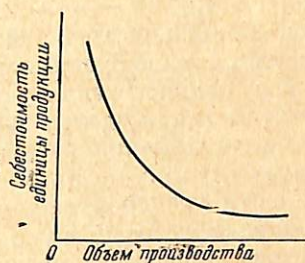


Рис. 1

Это объясняется тем, что крупное предприятие обслуживает более крупный район, потребители, как правило, расположены в среднем дальше от такого завода; вследствие этого доставка единицы продукции обходится дороже. Совершенно аналогичное рассуждение применимо к доставке сырья на предприятия-производители. Поэтому введение в математическую модель величин транспортных затрат позволяет более точно и детально поставить и решить задачу размещения. Вопрос о том, какие именно транспортные затраты (доставка продукции потребителям или сырья производителям) должны учитываться, решается в каждом конкретном случае. Так как в действительности часто предприятия одних отраслей промышленности тяготеют к потребителю (хлебопекарная, текстильная и др.), а других — к сырью (рыбная, сахарная и др.), то в таких случаях ясно, какой вид транспортных издержек должен учитываться. В некоторых случаях необходимо рассматривать оба вида затрат.

Как количественно учитываются транспортные расходы? В настоящее время во всех моделях задачи размещения принято считать транспортные издержки *линейно* растущими с ростом объема перевозок. Конечно, во многих случаях на практике дело обстоит сложнее. Однако гипотеза о линейности транспортных расходов в применении к задачам размещения разбираемого нами вида (так же как и в транспортной задаче линейного программирования) позволяет с достаточной точностью получать удовлетворительные решения. В этой связи уместно сказать вообще о той степени достоверности, которую дают математические несколько «идеализированные» схемы и модели реальных задач. Конечно, любая модель лишь приближенно отражает действительность. Чем полнее мы стараемся учесть все многообразие признаков, тем ближе математическая постановка задачи к истине, и вместе с тем модель при этом становится сложнее, решение задачи становится все более трудным. Иногда чисто математические трудности диктуют необходимость упрощать модель, оставлять только самые важные и характерные черты реальной задачи. Так, всюду в дальнейшем изложении будем рассматривать задачу размещения производства каких-либо продуктов вне связи с остальной экономикой, так сказать в локальном виде, полагая, что внешние «внемодельные» связи мало существенны. Во многих случаях такой подход оправдан.

Построим теперь математическую модель задачи размещения. Будем пользоваться терминологией и обозначениями, применяемыми в работе [4]. Сначала разберем случай, когда учитывается лишь один вид транспортных издержек — по доставке продукции потребителям.

Итак, имеются: n пунктов производства ($i = 1, 2, \dots, n$); m потребителей ($j = 1, 2, \dots, m$). Искомые неизвестные: x_i — объем производства в i -м пункте производства; x_{ij} — объем перевозки готовой продукции от i -го производителя к j -му потребителю.

Известные величины:

B_j — величина потребности j -го потребителя; потребности B_j должны безусловно полностью удовлетворяться при любом варианте размещения производства;

$g_i(x_i)$ — функциональная зависимость себестоимости производства одной натуральной единицы продукции от объема производства в i -м пункте производства (так как мы условились затраты по доставке сырья явно не учитывать, то эти затраты надо отнести к себестоимости продукции);

a_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции от i -го производителя к j -му потребителю;

x_i' и x_i'' — соответственно минимальный и максимальный объемы производства для i -го производителя; назначение величин x_i' и x_i'' обусловлено наличием каких-либо «внемодельных» обязательных ограничений для

некоторых производителей; так, например, для уже существующих предприятий $x_i' > 0$ равны наибольшему объему производства на уже имеющемся оборудовании; если такое предприятие в силу каких-то соображений нельзя расширять, то $x_i' = x_i''$; для новых, еще не существующих предприятий, если нет никаких таких ограничений, принимают $x_i' = 0$,

$x_i'' = \sum_{j=1}^m B_j$, т. е. суммарной потребности всех потребителей; если обязательные ограничения имеются, то в самом общем случае $0 \leq x_i' \leq x_i'' \leq \sum_{j=1}^m B_j$;

$U_i(x_i - x_i^0)$ — удельные капитальные затраты для i -го производителя, зависящие от величины расширения производства сверх существующего; для существующих предприятий $x_i^0 = x_i'$, для новых — $x_i^0 = 0$;

E — коэффициент эффективности капитальных вложений.

В соответствии с содержанием задачи должны соблюдаться следующие соотношения:

1) неотрицательность перевозок для всех i и j

$$x_{ij} \geq 0; \quad (1)$$

2) баланс производства и распределения продукции для каждого производителя

$$x_i = \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

т. е. вся произведенная продукция должна вывозиться;

3) объемы производства должны удовлетворять обязательным ограничениям

$$x_i' \leq x_i \leq x_i''; \quad (3)$$

4) баланс привозимой и потребляемой продукции для каждого потребителя

$$B_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (4)$$

5) общий контрольный баланс производства и потребления продукции (это условие вытекает из предыдущих)

$$\sum_{j=1}^m B_j = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (5)$$

При условиях (1) — (5) требуется так выбрать значения всех величин x_i и x_{ij} , чтобы минимизировать общую величину эксплуатационных и капитальных затрат с учетом эффективности последних, т. е. минимизировать следующую функцию от многих переменных:

$$\Phi\{\bar{x}_{ij}\} = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)x_i + \sum_{i=1}^n E U_i(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}x_{ij}. \quad (6)$$

Мы здесь обозначили минимизируемую функцию $\Phi\{\bar{x}_{ij}\}$, указав явно зависимость лишь от переменных $\bar{x}_{ij} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}, x_{21}, \dots, x_{nm})$, так как в силу (2) переменные x_i выражаются через них.

Появление в оптимальном плане (т. е. в решении задачи) некоторых значений $x_i = 0$ и $x_{ij} = 0$ означает, естественно, нецелесообразность создания этих i -х производителей или организации соответствующих перевозок.

Возможны разнообразные усложнения сформулированной выше задачи. Например: 1) учитываются также затраты по доставке сырья; 2) требуется решить задачу размещения производства более чем одного вида продукции (так называемая «многопродуктовая задача»); 3) предприятия должны строиться по определенным типоразмерам, т. е. величины x_i , кроме удовлетворения условий (3), должны еще принимать лишь конечное число значений (а не любые) между x_i' и x_i'' , и т. д. Приведем, к примеру, формулировку задачи с учетом также затрат по доставке сырья в пункты производства, если для производства данной продукции требуется только один вид сырья. Понадобятся дополнительно следующие обозначения: x_{ri} — неизвестные объемы перевозок сырья из r -го источника ($r = 1, 2, \dots, p$) к i -му производителю; Q_r — ресурсы сырья в r -м источнике сырья; a_{ri} — затраты на перевозку единицы сырья из r -го источника к i -му производителю; l_i — норма расхода сырья на единицу готовой продукции для i -го производителя. Все прежние обозначения сохраняют смысл за исключением величин себестоимости $g_i(x_i)$, в которые теперь не входят транспортные затраты. Тогда к условиям (1) — (5) надо добавить еще:

6) баланс сырья и его распределения по каждому источнику сырья

$$Q_r = \sum_{i=1}^n x_{ri}, \quad r = 1, 2, \dots, p; \quad (7)$$

7) баланс привоза и переработки сырья по каждому производителю

$$\sum_{r=1}^p x_{ri} = l_i x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (8)$$

8) общий контрольный баланс ресурсов сырья и его переработки (это условие является следствием предыдущих)

$$\sum_{r=1}^p Q_r = \sum_{i=1}^n l_i x_i. \quad (9)$$

При условиях (1) — (5), (7) — (9) требуется найти минимум функции

$$\begin{aligned} \Phi_1 \{ \bar{x}_{ij}, \bar{x}_{ri} \} &= \sum_{r=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ri} x_{ri} + \sum_{i=1}^n g_i(x_i) x_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n EU_i(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_{ij}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если бы мы поставили целью выписать соответствующую математическую модель для того случая, когда величины x_i принимают по условию лишь конечное число значений $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{is_i}$, то для задачи (1) — (5), например, пришлось бы условия (2) и (5) переписать в виде

$$x_i \geq \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad (2')$$

$$\sum_{j=1}^m B_j \leq \sum_{i=1}^n x_i, \quad (5')$$

потому что в этом случае мыслимо такое положение, что не вся произведенная продукция нужна для удовлетворения потребителей (в пределах данной модели).

Мы не ставили здесь себе целью составить математические формулировки для различных разновидностей задач размещения производства. Разберем лишь на примере самой простой задачи (1) — (5), характерные особенности задач размещения.

2. ОБСУЖДЕНИЕ

Прежде всего заметим, что можно упростить запись минимизируемой функции $\Phi \{\bar{x}_{ij}\}$, если включить при помощи коэффициента эффективности удельные капитальные затраты в величину себестоимости производства единицы продукции. Действительно, функции $U_i(x_i - x_i^0)$ ведут себя вполне аналогично функциям $g_i(x_i)$ (рис. 1). Схоже ведут себя и произведения $g_i(x_i)x_i$ и $EU_i(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)$.

Поэтому, обозначив через $G_i(x_i)$ стоимость производства единицы продукции с учетом эффективности капитальных вложений, перепишем

$$\Phi \{\bar{x}_{ij}\} = \sum_{i=1}^n G_i(x_i)x_i + \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} = \sum_i f_i(x_i) + \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij}. \quad (11)$$

Здесь символ $\sum_{i,j}$ означает двойное суммирование $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m$, а функции $f_i(x_i) = G_i(x_i)x_i$ представляют собой стоимость производства продукции в i -м пункте производства в количестве x_i (с учетом эффективности капитальных вложений). Легко понять, что если функции $G_i(x_i)$ ведут себя как на рис. 1, то $f_i(x_i)$ будут выглядеть, как на рис. 2. Именно с функциями $f_i(x_i)$ приходится в конечном счете иметь дело при решении задач размещения производства. Функции $f_i(x_i)$, вообще говоря, различны для однородных предприятий с различной технологией или технической оснащенностью. Для новых проектируемых предприятий естественно брать за основу одинаковые технологические процессы и технический уровень; тогда для них функции $f_i(x_i)$ тоже будут одинаковы при прочих равных условиях. Часто функции $f_i(x_i)$ задаются в виде кусочно-линейных функций (рис. 3) либо в виде разрывных функций (рис. 4), определяемых соотношениями

$$f_i(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i = 0, \\ c_i x_i + d_i, & \text{если } x_i > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что несмотря на такой «линейный» вид, функция (12) является с точки зрения математического анализа весьма «кривой» функцией (линейной она была бы, если бы определялась так: $f_i(x_i) = c_i x_i + d_i$ при $x_i \geq 0$). Случай задания функций стоимости в виде (12) особенно важен, так как часто встречается при реальных постановках задач. Такой вид $f_i(x_i)$ позволяет дать следующую экономическую интерпретацию: производственные затраты разбиваются на две части — одну постоянную, не зависящую от объема производства, и другую, линейно растущую с ростом объема производства. Функции, изображенные на рис. 2—4, обладают одним общим свойством: все они *выпуклы вверх*, т. е. для любой пары значений $x = x_1$ и $x = x_2$ из области определения этих функций выполняется нестрогое неравенство

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (13)$$

Поэтому таким же свойством обладает сумма $\sum_i f_i(x_i)$, входящая в ми-

минимизируемый функционал $\Phi\{\bar{x}_{ij}\}$ *. Так как второе слагаемое функционала (11) — $\sum_{i,j} a_{ij}x_{ij}$ — линейно, то $\Phi\{\bar{x}_{ij}\}$ является выпуклым вверх функционалом. Для него также справедливо неравенство вида (13). Если бы неравенство (13) имело обратный смысл, т. е. вместо знака $\geq$ стоял

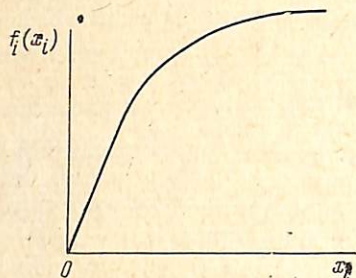


Рис. 2

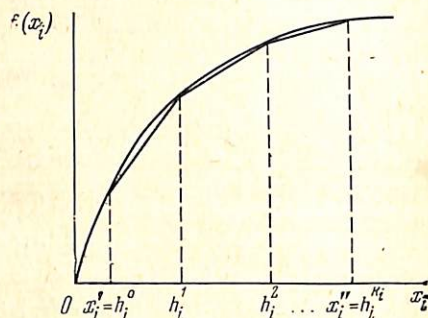


Рис. 3

знак $\leq$, мы имели бы выпуклый вниз функционал; в случае превращения неравенства (13) в строгое равенство функционал называется линейным.

Таким образом, задача состоит в отыскании минимума выпуклого вверх функционала (11) при линейных ограничениях (1) — (5).

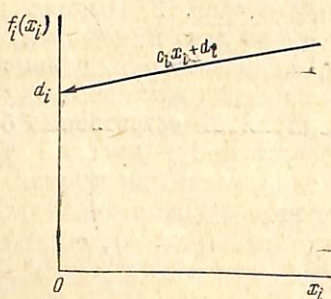


Рис. 4

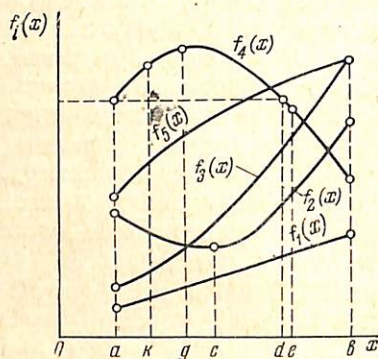


Рис. 5

Очень многие задачи размещения производства характеризуются тем, что их минимизируемые функционалы выпуклы вверх. Этим такие задачи резко отличаются от задач линейного программирования, где функционалы линейны **, и от задач так называемого «выпуклого программирования», где минимизируемые функционалы выпуклы вниз. Глубокое различие состоит в том, что выпуклый вверх функционал на выпуклом замкнутом множестве ** имеет, вообще говоря, много так называемых «локальных минимумов». Так называют точку множества, для которой выполняется следующее условие: существует некоторая окрестность этой точки, принадлежащая множеству определения функционала, и такая, что значение функционала в этой точке не превосходит значений функционала во всех точках этой окрестности. Нас не интересует величина такой окрестности, она может быть достаточно малой. Важно лишь, чтобы значение функционала в точке локального минимума было меньше (или по крайней мере не больше) значений его во всех

* Функции вида (6), (10), (11) иногда называют также функционалами.

** Мы предполагаем, что читателю известны важнейшие понятия математического программирования (хотя бы из консультаций в предыдущих номерах журнала).

соседних точках. Все такие соседние точки и составляют вышеупомянутую окрестность. Если выбрать из всех значений функционала в точках локальных минимумов самое меньшее значение, то это значение определит минимум функционала на всем множестве. Соответствующая точка называется «глобальным минимумом». Линейные и выпуклые вниз функционалы на выпуклом замкнутом множестве имеют либо только один локальный минимум*, который естественно является глобальным, либо бесконечное число минимумов, но таких, что значения функционала во всех этих точках оказываются равными между собой. Поэтому говорят, что и в таком случае линейный или выпуклый вниз функционал имеет один минимум «с точностью до однозначности». Это свойство удобно проиллюстрировать на примере простейшего случая — функции одной переменной. На рис. 5 изображены такие

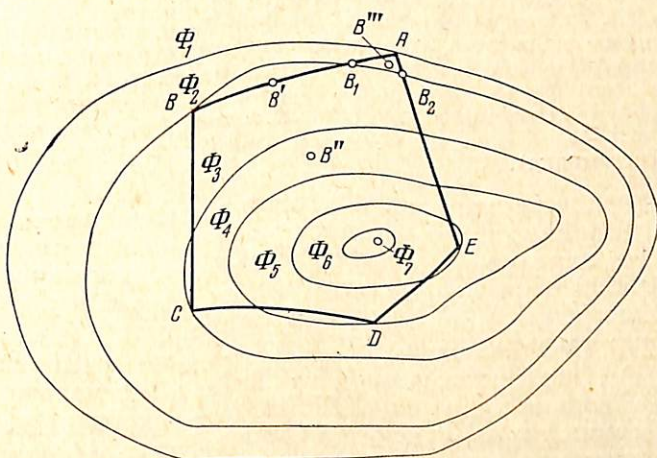


Рис. 6

функции, определенные на множестве $a \leq x \leq b$. Причем $f_1(x)$ линейная, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ выпуклы вниз, $f_4(x)$ и $f_5(x)$ выпуклы вверх. Линейная функция $f_1(x)$ в случае единственности минимума достигает своего минимума всегда в крайней точке множества* (на рис. 5 это точка $x = a$). Если бы линейная функция $f_1(x)$ была постоянной $f_1(x) = A = \text{const}$, то ее график изображался бы горизонтальной прямой, параллельной оси x . В этом случае минимум достигался бы в каждой точке множества $a \leq x \leq b$, но во всех этих точках значения функции, понятно, одни и те же: $f_1(x) = A$. Все такие точки «равноправны», любую из них можно считать точкой минимума. Этот пример поясняет природу возможной неоднозначности минимума для линейных функционалов.

Все сказанное относится также к выпуклым вниз функциям, однако точка их минимума, даже в случае его единственности, может лежать как на краю множества (для $f_3(x)$ точка $x = a$), так и не на краю (для $f_2(x)$ точка $x = c$). Однако для выпуклой вверх функции $f_4(x)$ существуют два локальных минимума, лежащих всегда на краях: $x = a$ и $x = b$. Для $x = a$ упомянутой окрестностью является, например, множество $a \leq x \leq d$ ($f_4(a) \leq f_4(k)$, если $a \leq k \leq d$). Однако для точки $x = e$, не лежащей в этой окрестности, $f_4(a) > f_4(l)$. Глобальным минимумом для $f_4(x)$ будет $x = b$, так как $f_4(b) < f_4(a)$. Пример функции $f_5(x)$ показывает, что иногда может существовать только один локальный минимум.

Для задачи поиска максимума выпуклая вниз функция $f_2(x)$ будет иметь локальные максимумы $x = a$ и $x = b$, также лежащие на краю множества. Поэтому простая замена знака функционала (замена задачи минимизации задачей максимизации) не дает, конечно, никакого облегчения, так как при этом смысл неравенства (13) переменится на обратный, т. е. функционал превратится в выпуклый вниз. Самым важным является то, что свойство иметь локальные минимумы (свойство «многоэкстремальности») сохраняется при любой размерности переменной $\vec{x}$ (здесь $\vec{x}$ понимается уже как вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_t)$, где t — размерность; для функционала (11) $t = n \times m$).

* См. сноску ** на стр. 278.

На рис. 6 изображены линии уровня выпуклой вверх функции двух переменных $\Phi(x_1, x_2)$, т. е. некоторой поверхности, которая возвышается над плоскостью чертежа наподобие вершины холма. Значение функции $\Phi(x_1, x_2)$ на каждой i -й линии уровня постоянно, обозначим его Φ_i . При этом $\Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3 < \Phi_4 < \Phi_5 < \Phi_6 < \Phi_7$. Выпуклый многоугольник $ABCDE$ представляет собой замкнутое выпуклое множество. Из чертежа видно, что локальные минимумы существуют в каждой вершине многоугольника. Так, для вершины B соответствующей окрестностью является фигура $BCDEB_1$, ограниченная частью границы многоугольника и частью линии уровня Φ_2 . Для любой граничной B' или внутренней B'' точки этой фигуры $\Phi(B) = \Phi_2 \leq \Phi(B')$ и $\Phi(B) < \Phi(B'')$. Однако для любой точки B'' многоугольника, лежащей вне линии Φ_2 , $\Phi(B) > \Phi(B'')$. Глобальным минимумом, очевидно, является вершина A со значением $\Phi(A) = \Phi_1$.

Для выпуклых вверх функционалов при линейных ограничениях, образующих выпуклое замкнутое множество, т. е. выпуклый многогранник, легко доказать, что локальные минимумы могут достигаться только в вершинах этого многогранника. Доказательство этого факта совершенно аналогично соответствующему доказательству из линейного программирования (там доказывалось, что с точностью до однозначности решения единственный минимум линейного функционала достигается в вершине многогранника).

Основная трудность для решения задач размещения — их многоэкстремальность. Дело в том, что здесь нельзя применить те методы последовательного поиска минимума, которые разработаны для линейного и выпуклого программирования. Сущность этих методов заключается в том, что исследуется поведение минимизируемой функции в малой окрестности исходной точки; такое локальное исследование позволяет найти не слишком удаленную точку, в которой значение функции меньше, чем в исходной точке. Найденная таким образом точка — исходная для следующего шага и т. д. Таким образом, переходя от одного значения функционала к меньшему, можно достичь локального минимума за конечное число шагов. Так как локальный минимум единственный, то он является решением задачи. В применении к многоэкстремальной задаче любой такой метод приведет лишь в один из многих локальных минимумов. Множество точек, исходя из которых мы придем при помощи метода последовательного улучшения плана в данный локальный минимум, образует «область притяжения» этого локального минимума. На рис. 5 для $f_4(x)$ существуют локальные минимумы $x = a$ и $x = b$. Область притяжения первого — все точки x : $a \leq x \leq g$, для второго $g \leq x \leq b$. Все множество, на котором ищется решение многоэкстремальной задачи, распадается таким образом на области притяжения отдельных локальных минимумов. Единственный метод, приводящий к точному решению для *любой* выпуклой вверх функции, — это перебор всех вершин многогранника. Однако для реальных задач число вершин столь велико, что полный перебор их совершенно невозможен. Естественно поэтому искать приближенные методы для решения задач размещения производства.

3. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Наиболее распространенные в настоящее время методы решения задач размещения основываются на линеаризации функций $f_i(x_i)$, т. е. на замене их кусочно-линейными функциями, если они сразу не были заданы в виде кусочно-линейных. После этого задача размещения может быть сведена к серии задач линейного программирования. Посмотрим сначала, во что превратится задача (1) — (5), (11), если все $f_i(x_i)$ имеют линейный вид:

$$f_i(x_i) = c_i x_i + d_i, \quad x_i \geq 0. \quad (14)$$

Тогда

$$\Phi\{\bar{x}_{ij}\} = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} + \sum_i c_i x_i + \sum_i d_i = \sum_{i,j} q_{ij} x_{ij} + t, \quad (11')$$

где

$$q_{ij} = a_{ij} + c_i; \quad t = \sum_i d_i.$$

Решение линейной задачи (1)–(5), (11') будет более или менее простым в зависимости от того, какие конкретные значения принимают x_i' и x_i'' из (3). Самый простой случай, когда все $x_i' = 0$ и $x_i'' = \sum_j B_j$. Тогда решение линейной задачи находится сразу. Каждый j -й потребитель прикрепляется к тому $i(j)$ -му производителю, для которого q_{ij} минимально, т. е. $i(j), j = \min_i q_{ij}$. В других случаях линейная задача тем или иным приемом легко сводится к хорошо изученной транспортной задаче линейного программирования.

Заменим теперь функции $f_i(x_i)$ вписанными в них кусочно-линейными функциями $\bar{f}_i(x_i)$ (рис. 3), а если $f_i(x_i)$ сразу были заданы в виде кусочно-линейных, то такая замена даже не потребуется. Заметим, что функции вида (12) представляют собой частный случай кусочно-линейных с $k_i = 2$, $h_i^0 = h_i^1 = 0$, $h_i^2 = \infty$. Вопрос о выборе числа звеньев ломаной k_i и точек деления $h_i^{s_i}$ ($s_i = 1, 2, \dots, k_i - 1$) решается из соображений требуемой точности решения задачи. Зафиксируем для каждого i интервал $(h_i^{s_i}, h_i^{s_i+1})$ и решим получившуюся линейную задачу, положив в (3) $x_i' = h_i^{s_i}$, $x_i'' = h_i^{s_i+1}$. Пусть для такой задачи $\Phi\{\bar{x}_{ij}\}$ принимает минимальное значение Φ' . Проделаем то же для всевозможных сочетаний интервалов $(h_i^{s_i}, h_i^{s_i+1})$, изменяя каждый раз s_i в пределах $0 \leq s_i \leq k_i - 1$. Каждая k -я линейная задача дает свое минимальное значение $\Phi^{(k)}$. Пусть $\Phi^0 = \min_k \Phi^{(k)}$ и $\{\bar{x}_{ij}^0\}$ — соответствующее этому минимуму решение (оптимальный план). Его можно считать приближенным решением исходной задачи (если $f_i(x_i)$ были сразу заданы в виде кусочно-линейных, то это решение точное). Трудность этого метода состоит в том, что необходимо решать много линейных задач. Их общее число $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n = \prod_{i=1}^n k_i$,

где k_i — число звеньев i -й ломаной. В реальных задачах это число может быть весьма велико даже при небольших k_i . Поэтому необходимо найти такие правила для отбора вариантов, которые бы позволили отказаться от перебора их всех путем отсева без решения заведомо невыгодных вариантов. Число таких отсеянных вариантов может быть весьма существенно. Большинство работ о задачах размещения посвящено в настоящее время как раз нахождению таких правил отсева [2–4]. Заметим, что попутно с решением задачи можно получить оценку точности решения. Для примера приведем здесь одно простейшее правило отсева вариантов, которое вытекает из условия (5). Для каждого набора интервалов $(h_1^{s_1}, h_1^{s_1+1}, h_2^{s_2}, h_2^{s_2+1}), \dots, (h_n^{s_n}, h_n^{s_n+1})$ должно выполняться условие

$$\sum_i h_i^{s_i} \leq \sum_j B_j \leq \sum_i h_i^{s_i+1}, \quad (15)$$

т. е. суммарная потребность всех потребителей должна лежать между наименьшей и наибольшей суммарной производительностью (вспомним, что для фиксированного набора интервалов принималось $x_i' = h_i^{s_i}$, $x_i'' = h_i^{s_i+1}$). Наборы интервалов, не удовлетворяющие неравенствам (15), сразу отбрасываются. Наиболее эффективные правила отсева, конечно, намного сложнее этого простого правила.

Другую группу методов, не связанных с линеаризацией $f_i(x_i)$ и перебором линейных задач, можно условно назвать «методами случайного поиска». Рассмотрим один из них. Найдем случайно какую-либо вершину многогранника, определяемого условиями (1) — (5). Это достигается случайным прикреплением каждого j -го потребителя к какому-нибудь одному i -му производителю. В таком случайном плане будет всего m положительных значений x_{ij} , а остальные $x_{ij} = 0$. Можно проверить, что любой такой план отвечает некоторой вершине многогранника условий*. Пусть этой вершине соответствует значение функционала $\Phi^0 = \Phi\{\bar{x}_{ij}^0\}$. Перекрепляя последовательно по одному потребителю к другим производителям, можно добиться уменьшения значения Φ^0 . Так будем делать до тех пор, пока дальнейшие перекрепления перестанут уменьшать значение функционала. Полученный новый план $\{\bar{x}_{ij}^1\}$ и значение Φ^1 соответствуют локальному минимуму. Геометрически такое перекрепление потребителей соответствует движению из исходной вершины $\{\bar{x}_{ij}^0\}$ по соседним вершинам многогранника в вершину $\{\bar{x}_{ij}^1\}$. Ясно, что мы придем в какой-либо локальный минимум, если исходная вершина принадлежит его области притяжения. (Заметим, что если ограничиться при решении задачи рассмотрением только вершин многогранника, то несколько изменится понятие локального минимума. Локальным минимумом в множестве вершин называется такая вершина, в которой значение минимизируемой функции не превосходит соответствующих значений во всех соседних вершинах. Отсюда вытекает, что точка локального минимума в прежнем понимании может перестать быть таковой в множестве вершин. Так, на рис. 6 в множестве вершин A, B, C, D, E лишь вершина A является единственным локальным (следовательно, глобальным) минимумом, т. е. задача многоэкстремальная как бы превратилась в одноэкстремальную. Конечно, такой эффект для реальных задач будет иметь место очень редко; в общем случае многоэкстремальность останется и в множестве вершин.) Таким образом, вся описанная процедура — как бы спуск в локальный минимум из случайной исходной вершины. Многократно повторим с самого начала такие «случайные бросания» и последующие «спуски». Это можно осуществить при помощи ЭВМ с применением какого-либо датчика случайных чисел. Статистическая обработка полученных результатов позволяет с некоторой вероятностью получить оценку для глобального минимума. Такой оценкой может служить наименьшее из полученных значений локальных минимумов. Чем больше сделано таких случайных бросаний, тем точнее оценка.

Имеется ряд других подходов к решению задач размещения и вообще многоэкстремальных задач. Разработку методов для их решения в настоящее время нельзя считать исчерпанной. Ведутся интенсивные поиски новых методов, пригодных для решения как самых общих, так и специальных задач размещения производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Дудкин, Т. А. Косенко, М. Х. Юсупов. Размещение, специализация и кооперирование промышленного производства как задачи оптимального программирования. В сб. Применение матем. в эконом. исслед., т. 2. М., Соцэкгиз, 1961.
2. Т. Н. Борисова, З. Влашек, В. Г. Карманов, Б. Т. Поляк. Некоторые методы решения задач о размещении. В сб. Вычислительные методы и программирование. М., Изд-во МГУ, 1965.
3. И. В. Гирсанов, Б. Т. Поляк. Математические методы решения задачи о размещении. В сб. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством. М., Изд-во МГУ, 1963.
4. В. П. Черенин. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1962.

Поступила в редакцию
18 X 1965

* См. сноску ** на стр. 278.