

Таблица 3

Интервалы значений величины $a_i$ , %	Соответствующие значения определенного интеграла $P(a_{i1} < a_i < a_{i2}) = \int_{a_{i1}}^{a_{i2}} \frac{da_i}{(0,05a_i^2 + 0,13a_i + 0,29)^3}$	Вероятность попадания значения $a_i$ в данный интервал при случайном испытании, %
0 ÷ 0,5	14,79463	50,94
0 ÷ 1,0	21,88136	75,34
0 ÷ 2,0	26,99820	92,95
0 ÷ 3,0	28,31832	97,50
0 ÷ 4,0	28,76177	99,03
0 ÷ ∞	29,04340	100,00

Применение стабильных нормативных калькуляций дает возможность организовать оценку незавершенного производства предприятий машиностроения на основе уже имеющейся электронно-вычислительной техники. Реализация этой возможности позволит ускорить получение информации для руководства предприятиями и повысить эффективность труда работников аппарата управления.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Бусленко, Ю. Л. Шрейдер. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию  
14 V 1965

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Л. А. БАЗИЛЕВИЧ

(Ленинград)

1. В настоящее время еще не устранен значительный разрыв между теоретической разработкой различных методов оптимального планирования и практическим применением их в производственной деятельности. Во многих случаях это объясняется тем, что теоретическим требованиям постановки задачи не вполне соответствует реальное течение производственных процессов, или тем, что точное математическое описание (моделирование) их затруднено настолько, что при имеющихся технических и вычислительных средствах практически не производится.

В то же время сейчас имеется ряд эффективных и практически широко доступных методов статистико-математического описания сложных взаимосвязей, в частности корреляционные методы анализа. Теоретически они достаточно полно разработаны, и накоплен некоторый опыт их применения для описания производственных процессов с использованием полученных моделей, либо для прогнозирования результатов процесса на основе знания фактических значений факторов, либо для целенаправленного изменения факторов.

Корреляционный подход во многих случаях является единственно возможным для построения модели, использование которой для управления дает удовлетворительные результаты. И это отнюдь не противоречит стремлению к точному математическому описанию потому, что в большинстве случаев связь между результатами производства и его факторами носит статистический характер. Поэтому корреляционный подход позволяет доводить описание процесса до той степени детализации, которая наилучшим образом соответствует требуемой точности, оперативности и наличным вычислительным средствам.

Большие возможности открывает применение корреляционных методов в сочетании с методами оптимального программирования. Попытке соединения этих методов в одном исследовании и посвящена настоящая работа. Рассмотрим вопрос сначала в общем виде, а затем на конкретной производственной задаче.

Постановка задачи линейного программирования требует построения линейной модели оптимизируемого процесса. Корреляционное уравнение, построенное на обоснованном предположении о форме связи, рассчитанное на основе достоверной информации и всесторонне оцененное показателями точности аппроксимации, может быть включено в состав линейной модели процесса.

Пусть имеется  $n$  управляемых факторов производственного процесса с интенсивностью их использования  $x_j$  и  $m$  находящихся в зависимости от них показателей технических, технологических или экономических результатов хода процесса —  $y_i$ . Мы располагаем данными статистического

наблюдения за ходом процесса и его результатами по  $N$  наблюдениям ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Перейдя к матричной форме изложения, обозначим:

$$X = \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{1,1} & \dots & x_{j,1} & \dots & x_{n,1} \\ x_{0,2} & x_{1,2} & \dots & x_{j,2} & \dots & x_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0,k} & x_{1,k} & \dots & x_{j,k} & \dots & x_{n,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0,N} & x_{1,N} & \dots & x_{j,N} & \dots & x_{n,N} \end{bmatrix}; Y_1 = \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ \vdots \\ y_{1,k} \\ \vdots \\ y_{1,N} \end{bmatrix}; \dots$$

$$\dots Y_i = \begin{bmatrix} y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ \vdots \\ y_{i,k} \\ \vdots \\ y_{i,N} \end{bmatrix}; \dots Y_m = \begin{bmatrix} y_{m,1} \\ y_{m,2} \\ \vdots \\ y_{m,k} \\ \vdots \\ y_{m,N} \end{bmatrix}.$$

В матрицу  $X$  для удобства преобразований в матричной форме введен вектор-столбец  $(x_{0,1} \dots x_{0,k} \dots x_{0,N})^T$ , где  $x_{0,1} = x_{0,2} = \dots = x_{0,k} = \dots = x_{0,N} \equiv 1$ .

Компоненты векторов  $Y_i$  и столбцов  $X_j$  из матрицы  $X$  должны представлять статистически независимые между собой данные наблюдений, имеющие нормальное или близкое к нормальному распределение со статистическими несмещенными оценками математического ожидания  $\bar{y}_i$  и  $\bar{x}_j$  и дисперсии  $\sigma_i^2$  и  $\sigma_j^2$  соответственно.

Предполагая существование корреляционных зависимостей  $\bar{y}_{i,12 \dots j \dots n} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , обосновываем форму связи исследованием характера распределения, качественным анализом, расчетом парных зависимостей, дисперсионным анализом. Желательно обосновать предположение о стационарности, воспроизводимости наблюдаемого процесса и статистической независимости показателей по соседним измерениям, а также учесть то, что мы располагаем лишь выборочными данными  $N$  из гипотетической совокупности  $\infty$ .

Каждый результативный показатель описывается линейным уравнением корреляционной зависимости от всех учитываемых существенных факторов, т. е.:

$$\bar{y}_{1,12 \dots j \dots n} = a_{1,0} + \bar{a}_{1,1}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n,$$

$$\bar{y}_{i,12 \dots j \dots n} = a_{i,0} + a_{i,1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{i,n}x_n,$$

$$\bar{y}_{m,12 \dots j \dots n} = a_{m,0} + a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,j}x_j + \dots + a_{m,n}x_n.$$

Каждая  $i$ -я строка коэффициентов  $a_{ij}$  представляет собой транспонированный вектор-столбец  $A_i^T$ , получаемый однозначно по методу наименьших квадратов из соотношения

$$A_i = C^{-1}X^T Y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $X^T$  — транспонированная матрица наблюдений;  $C^{-1}$  — матрица, обратная  $C = X^T X$ .

Таким образом, матрица параметров уравнений регрессии состоит из транспонированных векторов-столбцов  $A_i^T$ .



Исходная задача: минимизировать  $\sum_{j=1}^s c_j x_j$  при условиях

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \text{ и } \sum_{j=1}^s a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Двойственная: максимизировать  $\sum_{i=1}^r b_i u_i$  при условиях

$$\sum_{i=1}^r a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Задача решается общеизвестными методами линейного программирования, в частности симплекс-методом с введением искусственного базиса, так как исходная постановка задачи обычно еще не содержит единичной матрицы первоначального базиса.

3. Оптимальное проведение металлургического процесса — задача экономии дорогостоящих легирующих присадок при условии обеспечения заданных качеств металла.

По данным плавильных журналов было получено несколько математических моделей отдельных элементов процесса путем описания корреляционной зависимости между механическими свойствами различных марок стали и их химическим составом линейной формой уравнения связи. Корреляционный анализ парных зависимостей и кривых распределения величин содержания химических элементов и показателей механических свойств показал, что их распределения близки к нормальному.

Это видно по данным таблицы, содержащей основные статистические характеристики совокупности плавков ( $N = 267$ ).

Показатели распределения	Характеристики механических свойств стали				
	предел текучести, $\sigma_s$	предел прочности, $\sigma_b$	ударная вязкость, $a_k$	относительное сужение, $\psi$	относительное удлинение, $\delta$
Среднее значение, $\bar{y}_i$	46,2	56,2	10,6	68,3	26,7
Среднее квадратическое отклонение, $\sigma_i$	2,4	3,1	2,7	3,9	3,6
Среднее линейное отклонение, $\theta_i$	1,6	2,2	2,0	3,1	2,8
Отношение, $\theta_i/\sigma_i$	0,70	0,74	0,78	0,81	0,73

Определение коэффициентов уравнения регрессии осуществлялось по методу наименьших квадратов. В итоге были получены уравнения вида:

$$\bar{y}_{i.12\dots j\dots n} = a_{i.0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{j.}$$

где  $y_i$  — показатель свойств стали;  $x_j$  — содержание различных химических элементов (углерода, марганца, серы, фосфора, кремния, никеля, хрома, ванадия, меди) в составе стали;  $a_{ij}$  — коэффициенты регрессии.

В итоге для предела текучести, например, было получено следующее уравнение:

$$\sigma_s = 17,0 + 6,6(\text{Mn}) + 74,0(\text{C}) + 1,0(\text{Si}) + 7,7(\text{S}) - 47,4(\text{P}) - 8,8(\text{Ni}) + 6,9(\text{Cr}) + 7,0(\text{V}) + 2,1(\text{Cu}).$$

Совокупный коэффициент корреляции  $R_{1.12...9} = 0,572$ .

Рассчитанные таким образом уравнения зависимости механических свойств данной марки стали от ее химического состава были использованы для оптимизации состава легирующих элементов. Задача была поставлена следующим образом: учитывая стоимость каждой из легирующих присадок, изменить химический состав стали (в пределах, не выходящих за марочные границы) таким образом, чтобы при сохранении механических свойств на прежнем среднем уровне добиться минимальной суммарной стоимости легирующих присадок.

При этом ограничения, наложенные на переменные: содержания легирующих элементов, представляют собой систему линейных уравнений (уравнения множественной регрессии) и линейных неравенств (пределы возможных изменений состава и свойств). Целевая функция, являющаяся формулой суммарной стоимости легирующих элементов, — тоже линейная форма, и задачу оказалось возможным решить с помощью симплекс-метода линейного программирования.

Задача была формализована так: при ограничениях

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_s &= 46,2 = 17,0 + 6,6(\text{Mn}) + \dots + 2,1(\text{Cu}) \\ a_n &= 10,6 = 31,4 - 0,1(\text{Mn}) + \dots - 1,8(\text{Cu}) \\ 0,8 &\leq (\text{Mn}) \leq 2,0 \\ 0,3 &\leq (\text{Ni}) \leq 1,6 \\ 0,05 &\leq (\text{V}) \leq 0,15 \\ 0,6 &\leq (\text{Cu}) \leq 1,0 \end{aligned}$$

найти минимум целевой функции

$$\sum_{j=1}^9 c_j x_j = 1,87(\text{Mn}) + \dots + 14,16(\text{Ni}) + 96,5(\text{V}) + 4,0(\text{Cu}).$$

Коэффициенты при химических элементах в целевой функции представляют собой удельную стоимость легирующих элементов, рассчитанную на основе цен на соответствующие содержания их присадки.

В результате решения был получен оптимальный план, по которому содержание меди и ванадия должно устанавливаться на нижнем марочном пределе, т. е. равным 0,6 и 0,05% соответственно, оптимальное содержание марганца составило 1,42% и никеля 1,1%. За счет изменения химического состава стоимость присадок снизилась почти на 30% против среднемарочной. Опытные плавки подтвердили эти результаты, а также показали, что механические свойства стали остались на прежнем уровне.

Поступила в редакцию  
24 IV 1965