ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 1

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ СЕТИ

Б. И. КОРЕНБЛЮМ, В. И. РЫБАЛЬСКИЙ

(Киев)

В настоящей работе предлагается новый подход к решению задач типа классической задачи Штейнера. Как известно, подобные задачи весьма важны, например, в перспективном планировании, когда требуется минимизировать суммарные расходы на создание предприятий, производство и перевозку продукции, а также на развитие транспортной сети, соединяющей пункты производства с пунктами потребления.

Идея предлагаемого подхода заключается в том, что вместо пунктов производства и пунктов потребления рассматривается некоторое скалярное поле плотности источников и стоков, а вместо сети — векторное поле плотности потока. Такой «континуальный» подход позволяет свести рассматриваемую задачу к вариационной задаче о минимизации некоторого нелинейного функционала, так называемой полной стоимости потока.

Каждый локальный экстремум этой вариационной задачи связан с некоторой нелинейной системой дифференциальных уравнений, решать которую мы не умеем. Однако предлагается алгоритм «наискорейшего спуска» для решения самой вариационной задачи. Этот алгоритм позволяет, отправляясь от потенциального поля, последовательно уменьшать значение полной стоимости потока и приближаться к некоторому локальному экстремуму.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем формулировать задачу в гидродинамических терминах, хотя, как легко видеть, такая постановка отнюдь не ограничивает круг возможных приложений. Даны на плоскости n точечных источников жидкости $A_1, A_2, \ldots, A_n$, мощности которых соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и m точечных стоков $B_1, B_2, \ldots, B_m$ с мощностями $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i$. Требуется соединить источники со стоками сетью произвольной конфигурации, состоящей из прямолинейных отрезков (каналов) и узлов, и распределить мощности потоков по этим каналам так, чтобы обеспечить полное использование мощности всех источников и стоков и при этом минимизировать сумму

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{s} l_i F(f_i),$$

где l_i — длина i-го отрезка сети; f_i — мощность потока по этому отрезку; $F(f_i)$ $(0 \leqslant f_i < \infty)$ — «удельная стоимость», зависящая от мощности потока f; суммирование ведется по всем отрезкам сети. Относительно функции $F(f_i)$ будем предполагать, что она положительна, не убывает и вогнута, т. е.

$$F\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[F(f_1)+F(f_2)], \quad 0 \leqslant f_1, f_2 < \infty.$$

Пусть, кроме того, $F(0)=0$. Величину ε будем называть полной стоимостью сети.

На рис. 1 показан в качестве примера один из возможных вариантов сети в случае трех источников и двух стоков. Такая конфигурация сети

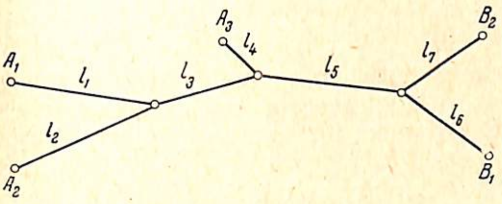

Рис. 1

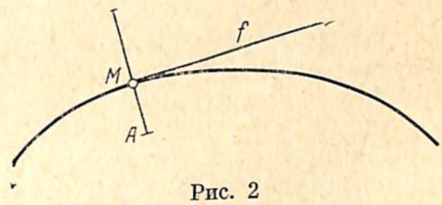

Рис. 2

полностью определяет мощности потоков по отдельным отрезкам:

$$f_1 = p_1, \quad f_3 = p_1 + p_2, \quad f_6 = q_1,$$
$$f_2 = p_2, \quad f_4 = p_3, \quad f_7 = q_2.$$
$$f_5 = p_1 + p_2 + p_3,$$

Очевидно, однако, что не всякая сеть однозначно определяет величины f_i.

В случае дорожной сети функция $F(f_i)$ обычно состоит из двух частей: линейной части kf_i, выражающей стоимость перевозки груза f_i на 1 *км*, и нелинейной части $G(f_i)$, выражающей стоимость строительства 1 *км* дороги с пропускной способностью f_i.

Сформулированная задача имеет обширную литературу. В последнее время интерес к задаче Штейнера и к некоторым другим задачам того же или иного близкого типа заметно повысился (см., например, [1—5]); тем не менее способы нахождения действительно оптимального решения до сих пор не найдены.

Трудность решения этой задачи заключается в том, что для каждой возможной конфигурации сети нужно искать оптимальное расположение узлов, а затем из найденных оптимальных решений, соответствующих различным конфигурациям, выбрать наилучшее. Так как число возможных конфигураций (топологий) сети растет чрезвычайно быстро с ростом m, n, а поиски наилучшего решения для данной топологии сети также весьма сложны, то становятся понятными трудности, связанные с практическим решением нашей задачи.

2. КОНТИНУАЛЬНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ

Наш подход к задаче основан на том, что вместо точечных источников и стоков рассматривается скалярное поле плотности источников, а вместо распределительной сети — векторное поле плотности потока. Полная стоимость выражается некоторым двойным интегралом, минимизация которого приводит к нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных.

Переходим к формулировке континуальной задачи.

Пусть задано на всей плоскости скалярное поле $p = p(x, y)$ — поле плотности источников. Нам удобно будет предполагать, что функция $p(x, y)$ отлична от нуля лишь в ограниченной части плоскости. Примем, что

$$\iint p(x, y)\, dx\, dy = 0^{*}. \tag{1}$$

Физически это означает, что общая мощность источников равна общей мощности стоков.

Рассмотрим плоский стационарный поток жидкости, определяемый векторным полем:

$$f = f(M) = f(x, y). \tag{2}$$

Вектор f показывает направление движения жидкости в точке $M(x, y)$; его длина $|f|$ равна количеству жидкости, проходящей через единицу длины перпендикулярного к f отрезка прямой за единицу времени (рис. 2).

Таким образом, количество жидкости, проходящей за единицу времени через бесконечно малый отрезок $AB = dn$, перпендикулярный к $f(M)$, равно $|f|\, dn$. Траектории движения частиц жидкости определяются дифференциальной системой

$$\frac{dr}{dl} = \frac{f}{|f|} = t(x, y), \tag{3}$$

где $r = xi + yj$ — радиус-вектор M; t — единичный вектор, имеющий направление вектора f; dl — длина бесконечно малой дуги траектории.

Будем предполагать, что система (3) удовлетворяет условиям, обеспечивающим единственность, так что через каждую точку области, где $f \neq 0$, проходит единственная траектория (3).

Введем величину ε, которую мы назовем «полной стоимостью потока $f(M)$». Эта величина выражается двойным интегралом

$$\varepsilon = \iint F(|f|)\, dl\, dn, \tag{4}$$

где $F(|f|)$ — удельная стоимость — функция, удовлетворяющая условиям, перечисленным в разделе 1. Интеграл (4) берется по той части плоскости, где $f \neq 0$, но так как $F(0) = 0$, то можно считать интеграл (4) взятым по всей плоскости. Далее, очевидно, $dl dn = dx dy$, так как это элемент площади. Поэтому величину ε окончательно запишем так:

$$\varepsilon(f) = \iint F(|f|)\, dx\, dy. \tag{5}$$

Это функционал, определенный на совокупности векторных полей $f(M)$. Подчиним поток $f(M)$ условию

$$\operatorname{div} f = p(x, y), \tag{6}$$

которое соответствует физическому смыслу величины p. Мы приходим к следующей вариационной задаче:

А. *Среди всех векторных полей $f(x, y)$, удовлетворяющих условию (6), найти то, для которого функционал $\varepsilon(f)$ достигает минимума.*

---

* Двойные интегралы здесь и в дальнейшем берутся по всей плоскости; напомним, однако, что $p(x, y)$ отлична от нуля лишь в ограниченной части плоскости.

Найдем вариацию функционала $\varepsilon(f)$ при условии (6). Для этого рассмотрим функцию

$$\varepsilon(f+sh)=\iint F(|f+sh|)\,dx\,dy,$$

где h подчинено условию

$$\operatorname{div} h = 0. \tag{7}$$

Найдем производную

$$\left.\frac{d\varepsilon}{ds}\right|_{s=0}:$$

$$\frac{d\varepsilon}{ds}=\iint \frac{d}{ds}F(|f+sh|)\,dx\,dy=\iint F'(|f+sh|)\frac{d|f+sh|}{ds}\,dx\,dy=$$

$$=\iint F'(|f+sh|)\frac{d\sqrt{(f,f)+2(f,h)s+(h,h)s^2}}{ds}\,dx\,dy.$$

Подставляя $s=0$, находим

$$\left.\frac{d\varepsilon}{ds}\right|_{s=0}=\iint F'(|f|)\frac{(f,h)}{|f|}\,dx\,dy=\iint (F'(|f|)t,h)\,dx\,dy,$$

где $t=f/|f|$ — единичное векторное поле, имеющее направление f. Таким образом, вариация $\delta\varepsilon$ определяется формулой:

$$\delta\varepsilon=\iint (F'(|f|)t,h)\,dx\,dy. \tag{8}$$

Необходимым условием экстремума является $\delta\varepsilon=0$ для всех h, удовлетворяющих (7).

Воспользуемся теперь следующей простой теоремой векторного анализа:

Для того чтобы гладкое векторное поле $g(M)=X(x,y)i+Y(x,y)j$ * *удовлетворяло условию* $\iint (g,h)\,dx\,dy=0$, *каково бы ни было* $h(M)$ $(\operatorname{div} h=0)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rot} g=0, \tag{9}$$

где

$$\operatorname{rot} g=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\,^{**}.$$

Таким образом, необходимым условием экстремума функционала ε является $\operatorname{rot} g=0$, где

$$g=F'(|f|)t=F'(|f|)\frac{f}{|f|}. \tag{10}$$

Итак, получаем следующий результат.

Теорема. *Векторное поле f, решающее задачу A, удовлетворяет дифференциальной системе:*

$$\begin{cases}\operatorname{div} f=p(x,y),\\ \operatorname{rot} g=0,\end{cases} \tag{11}$$

где g — поле, коллинеарное с f и определяемое формулой (10).

---

* Мы предполагаем, что $g(M)$ финитно, т. е. отлично от нуля лишь в конечной части плоскости.

** Это равенство является определением $\operatorname{rot} g$, который нам удобно считать скаляром.

Мы не умеем доказывать теорем существования и единственности для системы (11). Весьма возможно, что система (11) в общем случае не имеет классического решения, а ее решение выражается в терминах обобщенных функций, сосредоточенных вдоль некоторых кривых. Следует, однако, заметить, что при численном решении системы (11) любым конечно-разностным методом, очевидно, исчезает различие между классическим и обобщенным решениями.

3. АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Решение системы (11), по-видимому, связано со значительными трудностями. Наши попытки численного решения этой системы (точнее, ее конечно-разностного аналога) при помощи некоторого алгоритма последовательных приближений оказались неудачными. Поэтому ниже предлагается алгоритм * для численного решения нашей задачи, основанный на непосредственной минимизации функционала (5) по методу «наискорейшего спуска». Согласно (8) вариация $\delta\varepsilon$ имеет вид

$$\delta\varepsilon = \iint (g, h)\, dx\, dy, \tag{8'}$$

где

$$g = F'(|f|)t = F'(|f|)\frac{f}{|f|}.$$

Так как h удовлетворяет условию (7), то, пользуясь уже цитировавшейся теоремой векторного анализа, можем переписать (8) в виде:

$$\delta\varepsilon = \iint (g_c, h)\, dx\, dy, \tag{8''}$$

где g_c — вихревая составляющая поля g:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} g_c = \operatorname{rot} g, \\ \operatorname{div} g_c = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Применим к (8) неравенство Буняковского:

$$|\delta\varepsilon| \leqslant \iint |g_c|\,|h|\, dx\, dy \leqslant \sqrt{\iint |g_c|^2\, dx\, dy \cdot \iint |h|^2\, dx\, dy}.$$

Если подчинить h условию

$$\iint |h|^2\, dx\, dy = \iint |g_c|^2\, dx\, dy,$$

то из предыдущего неравенства следует:

$$|\delta\varepsilon| \leqslant \iint |g_c|^2\, dx\, dy.$$

С другой стороны, при $h = -g_c$ знак равенства в этом неравенстве достигается. Отсюда видно, что направлением «наискорейшего спуска», при котором

$$\delta\varepsilon < 0, \qquad |\delta\varepsilon| = \max,$$

будет

$$h = -g_c, \tag{13}$$

---

* Расчеты, давшие вполне удовлетворительные результаты, выполнены В. Андрейчук, которая составила также соответствующую программу для ЭВМ М-20.

причем

$$\frac{d}{ds}\varepsilon(f - sg_c)\,|_{s=0} = -\iint |g_c|^2 dx\,dy = -\iint |\operatorname{rot} g|^2 dx\,dy.$$

Приведем описание алгоритма для континуального случая. На практике вместо двойных интегралов вычисляются двойные суммы, соответствующие узлам некоторой сети.

1) В качестве исходного (нулевого) приближения берем потенциальное поле

$$\begin{cases} \operatorname{div} f^\circ = p(x, y); \\ \operatorname{rot} f^\circ = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $f = \operatorname{grad} \rho(x, y)$, где $\rho(x, y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\rho = p(x, y)$.

Используя логарифмический потенциал, находим

$$f^\circ = \frac{1}{2\pi}\operatorname{grad}\iint p(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint \frac{(x-\xi)i + (y-\eta)j}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

2) Определяем коллинеарное поле

$$g^\circ(x, y) = F'(|f^\circ|)\frac{f^\circ}{|f_0|} = X^\circ(x, y)i + Y^\circ(x, y)j$$

и находим его вихрь:

$$\operatorname{rot} g^\circ = \frac{\partial Y^\circ}{\partial x} - \frac{\partial X^\circ}{\partial y} = q^\circ(x, y).$$

3) Определяем направления наискорейшего спуска:

$$h^\circ(x, y) = -g_c^\circ = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{(y-\eta)i - (x-\xi)j}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} q^\circ(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

4) Просчитываем функцию

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(f^\circ + sh^\circ) = \iint F(|f^\circ + sh^\circ|)\, dx\, dy$$

для $s > 0$ и находим $s = s_0$, соответствующее первому ее минимуму:

$$\varepsilon(s_0) = \min_{0 \leqslant s \leqslant s_0} \varepsilon(s), \quad \varepsilon(s_0 + ds) > \varepsilon(s_0), \quad ds > 0.$$

5) Находим первое приближение f^1:

$$f^1(x, y) = f^\circ(x, y) + s_0 h^\circ(x, y).$$

6) Полученное f^1 пропускаем через 2)—5), т. е. определяем g^1, $\operatorname{rot} g^1 = q^1(x, y)$, $h^1 = -g_c^1$, s_1, $f^2 = f^1 + s_1 h^1$.

Процесс заканчивается, когда $s_n = 0$, т. е. $f^{n+1} = f^n$ или $h^n = 0$.

Заметим, что трудоемкость просчета каждого цикла алгоритма и его конечно-разностного варианта не зависит от начальных данных, задаваемых функцией $p(x, y)$, т. е. от числа, расположения и мощности источников и стоков.

4. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Предложенный подход может быть применен и к более сложным случаям, чем рассмотренный, в котором пункты производства и потребления расположены на идеальной плоскости.

Возможны следующие случаи:

1. Удельная стоимость $F(f)$ зависит не только от длины $|f|$, но и от направления f, а также от аргументов (x, y) векторного поля $f(x, y)$.

Такая ситуация может иметь место, например, тогда, когда необходимо учесть рельеф местности, наличие существующих дорог, рек, болот и т. д. В этом случае оптимальное решение охватит не только самые трассы дорог, но и сооружение тех или иных мостов, путепроводов и т. д.

2. Учитывается не один вид продукции, а ряд видов, т. е. задача является многоотраслевой.

Такой случай наиболее распространен, так как обычно сети (например, железные дороги) сооружаются для перевозки самых различных грузов.

Исключение составляют такие сети, как линии электропередач, нефтепроводы и т. д., предназначенные для транспортирования лишь одного вида продукции.

3. Учитывается возможность использования различных видов транспорта (например, для транспортирования нефти — железные дороги и магистральные нефтепроводы).

4. Решается не статическая, а динамическая задача, т. е. развитие транспортной сети рассчитывается не просто для данного отрезка времени, а с учетом нахождения общего оптимального решения для ряда следующих друг за другом отрезков времени, в каждый из которых пункты производства и потребления и их мощности могут меняться.

5. Пункты производства и их мощности не задаются; известны лишь пункты потребления и объем спроса по каждому из них в той или иной продукции, а следовательно, суммарный спрос по всем видам продукции.

В этом случае результатом расчета является не только оптимальное развитие транспортной сети, но и оптимальное размещение и мощности будущих предприятий в течение всего планового периода.

Решение задач по оптимальному размещению производства с учетом наилучшего развития транспортной сети, безусловно, явится важной составной частью оптимального народнохозяйственного планирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Моцкус. Способ последовательного поиска для приближенного решения некоторых задач оптимального проектирования. Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1962, т. 2, № 6.
2. И. Б. Моцкус, В. А. Леонас, В. Р. Шальтянис. О нахождении оптимальной конфигурации распределительных сетей. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и транспорт, 1963, № 2.
3. В. И. Рыбальский, Г. А. Донец. Алгоритм и программа расчета оптимальной очередности и сроков поточного строительства тепловых электростанций на перспективу. В сб. Строительное производство, № 1. Киев, 1965.
4. В. И. Рыбальский. Кибернетика в строительном производстве. Киев, Будівельник, УССР, 1965.
5. F. Bessière. L'étude à long terme des plans d'investissement a l'aide de la programmation linéaire. Electricité de France, 1960, Juin; Méthode pour l'étude des reseaux d'énergie electrique. Electricité de France, 1960, Mai.

Поступила в редакцию
10 XII 1965

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 1

О КОЛИЧЕСТВЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

А. П. КУЗОВКИН, В. М. ТИХОМИРОВ

(Москва)

Настоящая статья представляет собой попытку авторов обобщить один интересный результат С. Джонсона о нахождении минимума выпуклой функции на отрезке.

Результат С. Джонсона изложен в [1, стр. 35] и состоит в следующем. Пусть $y = f(x)$ — строго выпуклая функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Требуется найти минимальное из чисел ε_N, таких, что для всякого $\delta > 0$ всегда можно указать интервал отрезка $[0, 1]$ длины $\varepsilon_N + \delta$, содержащий точку минимума функции $f(x)$, путем вычисления не более чем N значений этой функции.

Оказывается, что число $\varepsilon_N = 1/F_N$, где F_N — число Фибоначчи. В частности, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1/2$, $\varepsilon_3 = 1/3$, $\varepsilon_4 = 1/5$ и т. д.

Если поставить вопрос, какое количество вычислений $N(\varepsilon)$ потребуется для того, чтобы вычислить $\min f(x)$ с точностью до ε, то, используя асимптотику *

$$F_N \asymp \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N,$$

получим

$$N(\varepsilon) \asymp \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

В настоящей работе рассматривается n-мерный случай.

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$ — выпуклая функция, заданная в выпуклой области G. Требуется найти минимальное из чисел $\varepsilon_N = \varepsilon_N(G)$, таких, что всегда можно указать подобласть объема ** ε_N, содержащую точку минимума функции $f(x)$, затратив не более N вычислений значений функции $f(x)$.

Следует уточнить, что как в результате Джонсона, так и в результатах настоящей статьи речь идет об алгоритмах, состоящих в последовательном вычислении значений функции в некоторых точках, причем решение о том, в какой точке вычислять следующее значение функции, принимается на основании информации, полученной на предыдущих шагах.

---

* Мы пользуемся следующими обозначениями эквивалентности функций от некоторого аргумента: $\alpha \sim \beta$, если $\lim \alpha/\beta = 1$; $\alpha \asymp \beta$, если $c\beta \leqslant \alpha \leqslant C\beta$.

** Заметим, что объем не всегда является удобной характеристикой массивности области. Более естественной характеристикой выглядит, например, диаметр области. Однако, если не делать никаких предположений относительно функции $f(x)$, то, как легко показать, никаким числом вычислений нельзя уменьшить диаметр первоначальной области.