4. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Предложенный подход может быть применен и к более сложным случаям, чем рассмотренный, в котором пункты производства и потребления расположены на идеальной плоскости.

Возможны следующие случаи:

1. Удельная стоимость $F(f)$ зависит не только от длины $|f|$, но и от направления f, а также от аргументов (x, y) векторного поля $f(x, y)$.

Такая ситуация может иметь место, например, тогда, когда необходимо учесть рельеф местности, наличие существующих дорог, рек, болот и т. д. В этом случае оптимальное решение охватит не только самые трассы дорог, но и сооружение тех или иных мостов, путепроводов и т. д.

2. Учитывается не один вид продукции, а ряд видов, т. е. задача является многоотраслевой.

Такой случай наиболее распространен, так как обычно сети (например, железные дороги) сооружаются для перевозки самых различных грузов.

Исключение составляют такие сети, как линии электропередач, нефтепроводы и т. д., предназначенные для транспортирования лишь одного вида продукции.

3. Учитывается возможность использования различных видов транспорта (например, для транспортирования нефти — железные дороги и магистральные нефтепроводы).

4. Решается не статическая, а динамическая задача, т. е. развитие транспортной сети рассчитывается не просто для данного отрезка времени, а с учетом нахождения общего оптимального решения для ряда следующих друг за другом отрезков времени, в каждый из которых пункты производства и потребления и их мощности могут меняться.

5. Пункты производства и их мощности не задаются; известны лишь пункты потребления и объем спроса по каждому из них в той или иной продукции, а следовательно, суммарный спрос по всем видам продукции.

В этом случае результатом расчета является не только оптимальное развитие транспортной сети, но и оптимальное размещение и мощности будущих предприятий в течение всего планового периода.

Решение задач по оптимальному размещению производства с учетом наилучшего развития транспортной сети, безусловно, явится важной составной частью оптимального народнохозяйственного планирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Моцкус. Способ последовательного поиска для приближенного решения некоторых задач оптимального проектирования. Ж. вычислит. матем. и матем. физики, 1962, т. 2, № 6.
2. И. Б. Моцкус, В. А. Леонас, В. Р. Шальтянис. О нахождении оптимальной конфигурации распределительных сетей. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и транспорт, 1963, № 2.
3. В. И. Рыбальский, Г. А. Донец. Алгоритм и программа расчета оптимальной очередности и сроков поточного строительства тепловых электростанций на перспективу. В сб. Строительное производство, № 1. Киев, 1965.
4. В. И. Рыбальский. Кибернетика в строительном производстве. Киев, Будівельник, УССР, 1965.
5. F. Bessière. L'étude à long terme des plans d'investissement a l'aide de la programmation linéaire. Electricité de France, 1960, Juin; Méthode pour l'étude des reseaux d'énergie electrique. Electricité de France, 1960, Mai.

Поступила в редакцию
10 XII 1965

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 1

О КОЛИЧЕСТВЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

А. П. КУЗОВКИН, В. М. ТИХОМИРОВ

(Москва)

Настоящая статья представляет собой попытку авторов обобщить один интересный результат С. Джонсона о нахождении минимума выпуклой функции на отрезке.

Результат С. Джонсона изложен в [1, стр. 35] и состоит в следующем. Пусть $y = f(x)$ — строго выпуклая функция, заданная на отрезке $[0, 1]$. Требуется найти минимальное из чисел ε_N, таких, что для всякого $\delta > 0$ всегда можно указать интервал отрезка $[0, 1]$ длины $\varepsilon_N + \delta$, содержащий точку минимума функции $f(x)$, путем вычисления не более чем N значений этой функции.

Оказывается, что число $\varepsilon_N = 1/F_N$, где F_N — число Фибоначчи. В частности, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = {}^1/_2$, $\varepsilon_3 = {}^1/_3$, $\varepsilon_4 = {}^1/_5$ и т. д.

Если поставить вопрос, какое количество вычислений $N(\varepsilon)$ потребуется для того, чтобы вычислить $\min f(x)$ с точностью до ε, то, используя асимптотику *

$$F_N \infty \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^N,$$

получим

$$N(\varepsilon) \infty \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

В настоящей работе рассматривается n-мерный случай.

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$ — выпуклая функция, заданная в выпуклой области G. Требуется найти минимальное из чисел $\varepsilon_N = \varepsilon_N(G)$, таких, что всегда можно указать подобласть объема ** ε_N, содержащую точку минимума функции $f(x)$, затратив не более N вычислений значений функции $f(x)$.

Следует уточнить, что как в результате Джонсона, так и в результатах настоящей статьи речь идет об алгоритмах, состоящих в последовательном вычислении значений функции в некоторых точках, причем решение о том, в какой точке вычислять следующее значение функции, принимается на основании информации, полученной на предыдущих шагах.

---

* Мы пользуемся следующими обозначениями эквивалентности функций от некоторого аргумента: $\alpha \sim \beta$, если $\lim \alpha / \beta = 1$; $\alpha \asymp \beta$, если $c\beta \leqslant \alpha \leqslant C\beta$.

** Заметим, что объем не всегда является удобной характеристикой массивности области. Более естественной характеристикой выглядит, например, диаметр области. Однако, если не делать никаких предположений относительно функции $f(x)$, то, как легко показать, никаким числом вычислений нельзя уменьшить диаметр первоначальной области.

В работе доказывается, что в случае $n = 2$

$$N(\varepsilon) \asymp \ln \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (1)$$

Следует заметить, что асимптотика (1) сохранится и в случае произвольной размерности пространства, в котором рассматривается функция $f(x)$.

Алгоритм нахождения $\min f(x)$, описанный в этой статье, по-видимому, не слишком пригоден для практических целей, так как в нем используются два трудно осуществимых построения: нахождение центра тяжести тела и описывание около него близкого по площади многогранника. Разумеется, этот алгоритм легко в разных направлениях усовершенствовать. Но так как, по-видимому, получить в этой задаче точный ответ (по примеру джонсоновского) невозможно, а задачами практического вычисления минимумов авторы никогда не занимались, мы решили ограничиться только получением самых грубых оценок. Ввиду того, что наши методы действуют тем хуже, чем выше размерность пространства, полное доказательство мы приводим только для плоского случая, указывая по возможности, как поступить в общем n-мерном случае.

В плоском случае ввиду больших возможностей усовершенствования алгоритм, вероятно, может быть пригоден и для практического счета.

Данной работе непосредственно предшествует работа А. Ю. Левина [2], который рассматривал ту же задачу, что и мы, только там допускались вычисления градиента $f(x)$.

После работы А. Ю. Левина для нашей задачи оставалось преодолеть только технические трудности, так как основной результат — формула (1) — не вызывал сомнений.

Однако возникшие попутно задачи представляются нам имеющими самостоятельный интерес. Укажем две такие задачи, которые мы формулируем в виде лемм 1 и 2.

Лемма 1. *Для всякого выпуклого тела Q, расположенного в n-мерном пространстве R^n, и всякой точки ξ, расположенной внутри Q, найдется гиперплоскость L_ξ, проходящая через ξ, такая, что ξ — центр тяжести сечения $L_\xi Q$.*

В случае, если Q является конусом, L_ξ — единственна. Эта лемма обобщает известную элементарную задачу: провести через точку внутри угла отрезок так, чтобы он делился этой точкой пополам.

Лемма 1 была доказана для конуса В. М. Тихомировым.

Для произвольного выпуклого тела доказательство по нашему заказу было проведено В. И. Арнольдом и рассказано в его курсе по топологии осенью 1964 г.

Назовем конус $\tilde{K}_{y_0}$ с вершиной в y_0 «встречным» по отношению к конусу $K_{x_0} \ni y_0$ с вершиной в x_0, если $\tilde{K}_{y_0}$ — совокупность векторов вида $x_0 - y + y_0$.

Лемма 2. *Пусть Q — выпуклое ограниченное тело; O — центр тяжести Q; $K_{x_0} = K$ — конус, касательный к Q в граничной точке x_0; $\tilde{K}_0 = \tilde{K}$ — конус «встречный» к K_{x_0} с вершиной в O. Найдется такая гиперплоскость L, разделяющая x_0 и множество пересечения $\tilde{K}_0 \cap Q$ и отсекающая от Q кусок, содержащий x_0 объема, не меньшего $(1/(n+1)^n)V(Q)$, где $V(Q)$ — объем тела Q.*

Кроме того, нам потребуются еще леммы 3—5.

Лемма 3. *Любая прямая, проходящая через центр тяжести O выпуклого ограниченного тела $Q \subset R^n$, делится точкой O в отношении, не большем, чем $n/1$.*

Лемма 4. *Пусть Q — любое выпуклое ограниченное тело. Найдется такая точка ξ_0 внутри Q, что любая гиперплоскость, проходящая через эту точку, делит тело Q на области Q_1 и Q_2, объемы которых составляют не менее $1/n+1$ объема тела Q**.

Лемма 5. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(n, \varepsilon)$, такое, что для всякого выпуклого ограниченного n-мерного тела Q найдется многогранник $\tilde{Q}$ с N вершинами, описанный около Q, такой, что*

$$\frac{V(\tilde{Q})}{V(Q)} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Перед доказательством основного результата (1) нам потребуется следующее:

Замечание. Рассмотрим значения выпуклой функции $f(x)$ в точках $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$, где $x^1, \ldots, x^{n+1}$ образуют симплекс.

Пусть $f(x^{n+1}) \geqslant f(x^i)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим G_1 — вертикальный многогранный угол к внутреннему многогранному углу симплекса с вершиной в точке x^{n+1} и покажем, что в G_1 нет $\min f(x)$.

Пусть $x^{n+2} \in G_1$. Найдем точку x^{n+3} внутри симплекса на прямой, соединяющей точки x^{n+1} и x^{n+2}. Имеем:

$$f(x^{n+3}) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n+1} f(x^i) = f(x^{n+1})$$

на основании выпуклости $f(x)$.

Следовательно, $f(x^{n+1}) \leqslant f(x^{n+2})$ также на основании выпуклости $f(x)$, и, значит, в x^{n+2} нет минимума $f(x)$, что и требовалось.

Для $n = 2$ дадим геометрическую иллюстрацию этого доказательства.

На рис. 1 дана выпуклая область Q. Известны значения $f(x)$ в производных точках x^1, x^2, x^3. Мы доказали, что в заштрихованной области G_1 $\min f(x)$ нет.

Переходим к доказательству формулы (1). Формула (1) означает, что

$$c \leqslant \frac{N}{\ln 1/\varepsilon} \leqslant C,$$

где c и C — некоторые отличные от нуля числа.

Из результата С. Джонсона следует, что

$$\frac{N}{\ln 1/\varepsilon} \geqslant c.$$

Ниже доказывается, что $\dfrac{N}{\ln 1/\varepsilon} \leqslant C.$

Д о к а з а т е л ь с т в о ф о р м у л ы (1). Опишем первый шаг итерационного процесса для плоского случая. В общем n-мерном случае по-

---

* В двумерном случае существует такая теорема:

Если ξ_0 — центр тяжести, то любая прямая делит Q на две равные части — Q_1 и Q_2, площадь каждой из которых равна или более $^4/_9$ площади Q.

В n-мерном случае аналогичную оценку получил Б. С. Митягин, там объем каждого из тел Q_1 и $Q_2 \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ объема Q. Но эти теоремы сравнительно трудно доказывать, а для асимптотических целей достаточно и леммы 4, доказываемой совсем просто.

Если же стараться получить конструктивный алгоритм, разумно использовать оценку Б. С. Митягина.

строения аналогичны. Согласно лемме 5 опишем вокруг фигуры Q многоугольник $\tilde{Q}$ так, чтобы

$$S(\tilde{Q}) \,/\, S(Q) = 1 + \varepsilon^{*}.$$

Пусть число вершин $\tilde{Q}$ равно N, ξ_0 — центр тяжести $\tilde{Q}$ (в n-мерном случае можно взять в качестве ξ_0 точку, требуемую в лемме 4). Приняв ξ_0 за центр подобия, построим многоугольник $\tilde{Q}_\delta$, подобный $\tilde{Q}$ и уменьшенный в δ раз. Пусть A_k $1 \leqslant k \leqslant N$ вершины $\tilde{Q}$; $A_{k\delta}$ $1 \leqslant k \leqslant N$ — вершины $\tilde{Q}_\delta$. Вычислим теперь $f(x)$ в точках $A_{k\delta}$, и пусть $f(A_{1\delta}) = \max\limits_{k \leqslant N} f(A_{k\delta})$. Тогда, согласно сделанному нами ранее замечанию, в угле с вершиной в точке $A_{1\delta}$, «встречном» углу многоугольника $\tilde{Q}$ с вершиной в точке A_1, $\min f(x)$ отсутствует.

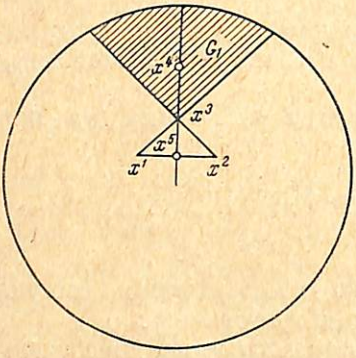

Рис. 1

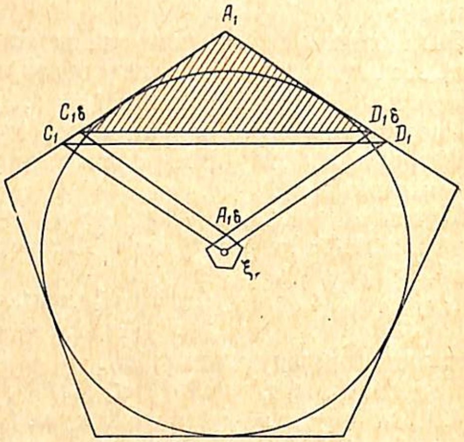

Рис. 2

Обозначим через C_1 и D_1 точки пересечения «встречного» угла с вершиной ξ_0 и Q, а через $C_{1\delta}$ и $D_{1\delta}$ — точки пересечения «встречного» угла с вершиной в $A_{1\delta}$ и $\tilde{Q}$ (см. рис. 2).

По лемме 2 мы имеем, что площадь части $\tilde{Q}$, лежащей выше прямой C_1D_1, не менее $S(\tilde{Q}) \,/\, 9$. Выбрав δ достаточно малым, получим, что площадь заштрихованной области не меньше $S(\tilde{Q})$ $(^1/_9 - \alpha)$, где $\alpha(\delta)$ — тоже малая величина.

Окончательно имеем, что отсекаемая площадь σ удовлетворяет неравенству $\sigma \geqslant S(\tilde{Q}) \cdot [^1/_9 - \alpha] - \varepsilon \cdot S(Q)$.

В последней формуле можно, например, положить $\alpha = {}^1/_{18}$ и $\varepsilon \leqslant {}^1/_{34}$ и получить, что $\sigma \geqslant S(Q) \,/\, 36$.

Итак, мы должны построить N-угольник, чтобы

$$\frac{S(\tilde{Q})}{S(Q)} = 1 + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{34}$.

Согласно доказательству леммы 5 для плоского случая имеем: если $\varepsilon \leqslant {}^1/_{34}$, то $N = 2n + 2 = 138$.

Итого, на одной итерации площадь уменьшается на $S(Q) \,/\, 36$. За m итераций площадь уменьшается на $S - (^{35}/_{36})^m S$.

* Через $S(Q)$ мы обозначаем, как обычно, площадь Q.

Оставшаяся область возможного значения $\min f(x)$ имеет площадь $\varepsilon = (^{35}/_{36})^m$ и является выпуклой. Отсюда следует, что на $m+1$ итерации применима та же конструкция.

Так как на каждой итерации мы делаем 138 вычислений, то за m итераций число вычислений будет:

$$N(\varepsilon) = -\frac{138}{\ln {}^{35}/_{36}} \cdot \ln\frac{1}{\varepsilon}, \text{ т. е. } N(\varepsilon) \asymp \ln\frac{1}{\varepsilon},$$

что доказывает формулу (1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Лемма 1 по существу сводится к следующей задаче из топологии: на n-мерной сфере не существует четного (т. е. одинакового в противоположных точках сферы) непрерывного нетривиального касательного векторного поля. Эта задача просто решается для четномерной сферы, так как там, по известной теореме Пуанкаре, не существует вообще никакого нетривиального касательного векторного поля. В нечетномерном случае задача решается с использованием более глубоких топологических результатов, и мы его не приводим. Укажем только, как свести нашу задачу к топологической. Каждой гиперплоскости L поставим в соответствие две противоположные точки единичной сферы с центром в ξ, получающиеся из пересечения этой единичной сферы и прямой, перпендикулярной гиперплоскости L. Затем в каждую из полученных точек перенесем вектор, соединяющий ξ с центром тяжести сечения LQ. Получаем четное непрерывное векторное поле.

Доказательство леммы 2. Проведем через точку O гиперплоскость L, такую, что O является центром тяжести сечения KL. Через точку, делящую отрезок $\overline{x_0O}$ в отношении $1:n$, проведем плоскость L' параллельно L. Сечение $L'Q$ обозначим Q' и проведем конус K' с вершиной x_0 и с основанием Q'. Обозначим: V — объем Q; V_Q — объем части тела Q, расположенной выше L'; $V_{K'}$ — объем части конуса K', расположенный выше L'; V_Q' — объем части тела, расположенный между L и L'; $V_{K'}'$ — объем части конуса K', расположенный между L и L'.

Имеем из подобия:

$$V_{K'} = \frac{1}{n^n}(V_{K'} + V_{K'}');$$

отсюда

$$\frac{V_{K'} + V_{K'}'}{V_{K'}} = 1 + \frac{V_{K'}'}{V_{K'}} = n^n.$$

Тогда

$$V_{K'}' = V_{K'}(n^n - 1).$$

Но, как легко понять из выпуклости Q, $V_Q' \leqslant V_{K'}'$ и $V_Q \geqslant V_{K'}$, откуда $V_Q' \leqslant V_{K'}(n^n - 1)$. Согласно оценке Б. С. Митягина, имеем

$$V_Q + V_Q' \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot V,$$

откуда

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot V \leqslant V_Q + V_Q' \leqslant V_Q + V_{K'}(n^n - 1).$$

Из $V_Q \geqslant V_{k'}$ следует, что $n^n V_Q \geqslant \dfrac{n^n \cdot V}{(n+1)^n}$

Следовательно, $V_Q \geqslant V / (n+1)^n$.

Построим встречный конус $\tilde{K}$ и докажем, что линия пересечения $\tilde{K}Q$ лежит не выше плоскости L'.

Проведем любую двумерную плоскость L_2 через прямую x_0O. Получим треугольник Dx_0E, $DE \in L$. Имеем $OC \| Dx_0$, $OB \| x_0E$ — образующие «встречного» конуса $\tilde{K}$.

По лемме 3 имеем

$$OE \geqslant \frac{DE}{n-1}, \quad OD \geqslant \frac{DE}{n-1};$$

Отсюда, из подобия треугольников заключаем, что

$$x_0B \geqslant \frac{1}{n+1} x_0D \quad \text{и} \quad x_0C \geqslant \frac{x_0E}{n+1},$$

следовательно, и B, и C лежат ниже L'.

Вследствие произвольности L_2 мы получаем доказательство леммы 2.

Докажем следующую редакцию леммы 2, позволяющую в n-мерном случае обойтись без результата Б. С. Митягина.

Пусть Q — выпуклое ограниченное тело; ξ_0 — такая точка, которая требуется в лемме 4. x_0, $K_{x_0} = K$ и $K_0' = K'$ — те же, что в лемме 2.

Мы утверждаем, что найдется такая гиперплоскость, которая разделяет x_0 и множество пересечения $K_0'Q$ и отсекает от Q кусок, содержащий x_0 объема не меньше

$$\frac{1}{(n+1)^n} V(Q).$$

Для доказательства проведем через ξ_0 гиперплоскость L, такую, что ξ_0 — центр тяжести сечения KL. Через точку, делящую отрезок $x_0\xi_0$ в отношении $1:n$, проведем, как и ранее, плоскость L' параллельно L. Остальные обозначения оставим прежними.

Имеем $V_{K'} = \dfrac{1}{n^n}(V_{K'} + V_{K'}')$, откуда $V_{K'} = V_{K'} \cdot (n^n - 1)$.

Но $V_Q' \leqslant V_{k}'$, $V_Q \geqslant V_{k'}$, откуда $V_Q' \leqslant V_{k'}(n^n - 1)$.

Согласно лемме 4 имеем $V_Q + V_Q' \geqslant \dfrac{V}{n+1}$, откуда $\dfrac{V}{n+1} \leqslant V_Q +$ $+ V_Q' \leqslant V_Q + V_{k'}(n^n - 1) \leqslant V_Q \cdot n^n$ и, следовательно, $V_Q \geqslant \dfrac{V}{n^n(n+1)}$.

Конец доказательства такой же, как и ранее.

Доказательство леммы 3. Пусть O — центр тяжести выпуклого ограниченного тела $Q \subset R^n$.

Проведем любой отрезок AB через O (A и B — на границе Q) и плоскость L, опорную к Q в B.

В любом двумерном сечении L_2, проходящем через AB, осуществим следующую конструкцию (рис. 3) (см. [3], стр. 50).

Плоская выпуклая фигура L_2Q разбивается отрезком AB на две части L_2Q_1 и L_2Q_2. Проведем отрезки AB_1 и AB_2 так, чтобы треугольник ABB_i ($i = 1, 2$) был равновелик множеству LQ_i ($i = 1, 2$). Прямая B_1B, очевидно, принадлежит L.

Совокупность всех треугольников AB_1B_2 по всем L_2 образует некоторый конус K. Пусть множество Γ — линия пересечения K и Q. Из построения легко следует, что K и Q равновелики. Кроме того, из того же построения ясно, что центр тяжести тела Q лежит выше (считая от плоскости L по направлению отрезка BA) центра тяжести конуса Q. Но центр тяжести n-мерного конуса делит отрезок, соединяющий его вершину с основанием, в отношении $1:n$, откуда и следует: $AO:OB \geqslant 1:n$, что и требовалось.

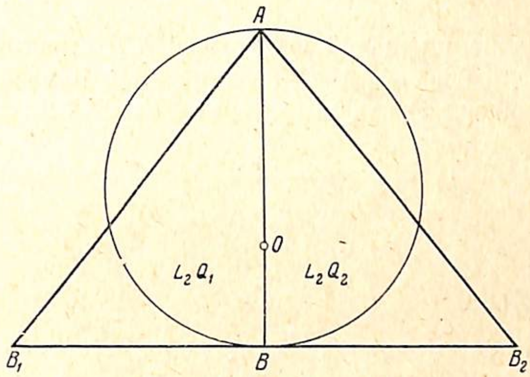

Рис. 3

Двумерный случай см. подробнее в [3].

Доказательство леммы 4. Рассмотрим все такие полупространства $\Pi_n \subset R^n$, для которых объем пересечения $\Pi_n Q \geqslant \frac{n}{n+1} V$, где V — объем Q. Покажем, что любые $n+1$ таких полупространств имеют общую точку. Действительно, пусть $\Pi_n^{(1)}, \ldots, \Pi_n^{(n+1)}$ — произвольные такие полупространства. Легко понять, что

$$V\left(\prod_{k=1}^{n+1} \Pi_n^{(k)}\right) \geqslant V - \sum_{k=1}^{n+1} V(C\Pi_n^{(k)}) > 0, \text{ так как } V(C\Pi_n^{(k)}) < \frac{V}{n+1},$$

откуда следует, что все $n+1$ выпуклых тел имеют общее пересечение, а значит, по теореме Хелли [3], найдется точка ξ_0, принадлежащая всем полупространствам. Докажем, что она искомая. Пусть существует полупространство Π_{ξ_0}, проходящее через ξ_0 и содержащее часть Q объема $\left(\frac{n}{n+1} + \varepsilon\right) \cdot V$. Возьмем теперь сдвиг полупространства Π_{ξ_0}, объем которого равен $\left(\frac{n}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot V$. Обозначим это полупространство Π'; тогда Π' не содержит ξ_0, а отсекает объем больше $\frac{n}{n+1} V$. Противоречие доказывает лемму.

Доказательство леммы 5. Проведем его для плоского случая. Докажем, что

$$\frac{S(\widetilde{Q}_{2n+2})}{S(Q)} - 1 \leqslant \frac{2}{n}.$$

1. Пусть дана произвольная выпуклая фигура Q площади S. Опишем вокруг Q прямоугольник $EFGH$ площади $S(\Pi)$ так, чтобы две стороны прямоугольника касались Q в концах ее диаметра. Пусть длина диаметра AC равна a, а длина другой стороны прямоугольника равна b (см. рис. 4).

Рассмотрим прямоугольник $EACH$. Разделим прямую EH на n отрезков. Если точка касания D не окажется границей отрезка, то сделаем ее точкой деления.

Из конца каждого отрезка восстановим перпендикуляр до пересечения с границей ADC фигуры Q. В точках пересечения проведем опорные прямые, пересечение которых дает выпуклую ломаную ADC, описанную вокруг кривой $\breve{ADC}$.

Оценим отношение площадей фигуры $\bar{ADC}$, ограниченной ломаной ADC и прямой AC, и фигуры $\breve{ADC}$, ограниченной кривой $\breve{ADC}$ и прямой AC. Обозначим площади этих фигур через $\bar{S}'$ и S' соответственно.

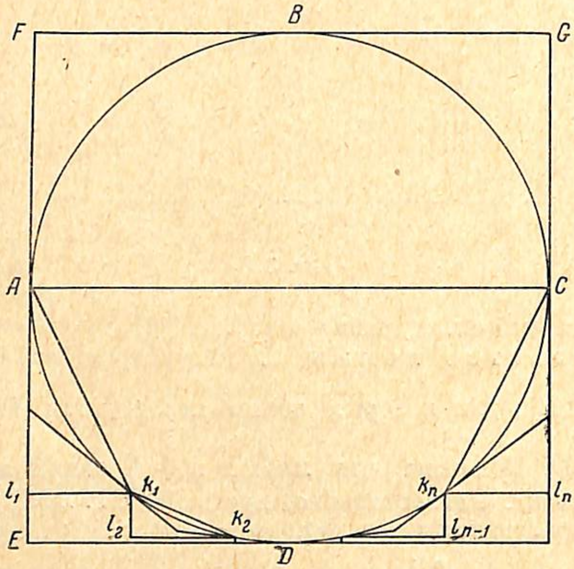

Рис. 4

Ломаная ADC лежит внутри криволинейных треугольников Ak_1l_1, $k_1k_2l_2, \ldots, k_nCl_n$. Площадь каждого такого треугольника не больше площади соответствующего прямоугольного треугольника, у которого соответствующие кривые $\breve{k_ik_{i+1}}$ заменены хордами k_ik_{i+1}. Площадь всех прямоугольных треугольников равна:

$$\frac{1}{2}\frac{a}{n}(h_1+\ldots h_n)=\frac{1}{2}\frac{a}{n}2\cdot AE=\frac{a\cdot AE}{n}, \qquad (2)$$

где $h_i=k_il_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}h_i=2AE.$

Формула (2) верна и в том случае, когда D не является концом отрезка первоначального разбиения, так как точка делит i-й отрезок длины $1/n$ на отрезки k/n и $1-k/n$, где $k<1$.

Тогда сумма треугольников равна:

$$\frac{1}{2}\frac{a}{n}(h_1+\ldots+h_{i-1})+\frac{1}{2}a\left(\frac{k}{n}h_i+\frac{(1-k)}{n}h_{i+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}a(h_{i+2}+\ldots-+h_{n+1})\leqslant\frac{a}{2n}(h_i+\ldots h_{n+1}),$$

так как

$$\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{k}{n}\cdot h_i+\frac{1-k}{n}h_{i+1}\right)\leqslant\frac{a}{2}\left(\frac{h_i}{n}+\frac{h_{i+1}}{n}\right).$$

Следовательно, $\tilde{S}'-S'\leqslant\frac{a}{n}\cdot AE$.

Так как площадь $\Delta ADC=\frac{1}{2}a\cdot AE$, то $S'\geqslant\frac{1}{2}a\cdot AE$;

отсюда

$$\tilde{S}'-S'\geqslant\frac{2S'}{n}. \tag{3}$$

2. Аналогичные построения производим в прямоугольнике $AFGC$, разбивая на n частей сторону FG.

Пусть S^2 — площадь фигуры $A\breve{B}C$, ограниченной кривой $A\breve{B}C$ и прямой AC; $\tilde{S}^2$ — площадь фигуры ABC, ограниченной ломаной ABC и прямой AC. Тогда

$$\tilde{S}^2-S^2\leqslant\frac{2S^2}{n}. \tag{4}$$

Сложим (3) и (4)

$$(\tilde{S}'+\tilde{S}^2)-(S'+S^2)\leqslant\frac{2\cdot(S'+S^2)}{2}=\frac{2S}{n},$$

где $\tilde{S}'+\tilde{S}^2$ — площадь описанного многоугольника Q_{2n+2} с $2n+2$ вершинами, в случае, если точки D и B не являются точками первоначального разбиения. Отсюда

$$\frac{S(\tilde{Q}_{2n+2})}{S(Q)}-1\leqslant\frac{2}{n},$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. А. Ю. Левин. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 6.
3. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Выпуклые фигуры. М., Физматгиз, 1951.

Поступила в редакцию
12 II 1966