

средств. Однако при тщательной разработке данной схемы и при обработке соответствующей информации на ЭВМ матрица бюджета может послужить основой для построения математической модели бюджета и для перспективных и контрольных расчетов.

Конечно, в движении большей части бюджетных средств нет таких фундаментальных закономерностей, которые характерны для товарных потоков при данном состоянии техники. Поэтому роль эмпирических параметров, отражающих тенденцию, в этом случае менее значительна. Однако, с другой стороны, в движении бюджетных средств реализуются законодательные нормы и положения, которые хорошо известны. В этих положениях непосредственно указываются ставки налогообложения, нормы отчислений от прибылей, условия расходования бюджетных средств. Не представит большого труда выразить эти нормы в форме ограничений математической модели. Поэтому внедрение в практику матричной схемы бюджета, которая была рассмотрена выше, могло бы быть важным шагом в совершенствовании финансового планирования в экономике.

Поступила в редакцию
22 IX 1966

ЧТО ТАКОЕ ТЕОРИЯ ИГР

А. А. ФРИДМАН

(Москва)

1. ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Жизнь часто сталкивает нас с ситуациями, имеющими конфликтный характер. В таких ситуациях обычно имеются стороны, интересы которых частично или полностью противоположны, причем результат столкновения интересов зависит не только от действий одной стороны, а определяется действиями всех сторон, участвующих в конфликте. Естественно, что перед каждой стороной возникает задача выбрать наилучший образ действий и добиться своей цели.

Эта задача отличается от задач, рассматриваемых в линейном программировании. В задачах линейного программирования речь идет, фигурально выражаясь, о выборе решения *одним лицом* из множества допустимых, с тем чтобы *это лицо* получило максимальный выигрыш (максимум целевой функции). На величину указанного выигрыша влияет *только выбор* решения, находящийся целиком во власти *одного лица* и не зависящий ни от кого более. В этой задаче имеется одно лицо с единственной целью, поэтому задача является одноцелевой. В такую схему не укладываются ситуации, где имеются стороны с различными интересами, причем «оптимальное» состояние для одной стороны отнюдь не оптимально для другой.

Конфликтные ситуации возникают в экономике, при планировании военных операций, в спортивных играх, где каждое решение должно приниматься в расчете на разумного противника, который стремится помешать нам добиться успеха.

Математическая теория игр занимается анализом конфликтных ситуаций, разработкой методов выбора наилучшего поведения противостоящих сторон для достижения поставленных ими целей.

Для анализа реальной конфликтной ситуации математическими средствами необходимо четко описать эту ситуацию и сформулировать задачу. Очевидно, что для этого надо знать: число конфликтующих сторон; возможные способы действий каждой из сторон; условия окончания действий; способы измерения результата действий в одних и тех же единицах; цель каждой стороны. При этом должно оговариваться, какой информацией владеет каждая сторона в момент выбора своих действий.

Следует отметить, что реальные конфликтные ситуации обычно весьма сложны, стороны, участвующие в них, связаны различными условиями, их действия зависят от чрезвычайно большого числа факторов, не всегда поддающихся описанию, сама процедура действий сторон весьма динамична и разнообразна и тоже не всегда поддается четкому описанию. Как и всякая математическая теория, теория игр занимается не анализом конкретных ситуаций во всех их проявлениях, а анализом «абстрактных» игровых ситуаций — «игровых моделей», формальных игр, получающихся

в результате перехода от интуитивно понятных, но расплывчатых представлений о реальных конфликтных ситуациях к их математическому описанию. При этом, естественно, интуитивные житейские представления о взаимоотношениях конфликтующих сторон заменяются в формальной игре четко определенными правилами.

Людям давно известен ряд формальных игр с правилами игры, не допускающими различных толкований: шахматы, домино, шашки, карточные игры и др. Эти игры являются удобной иллюстрацией при изучении основных понятий теории игр, так как терминология теории игр во многом напоминает терминологию, установившуюся в указанных играх. Так, стороны, противостоящие друг другу в конфликтной ситуации, именуются в теории игр «игроками», результат их столкновения называется «выигрышем» одной из сторон. Если в игре участвуют n сторон, то говорят об игре n лиц. Подразумевается, что каждое из этих лиц имеет в игре свои собственные интересы. Так, например, шахматы есть игра двух лиц, преферанс — игра трех лиц.

Наиболее хорошо развита теория игр двух лиц с прямо противоположными интересами, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Такая игра называется игрой с нулевой суммой. Если в этой игре один игрок выиграл A единиц (условных), то его противник проиграл A единиц, или, что то же самое, выиграл $(-A)$ единиц. Такое широкое понимание «выигрыша», включающее как собственно выигрыш, так и проигрыш, оказывается часто удобным при теоретическом анализе.

Так как в такой игре выигрыш одного игрока однозначно определяет выигрыш другого, то можно ограничиться рассмотрением выигрыша только одного игрока. Поэтому условимся говорить о выигрыше 1-го игрока у 2-го. Очевидно, при нашем понимании «выигрыша» это не дает никакого преимущества 1-му игроку и не ограничивает общности задачи. Примером игры с нулевой суммой являются шахматы, если выигрыш оценивать плюс одним очком $(+1)$, проигрыш минус одним очком (-1) , а ничью — в нуль очка (0) .

Игры, анализируемые нами, будут протекать в виде определенной последовательности ходов партнеров и заканчиваться в соответствии с правилами игры некоторым исходом — «выигрышем» 1-го у 2-го. При этом ходом в игре называется момент игры, когда один из партнеров выбирает в соответствии с правилами игры из множества допустимых действий (вариантов) одно конкретное. Такое понимание хода соответствует общепринятому (сравните шахматы, карточные игры). Иногда, впрочем, будем подразумевать под ходом и само решение, принятое игроком в рассматриваемый момент игры.

Правила игры определяют, какая информация о действиях партнеров известна игроку в момент принятия им решения на любом ходу. В зависимости от этого различают игры с полной и неполной информацией. В игре с полной информацией каждый игрок при любом ходе знает все сделанные ранее ходы и состояние игры на данный момент времени; таковы, например, шахматы, где доска с фигурами находится перед игроками, ведущими запись сделанных ходов. Домино — игра с неполной информацией, так как игрокам неизвестны камни, находящиеся у противников. Большинство игр, описывающих реальные конфликтные ситуации, являются играми с неполной информацией, так как секретность, неожиданность действий противника часто представляют собой важнейший элемент конфликтной ситуации.

Изучение теории игр начнем с элементарных формальных игр, анализ которых поможет нам уяснить существенные черты теории и результаты, полученные в ней..

Обратимся к игре в монеты. В ней участвуют два игрока, 1-й и 2-й, имеющие монеты одного достоинства. Партнеры одновременно кладут на стол по монете так, чтобы противник не видел. Если оказывается, что обе монеты лежат одной и той же стороной вверх, то 1-й забирает обе монеты себе, т. е. 1-й выигрывает у 2-го одну монету. Если одна монета лежит вверх решеткой, а другая — гербом, то 2-й забирает монеты себе.

Проанализируем эту игру с точки зрения описанных нами понятий и принятой терминологии: 1) это игра двух лиц с нулевой суммой (выигрыш одного равен проигрышу другого); 2) игра одноходовая: каждый из игроков делает один ход, после чего объявляется результат игры («выигрыш» 1-го у 2-го); 3) каждый из игроков имеет в этой игре два способа действий, две стратегии: положить монету гербом вверх или решеткой вверх.

Сведем информацию об игре в монеты в следующую таблицу:

Таблица 1

		Выборы 2-го игрока							
		герб	решетка						
Выборы 1-го игрока	герб	+1	-1	или короче	<table><tr><td>+1</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>+1</td></tr></table>	+1	-1	-1	+1
	+1	-1							
-1	+1								
решетка	-1	+1							

Здесь строка соответствует выбору 1-м игроком герба (решетки). Столбец соответствует выбору 2-м герба (решетки). Каждому выбору 1-го и 2-го соответствует результат игры, находящийся в клетке на пересечении выбранной 1-м строки и выбранного 2-м столбца и означающий «выигрыш» 1-го у 2-го. Таблица показывает характерную особенность игр: результат однозначно определяется действиями обоих игроков и лишь частично зависит от действия одного игрока.

В одноходовой игре возможные варианты действий игроков (например, выбор игроком решетки или герба) называются *стратегиями*. Характерные черты стратегий проявляются в том, что, как только оба игрока выбрали стратегии, — сразу же становится определенным исход (результат игры). Это чрезвычайно важное свойство стратегии в одноходовой игре дает ключ к пониманию стратегии в многоходовой игре.

В большинстве своем игры являются многоходовыми (шахматы, крестики и нолики, домино, карточные игры). В теории игр показывается, как свести многоходовую игру к одноходовой. Основой такого сведения является понятие стратегии в игре, — одно из основных в теории игр. Представьте себе, что Вы собрались играть в крестики и нолики. В этот момент Вас куда-то вызывают, и Ваш партнер остается один. Вы очень хотите, чтобы партия состоялась, и решаете передать план своей игры знакомому А. Так как А играть не умеет, он просит написать *подробно*, что ему делать. Тогда Вы должны составить такую инструкцию, которая: 1) предусматривает любое положение, могущее возникнуть в партии, например такое (см. табл. 2): ход игрока А (он ставит нолики); 2) для каждого возможного положения указывает однозначно, что должен сделать А. Например, инструкция должна предусматривать, какой первый ход должен сделать А, если он будет начинать партию, или что он должен сказать «я выиграл», если увидит, что после его хода строка, столбец или диагональ квадрата оказалась заполненной крестиками.

Таблица 2

		×
	0	0
×		×

Такая инструкция и есть то, что в теории игр называют стратегией. Конечно, составить такую стратегию для игры в крестики и нолики не так-то просто (не говоря уже о шахматах) и гораздо сложнее, чем играть самому. Действительно, если Вы играете сами, то Вам приходится принимать решения только для небольшой части положений, встретившихся в конкретной партии, а в инструкции надо предусмотреть решения во всех возможных положениях.

Составление стратегии в многоходовых играх — дело весьма трудное. Если для игры «крестики и нолики» можно выписать некоторые стратегии, то для игры в шахматы это практически невыполнимо. Но для нас важно то, что в принципе это можно сделать.

Игроки в играх могут иметь различное количество стратегий. В одноходовой игре стратегия совпадает с ходом. Многоходовая игра может быть приведена (преобразована) к одноходовой, в которой каждый вариант действий будет совпадать со стратегией для первой игры. Многоходовая игра при обычном описании называется игрой в развернутой форме. Процесс приведения ее к одноходовой, т. е. к стратегиям, называется нормализацией, а получающаяся одноходовая игра — игрой в нормальной форме. Поэтому при теоретическом анализе можно, не уменьшая общности, рассматривать игры в нормальной форме. В зависимости от числа возможных стратегий игроков игры подразделяются на «конечные» и «бесконечные». Примером бесконечной игры может быть следующая. 1-й и 2-й игроки одновременно называют по натуральному числу x и y ; тот, кто назвал большее число, выигрывает величину $|x - y|$, если же $x = y$, то никто не выигрывает. В этой игре каждый игрок имеет бесконечное число стратегий: он может назвать любое число из ряда $0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим конечную игру между 1-м и 2-м игроками. Пусть 1-й имеет m стратегий, а 2-й — n стратегий. Через 1_i обозначим i -ю стратегию 1-го игрока, а через 2_j — j -ю стратегию 2-го игрока. Обозначим через a_{ij} выигрыш 1-го игрока, когда он использует i -ю стратегию, а противник — j -ю стратегию. Расположим числа a_{ij} в виде матрицы размером $m \times n$, строки которой соответствуют стратегиям 1_i , а столбцы — стратегиям 2_j . Такая матрица называется матрицей игры, или платежной матрицей. Поэтому конечные игры называют иногда матричными. Выпишем эту матрицу (см. табл. 3).

Таблица 3

$1_i \backslash 2_j$	2_1	2_2	2_3	2_4
1_1				
1_2				
1_3				
1_4				

Теперь можно представить себе, что конечная игра заключается в выборе 1-м игроком строки i , а 2-м игроком столбца j , где выигрыш 1-го у 2-го равен a_{ij} . Обратно, каждая матрица чисел может рассматриваться как матрица игры двух игроков с нулевой суммой.

Можно сказать, что матрицы $(a_{ij})_{m \times n}$ — это математические модели конечных игр двух игроков с m стратегиями у 1-го и n стратегиями у 2-го. Далее будут анализироваться именно платежные матрицы, содержащие всю необходимую информацию о конечных играх.

Итак, от реальной конфликтной ситуации мы переходим к ее математической модели. Ценность нашего формального анализа платежной матрицы будет целиком зависеть от того, насколько адекватно наша модель отражает действительность, так как при переходе к модели мы многое обычно упрощаем, от многого абстрагируемся. Мы переходим, таким образом: 1) от реальных взаимосвязей, законов действия партнеров к *правилам* игры, которые мы уточняем, формализуем; 2) от реальных возможных действий к формальным стратегиям; 3) от реальных оценок результатов столкновения партнеров к формальным платежам, выраженным в *одной и той же* единице измерения. Этот переход таит в себе много трудностей, и построение теоретико-игровой модели для реальной конфликтной ситуации является серьезной проблемой.

Конечно, наша теоретико-игровая модель очень проста и не охватывает массу сторон реальных конфликтных ситуаций. Ее ценность в том, что это — *первая* попытка формально-математически описать конфликтную ситуацию. Такой подход дает *возможность* анализировать конфликтные ситуации и приводит к построению соответствующего аппарата.

2. КОНФЛИКТНЫЕ СИТУАЦИИ, СВОДЯЩИЕСЯ К МАТРИЧНЫМ ИГРАМ

Приведем примеры конфликтных ситуаций, достаточно хорошо описывающихся матричной игрой.

Пусть две торговые компании (А и В) конкурируют между собой в области сбыта однотипных товаров длительного пользования и обслуживают население четырех городов, расположенных так, как указано на рис. 1.

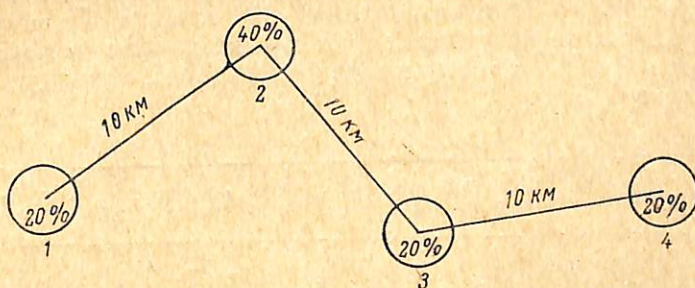


Рис. 1

Пути сообщения между городами указаны на рисунке линиями. Цифры на линиях — расстояния между соседними городами. Если население всех городов принять за 100%, то распределение его в городах характеризуется следующим образом: в 1-м городе — 20%, во 2-м — 40%, в 3-м — 20%, в 4-м — 20%, что указано в кружочках соответствующих городов. Каждая из компаний, желая захватить как можно больший рынок сбыта товаров, решила построить по одному новому магазину. Компания может построить магазин в любом из городов. Из статистики известно, что товарооборот зависит от расстояния между покупателем и магазинами следующим образом.

Компании А принадлежит: 80% оборота в каждом городе, к которому ее магазин ближе; 60% оборота в каждом городе, равноудаленном от обоих

магазинов; 40% оборота в городе, к которому ближе магазин компании В. Рассматриваемая конфликтная ситуация между двумя компаниями может быть описана матричной игрой. Действительно, пусть компания А выполняет роль 1-го игрока, а В — 2-го игрока. У каждого игрока есть четыре стратегии — строить магазин в городе 1, 2, 3, 4. Выигрыш 1-го игрока будем измерять частью оборота в процентах, приходящейся на долю компании А. Тогда, если компания А получает α процентов оборота, то компания В, естественно, теряет α процентов оборота, т. е. мы имеем игру с нулевой суммой. Пусть a_{ij} — выигрыш 1-го игрока, если он выберет i -ю стратегию (строить магазин в городе i), у 2-го, который выбирает стратегию j (строить магазин в городе j). Тогда легко видеть: $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = = (60/100 \cdot 100/100 \cdot 100) \% = 60\%$, $a_{12} = (80/100 \cdot 20/100 + 40/100 \cdot 80/100) \cdot 100\% = = 48\%$; таким же образом $a_{13} = 56\%$, $a_{14} = 64\%$, $a_{21} = 72\%$, $a_{23} = 64\%$, $a_{24} = 68\%$, $a_{31} = 56\%$, $a_{32} = 56\%$, $a_{34} = 72\%$, $a_{41} = 56\%$, $a_{42} = 52\%$, $a_{43} = 48\%$. Запишем платежную матрицу игры (см. табл. 4):

Таблица 4

2-й

1-й

60	48	56	64
72	60	64	68
56	56	60	72
56	52	48	60

Строка i матрицы ($i = 1, 2, 3, 4$) соответствует стратегии 1-го игрока строить магазин в городе i , столбец ($j = 1, 2, 3, 4$) соответствует стратегии 2-го игрока строить магазин в городе j . Мы свели рассматриваемую конфликтную ситуацию к матричной игре двух партнеров с нулевой суммой.

Возьмем другой пример.

Хозрасчетное предприятие встало перед проблемой закупки мазута на зиму. Главному экономисту по опыту прошлых лет известно, что расход мазута в мягкую зиму составляет 8 т, в среднюю — 12 т, в холодную — 16 т. Цена 1 т мазута осенью 6 руб. Зимние цены на мазут зависят от характера зимы и равны соответственно 7, 8 или 9 руб. за тонну в мягкую, среднюю, холодную зиму. Сведем эти данные в табл. 5.

Таблица 5

Характер зимы	Потребность в мазуте, т	Средняя цена 1 т мазута зимой, руб.	Цена 1 т мазута осенью, руб.
Мягкая	8	7	6
Средняя	12	8	
Холодная	16	9	

Финансовые ресурсы предприятия позволяют ему купить до 16 т мазута, резервуары позволяют хранить до 17 т. Экономисты предприятия должны решить вопрос, когда покупать топливо и в каких количествах. При этом они должны учитывать, что емкости, в которых хранится мазут, весной должны быть освобождены для других надобностей и, следовательно, остающееся топливо хранить невозможно: оно пропадет. Для простоты примем, что топливная база отпускает мазут в количествах 8, 12, 16 т и более.

Далее экономист рассуждает так: стоящая передо мной проблема состоит в том, чтобы провести отопительный сезон с наименьшими затратами (выиграть). Природа «в лице» зимы противостоит мне, так как я не знаю, что она «выкинет», и, пожалуй, самое целесообразное для меня рассмотреть эту ситуацию как конфликтную, считая зиму неизвестным лицом с неизвестными «привычками», т. е. противником в игре между мной, т. е. заводом, и зимой. Тогда, рассматривая три стратегии завода — решение купить топливо в количестве 8, 12 или 16 т осенью, а остальное, если надо, зимой, и стратегии «зимы» — «преподнести» заводу мягкую, среднюю или холодную зиму, мы приходим к матричной игре (табл. 6):

Таблица 6

		Стратегии зимы			
Стратегии завода	8	—48	—80	—120	
	12	—78	—72	—108	
	16	—96	—96	—96	

В задаче предполагалось, что ничего не известно о том, как часто бывают мягкие, средние и холодные зимы.

Итак, мы показали, что каждая из рассмотренных экономических задач сводится к матричной игре двух лиц с нулевой суммой или, другими словами, описали каждую из задач как игру. Одно это вселяет в нас уверенность, что введенная теоретико-игровая модель, несмотря на свой элементарный характер, заслуживает разработки и применения.

3. ПРИНЦИПЫ АНАЛИЗА МАТРИЧНЫХ ИГР

До сих пор мы ничего не говорили о методологии теории игр, о том, с каких позиций она подходит к вопросу определения наилучшего поведения, образа действия игроков (что считать наилучшим поведением).

Принципы, лежащие в основе этого подхода, состоят в следующем.

1. Каждый игрок должен считать, что его партнер является не менее искусным противником и преследует в игре противоположную цель (разумность партнера).

2. Необходимо для каждой своей стратегии найти гарантированный выигрыш, не зависящий от действий противника, и выбрать ту стратегию, при которой этот гарантированный выигрыш наибольший (осторожность).

Такое понимание наилучшей линии поведения (наилучшей стратегии) базируется на следующем рассуждении каждого партнера: на любую мою стратегию i искусный противник может ответить такой стратегией j_* , что мой гарантированный выигрыш a_{ij_*} будет наименьшим среди $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$; если я, не желая рисковать, выберу стратегию a_{i_*} , при которой этот гарантированный выигрыш будет наибольшим, то я обеспечу себе выигрыш не меньше чем $a_{i_*j_*}$ независимо от того, какую стратегию выберет противник.

Попытаемся проанализировать с этих позиций матричную игру с платежной матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и найти «наилучшие» стратегии игроков (табл. 7):

Пусть 1-й игрок имеет m стратегий, а 2-й — n стратегий. Стратегиями 1-го игрока являются строки, а стратегиями 2-го — столбцы платежной

Таблица 7

$a_i \backslash a_j$	a^1	a^2		a^j		a^n	
a_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}	a_{1j*}
a_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}	a_{2j*}
a_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}		a_{in}	a_{ij*}
a_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}	a_{mj*}
	$a_{i'1}$	$a_{i'2}$		$a_{i'j}$		$a_{i'n}$	

матрицы A . Далее мы обозначаем через a_i строку i (i -ю стратегию 1-го), а через a^j столбец j (j -ю стратегию 2-го) матрицы A . 1-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а 2-й — минимизировать проигрыш.

Если 1-й выбрал стратегию a_i , то он должен рассчитывать на то, что его противник — 2-й игрок ответит на a_i такой стратегией a^j , при которой выигрыш 1-го a_{ij*} будет наименьшим среди $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$.

Очевидно, что

$$a_{ij*} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}. \quad (1)$$

Присоединим числа a_{ij*} в виде $(n+1)$ -го столбца матрицы A .

Итак, если 1-й выбрал стратегию a_i , то: 1) он опасается, что 2-й не даст ему выиграть больше, чем a_{ij*} ; 2) он гарантирует себе выигрыш не меньший a_{ij*} , независимо от ответных действий противника. Так как 1-й игрок стремится к максимальному выигрышу, то он, действуя осторожно против искусного противника, должен выбрать ту стратегию a_{i*} , при которой его гарантированный выигрыш a_{i*j*} будет наибольшим. Обозначив этот выигрыш через v , из (1) получим:

$$v = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij*} = \max_{1 \leq i \leq m} (\min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}). \quad (2)$$

Величина v называется нижней ценой игры, или максиминном, а стратегия a_{i*} , соответствующая строке, в которой лежит элемент a_{i*j*} , называется максиминной. Название «нижняя цена игры» объясняется тем, что 1-й игрок, придерживаясь максиминной стратегии, гарантирует себе выигрыш не меньший, чем v , независимо от действий противника. 1-й игрок может даже сообщить противнику о выборе стратегии a_{i*} и не заботиться о том, поверил ему 2-й или нет, так как он уверен, что как бы ни поступил 2-й, 1-й выиграет не менее, чем v .

2-й игрок может рассуждать при анализе игры аналогично. Он стремится помешать 1-му достичь своей цели, т. е. стремится сделать выигрыш

1-го как можно меньшим *. Если 2-й выбирает стратегию a^j , то он, рассчитывая на искусного противника, понимает, что 1-й выбирает стратегию a_i , при которой проигрыш 2-го (выигрыш 1-го) будет наибольшим:

$$a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

При этом, если 2-й выбрал a^j , то он уверен, что проиграет 1-му не более a_{ij} , независимо от действий противника. Принцип осторожности теории игр подсказывает ему, что надо выбрать ту стратегию a^j , при которой его гарантированный проигрыш a_{ij} (наибольший выигрыш 1-го) будет наименьшим. Обозначая его через $\bar{v}$, получим:

$$\bar{v} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

Величина $\bar{v}$ называется верхней ценой игры или минимаксом, а соответствующий столбец (стратегия) a^j , в котором лежит элемент a_{ij} , называется минимаксным. Название «верхняя цена игры» объясняется тем, что 2-й игрок, придерживаясь свехосторожной минимаксной стратегии, гарантирует себе проигрыш не более, чем $\bar{v}$, независимо от действий соперника. Он может даже сказать 1-му, что выбрал a^j , и все равно проиграет не более $\bar{v}$, как бы ни поступил 1-й.

Легко показать, что $v \leq \bar{v}$.

Действительно, для любого фиксированного i по определению минимума $\min_{1 \leq k \leq n} a_{ik} \leq a_{ij}$ и для любого фиксированного j по определению максимума $a_{ij} \leq \max_{1 \leq s \leq n} a_{sj}$, откуда

$$\min_{1 \leq k \leq n} a_{ik} \leq \max_{1 \leq s \leq n} a_{sj} \quad (3)$$

Правая часть неравенства (3) не зависит от i , отсюда

$$\max_{1 \leq i \leq m} (\min_{1 \leq k \leq n} a_{ik}) \leq \max_{1 \leq s \leq n} a_{sj}. \quad (4)$$

Левая часть (4) не зависит от j , поэтому

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq k \leq n} a_{ik} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq s \leq m} a_{sj}, \quad (5)$$

т. е. $v \leq \bar{v}$.

Проанализируем с рассмотренной точки зрения игровую модель конфликта между двумя компаниями, изложенную в разделе 2. Найдем в этой игре v и $\bar{v}$ (см. табл. 8).

Имеем $v = 60$, $\bar{v} = 60$. Оказалось, что $v = \bar{v}$. В таких случаях общее значение нижней и верхней цен игры называют *ценой игры*. Мы ее будем обозначать через v . Элемент $a_{22} = 60$, выделенный в матрице игры, обладает интересным свойством: он наименьший в своей строке a_2 и наибольший в своем столбце a^2 : $a_{i2} \leq a_{22} \leq a_{2j}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$). Такой элемент обычно называют *седловой точкой*** матрицы. Седловой

* Так как выигрыш 1-го равен проигрышу 2-го, то 2-й стремится минимизировать свой проигрыш и тем самым максимизировать свой выигрыш.

** Такое название заимствовано из геометрии, где точка (x_0, y_0) на поверхности $z = f(x, y)$ с аналогичными свойствами $f(x_0, y_0) = \min_y f(x_0, y) = \max_x f(x, y_0)$ называется седловой, так как сама поверхность вблизи точки (x_0, y_0) имеет вид седла.

точке a_{22} соответствуют стратегии a_2 1-го игрока и a^2 2-го игрока, обладающие следующими замечательными свойствами:

Таблица 8

$a_i \backslash a^j$	a^1	a^2	a^3	a^4	$a_{i,j*}$
a_1	60	48	56	64	48
a_2	72	60	64	68	60
a_3	56	56	60	72	56
a_4	56	52	48	60	52
$a_{5,i*j}$	72	60	64	72	

1. Если 1-й игрок придерживается *максиминной* стратегии a_2 , а 2-й — *минимаксной* a^2 , то выигрыш 1-го у 2-го равен цене игры v , совпадающей с нижней и верхней ценой игры.

2. Если 1-й игрок отклонится от *максиминной* стратегии a_2 (или 2-й отклонится от *минимаксной* стратегии a^2), то он от этого ничего не выиграет, а может и проиграть. Поэтому стратегии a_2 и a^2 называются *оптимальными*, а упорядоченная тройка (a_2, a^2, v) — решением игры. Значение $v = \bar{v} = a_{22} = v$ является компромиссным выигрышем (проигрышем) игроков, а стратегии a_2 и a^2 обеспечивают игрокам некое *равновесие* в игре. Цена игры как бы удо-

влетворяет обоим партнерам и является не результатом сделки или чего-то подобного, а определяется взаимодействием партнеров, причем каждого в своих интересах. При наличии седловой точки партнеры могут не скрывать друг от друга своих оптимальных стратегий; ведь если 2-й игрок знает, что 1-й выбрал оптимальную стратегию, то никакого преимущества от этого он не получает, так как не может уменьшить выигрыш партнера.

Читатель может проверить, что всеми перечисленными свойствами обладает каждая матричная игра $A = (a_{ij})_{m \times n}$ с седловой точкой $* a_{i*j*}$.

Доказано, что каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, следовательно, решение. Примером игр с полной информацией является игра «крестики и нолики», которая имеет решение. Поэтому данная игра имеет смысл только для игроков, не знающих ее решения. Шахматы тоже имеют седловую точку (это игра с полной информацией). Хотя теоретически решение шахматной игры существует, практически оно не найдено, так как для этого надо построить платежную матрицу, т. е. уметь выписать все возможные стратегии, число которых фантастически велико.

Прежде чем перейти к центральному понятию теории игр — смешанной стратегии, поясним на примере игры между компаниями понятие доминирования (превосходства) стратегии. Рассмотрим матрицу A_1 (табл. 9).

Так как 2-й игрок стремится проиграть 1-му как можно меньше (выигрыш 1-го равен проигрышу 2-го), то 2-й замечает, что стратегия a^4 заведомо хуже, чем a^3 : что бы ни делал 1-й игрок, 2-й, выбрав a^3 , проиграет меньше, чем при стратегии a^4 : $a^4 > a^3$, $a_{i4} > a_{i3}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Эти интуитивные соображения подсказывают, что 2-й не должен никогда выбирать a^4 , и эту стратегию можно вообще не рассматривать при анализе игры. При этом говорят, что a^3 превосходит a^4 . Тогда для решения игры достаточно найти решение игры с матрицей A_2 из табл. 9.

1-й игрок стремится выиграть у 2-го как можно больше. Он замечает, что стратегия $\bar{a}_3$ для него хуже, чем $\bar{a}_4$; выбрав a_3 , 1-й выиграет у 2-го (как бы тот ни действовал) *не меньше, чем при $\bar{a}_4$* : $\bar{a}_3 \geq \bar{a}_4$, $a_{3j} \geq a_{4j}$, $j = 1, 2, 3$. Поэтому 1-му лучше выбрать $\bar{a}_3$, чем $\bar{a}_4$, так как при этом он

* Чтобы матрица игры имела седловую точку, надо выбрать любую клетку (i_0, j_0) матрицы и записать туда любое число $a_{i_0 j_0}$; далее в строчке i_0 записать какие-то числа, не меньшие $a_{i_0 j_0}$, а в столбец j_0 записать какие-либо числа, не большие $a_{i_0 j_0}$; остальные клетки матрицы заполнить произвольным образом. Полученная матрица будет иметь седловую точку $a_{i_0 j_0}$.

может только выиграть и ничего не проиграет. В этом случае говорят: $\bar{a}_3$ превосходит $\bar{a}_4$. Тогда для решения второй (а следовательно, и исходной) игры достаточно найти решение игры с матрицей A_3 из табл. 9. Рассуждая

Таблица 9

Figure 1 illustrates the construction of the A_3 matrix. The process starts with matrix A_1 (4x4) and matrix A_2 (4x4). Matrix A_1 is transformed into matrix A_3 (4x4) by adding the first row to the other rows. Matrix A_3 is then transformed into matrix A_4 (3x3) by removing the first row and column. Matrix A_4 is transformed into matrix A_5 (2x2) by removing the first row and column. The final result is matrix A_3 , which is a 4x4 matrix with values: Row 1: [60, 48, 56, 64], Row 2: [72, 60, 64, 68], Row 3: [56, 56, 60, 72], Row 4: [56, 52, 48, 60].

аналогично, мы найдем: в A_3 стратегии $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_3$ 1-го игрока заведомо хуже стратегии $\bar{a}_2 : \bar{a}_2 > \bar{a}_3, \bar{a}_2 > \bar{a}_4$. Поэтому их можно исключить и свести исходную игру к игре с матрицей A_4 . В игре с матрицей A_4 стратегии $\bar{a}^1, \bar{a}_3$ 2-го игрока заведомо хуже стратегии $\bar{a}^2$, так как $72 > 60, 64 > 60$. Поэтому их можно выбросить, и мы приходим к выводу, что оптимальными стратегиями в исходной игре будут a_2 и a^3 , а цена игры равна 60. Этот результат совпадает с полученным нами ранее.

Выявление в матричной игре доминирующих стратегий позволяет упростить игру, что облегчает ее последующий анализ.

4. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ, ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Если бы каждая матричная игра имела седловую точку, то мы могли бы решать матричные игры. Элементарный пример игры в монеты убеждает нас в противном (см. табл. 10), т. е. игра в монеты не имеет седловой точки. Легко видеть, что для игроков 1-го и 2-го ни одна из их стратегий не может рассматриваться в качестве оптимальной. Действительно, предположим, что оптимальные стратегии игроков — соответственно a_1 и a^2 . Это значит, что 1-й проигрывает 2-му монету (выигрывает (-1)), т. е. $v = -1$. Мы уже отмечали, что характерным свойством оптимальных стратегий является отсутствие секретности в игре: один партнер может сообщить другому свою оптимальную стратегию и от этого 1-й ничего не теряет, а 2-й ничего не выиграет. Посмотрим с этой точки зрения на предполагаемые оптимальные стратегии a_1 и a^2 . Если 1-й узнает, что 2-й выб-

Таблица 10

	a^1	a^2	a_{ij*}
a_1	+1	-1	-1
a^2	-1	+1	-1
a_{i*j}	+1	+1	

Таблица 10

	a^1	a^2	a_{ij*}
a_1	$+1$	-1	-1
a^2	-1	$+1$	-1
$a_{i:j}$	$+1$	$+1$	

рал a^2 , то он, выбрав a_2 , увеличит свой выигрыш — выиграет монету, что не согласуется со свойством оптимальных стратегий. Аналогичная ситуация возникает, если предположить оптимальными любую пару стратегий 1-го и 2-го. Читатель может это проверить. Таким образом, в этой игре информация о выборе стратегии одним из партнеров на руку противнику, так как увеличивает его выигрыш.

Вывод один: каждый игрок должен действовать так, чтобы противник не догадался о выбранной стратегии.

Если бы игроки играли только одну партию и ничего не знали о предполагаемом выборе стратегии противником, то не имело бы смысла говорить о предпочтительности одной стратегии другой. Пусть играется ряд партий. Легко видеть, что 1-й не должен во всех партиях придерживаться одной и той же стратегии, так как 2-й разгадает это и использует в своих целях. Значит, 1-й должен иногда выбирать a_1 , а иногда a_2 . Из соображений симметрии платежной матрицы интуитивно кажется, что 1-й должен выбирать a_1 так же часто, как и a_2 (ниже мы это докажем). При этом 1-й не должен выбирать a_1 и a_2 в какой-то определенной последовательности, так как 2-й может разгадать эту систему и предугадывать заранее ход 1-го.

Итак, мы пришли к тому, что 1-й должен смешивать стратегии a_1 и a_2 (отсюда название *смешанная стратегия*) и с одинаковой частотой выбирать то a_1 , то a_2 , придерживаясь такой «системы», которую нельзя отгадать (например, путем подбрасывания монеты). Это означает, что игрок для выбора своей стратегии должен применять такой способ выбора, результат которого заранее трудно (невозможно) точно предсказать.

Одним из таких способов является случайный выбор посредством жребия или подходящего случайного механизма. При этом противник не имеет возможности узнать заранее о Вашем выборе, так как заранее он неизвестен и Вам самому.

Смешанной стратегией для 1-го будет вектор $X = (x, 1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$, означающий: выбирай a_1 с вероятностью x , a_2 — с вероятностью $1 - x$.

Аналогично для 2-го смешанной стратегией будет $Y = (y, 1 - y)$, $0 \leq y \leq 1$.

Итак, пусть мы используем случайный механизм, реализующий смешанную стратегию $X = (x, 1 - x)$, т. е. механизм, который с вероятностью x дает нам a_1 и с вероятностью $(1 - x)$ — стратегию a_2 , а противник, используя случайный механизм, выбирает a^1 с вероятностью y , a^2 — с вероятностью $(1 - y)$. Тогда 1-й выигрывает: $a_{11} = 1$ с вероятностью xy , $a_{12} = -1$ с вероятностью $(1 - x) \cdot y$, $a_{21} = -1$ с вероятностью $(1 - x) \cdot y$ и $a_{22} = 1$ с вероятностью $(1 - x)(1 - y)$. Математическое ожидание $E(X, Y)$ выигрыша для 1-го будет равно: $E(X, Y) = 1 \cdot xy + (-1)x(1 - y) + (-1)(1 - x)y + 1 \cdot (1 - x)(1 - y) = 4xy - 2x - 2y + 1 = 4x(y - 1/2) - 2(y - 1/2) = 4(x - 1/2)(y - 1/2)$.

Отсюда видно, что если $x = 1/2$, т. е. 1-й с вероятностью $1/2$ выбирает a_1 и с вероятностью $(1 - x) = 1/2$ выбирает a_2 , то, независимо от действий 2-го, среднее значение выигрыша 1-го (математическое ожидание выигрыша 1-го) в партии будет равно 0. Более того, 1-й не может обеспечить себе выигрыша, большего 0, так как 2-й, выбрав $y = 1/2$, может гарантировать себе проигрыш, не больший 0. Если 1-й выберет $x \neq 1/2$, то 2-й, выбрав y так, что $E(X, Y) < 0$, выиграет у 1-го. Аналогично, 2-му невыгодно отклоняться от смешанной стратегии $Y = (1/2, 1/2)$. Отсюда вытекает, что оптимальным планом игры для 1-го (и также для 2-го) будет: смешанная стратегия $X_0 = Y_0 = (1/2, 1/2)$, т. е. выбор a_1 и a_2 (a^1 и a^2) с вероятностью $1/2$. При этом цена игры, т. е. математическое ожидание выигрыша 1-го, будет

равна 0. Заметим, что в данном случае для всех стратегий X и Y тривиально выполняется условие:

$$E(X, Y_0) \leq E(X_0, Y_0) \leq E(X_0, Y), \quad (6)$$

т. е. (X_0, Y_0) — седловая точка функции $E(X, Y)$.

Стратегии в старом смысле, т. е. a_i, a^j , мы будем называть *чистыми стратегиями*, что весьма естественно.

До сих пор мы говорили о случайных механизмах, реализующих вероятности различных выборов. Проще говорить об относительных частотах, с которыми выбираются чистые стратегии. Далее будем часто говорить именно так.

Теперь мы подготовлены к введению понятия смешанной стратегии в общем виде. Рассмотрим снова матричную игру с платежной матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Смешанной стратегией 1-го игрока назовем вектор-строку

$X = (x_1, \dots, x_m)$, где $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m x_i = 1$; смешанной стратегией 2-го игро-

ка назовем вектор-столбец $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, где $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Выбор смешанной стратегии X для 1-го означает, что он должен выбирать свою чистую стратегию a_i с вероятностью (частотой) x_i ($i = 1, \dots, m$). Аналогичный смысл имеет для 2-го смешанная стратегия Y . С этой точки зрения чистая стратегия $a_i(a^j)$ есть смешанная стратегия, у которой $i(j)$ -я компонента равна 1, а остальные — нулю.

$$X^{(i)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_j), \quad Y^{(j)} = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_j).$$

Обозначим их для удобства через $\tilde{a}_i$ и $\tilde{a}^j$, подчеркивая связь с $a_i(a^j)$. Если 1-й применяет смешанную стратегию $X = (x_1, \dots, x_m)$, а 2-й — смешанную стратегию $Y = (y_1, \dots, y_n)$, то средний выигрыш 1-го игрока (математическое ожидание выигрыша) будет:

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = X \cdot A \cdot Y^*.$$

По аналогии с (6) смешанные стратегии X^* и Y^* мы назовем оптимальными для 1-го и 2-го в игре с матрицей A , если для любых стратегий X и Y 1-го и 2-го игроков выполняется условие:

$$\underbrace{E(X, Y^*)}_{\alpha} \leq \underbrace{E(X^*, Y^*)}_{\beta} \leq E(X^*, Y). \quad (7)$$

При этом ценой игры v называется число $E(X^*, Y^*)$ — средний выигрыш 1-го, достигаемый при оптимальных стратегиях игроков.

Рассмотрим наше определение с содержательной точки зрения:

1) из α следует, что если 2-й придерживается оптимальной стратегии Y^* , то он проиграет не более, чем $v = E(X^*, Y^*)$, независимо от стратегии 1-го; при отклонении 1-го от оптимальной стратегии 1-й может разве лишь потерять и не может увеличить выигрыш;

* Через $(y_1, \dots, y_n)^T$ обозначается вектор-столбец $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

** 1-й игрок выигрывает у 2-го a_{ij} с вероятностью x_i , так как 1(2)-й выбирает $a_i, (a^j)$ с вероятностью $x_i, (y_j)$. $X \cdot A \cdot Y$ означает произведение вектор-строки X матрицы A и вектор-столбца Y .

2) из β вытекает, что если 1-й выбрал X^* , то он выиграет не менее v , независимо от стратегии 2-го; отклонение 2-го от своей оптимальной стратегии может разве лишь увеличить его проигрыш, и не может его уменьшить.

Тройку (X^*, Y^*, v) будем называть решением игры (в смешанных стратегиях).

Очевидно, что v — наибольшее среднее значение выигрыша для 1-го и одновременно наименьшее среднее значение проигрыша для 2-го, а стратегии X^* и Y^* — средства достижения этого равновесия. Если игра многократно повторяется, а игроки придерживаются оптимальных стратегий, то цена игры будет средним значением выигрыша для 1-го. Из закона больших чисел вытекает, что при достаточно большом числе партий средняя величина выигрыша для 1-го, приходящаяся на одну партию, будет стремиться к цене (с очень большой вероятностью). Читатель может убедиться в этом, рассмотрев много партий игры в монеты, где выигрыш в одной партии равен $+1$ или -1 (а цена $v = 0$). Но в среднем (при многократном повторении) выигрыш 1-го стремится к 0. Таким образом, наше определение оптимальных стратегий и цены игры согласуется с принятой нами точкой зрения.

Возникает естественный вопрос: всякая ли игра имеет решение? Ответ на него мы дадим далее, а пока укажем, что если матричная игра имеет решение, то цена игры — единственная.

Важно отметить, что для оптимальности стратегий X^* , Y^* необходимо и достаточно, чтобы неравенство (7) выполнялось не для всех стратегий X и Y , а только для чистых стратегий a_i и a^j (или, что то же самое, для смешанных стратегий $\tilde{a}_i$ и $\tilde{a}^j$), т. е. чтобы

$$E(\tilde{a}_i, Y^*) \leq E(X^*, Y^*) \leq E(X^*, \tilde{a}^j). \quad (8)$$

Условие (8) может быть принято за второе определение оптимальных стратегий и цены игры.

Из этого свойства следует, что для проверки двух стратегий X и Y на оптимальность достаточно проверить выполнение для них условия (8) (а не условия (7)).

Ранее указывалось, что игра имеет единственную цену. Оказывается, что при этом игра может иметь много оптимальных стратегий. Например, читатель легко убедится (используя сказанное выше), что в игре с платежной матрицей:

2	4	11
7	4	2

$$v = 4, \\ X_1 = (2/9, 7/9), \quad Y_1 = (0, 1, 0), \\ X_2 = (3/2, 2/5), \quad Y_2 = (0, 1, 0).$$

Стратегии X_1 , Y_1 , и X_2 , Y_2 — оптимальные. Более того, если (X^*, Y^*, v) — решение игры и X_1 (Y_1) — тоже оптимальная стратегия для 1 (2)-го, то при $0 \leq \alpha \leq 1$ оптимальными стратегиями для 1-го и 2-го являются соответственно $X^\alpha = \alpha \cdot X^* + (1 - \alpha) X_1$ и $Y^\alpha = \alpha Y^* + (1 - \alpha) \cdot Y_1$.

Понятие смешанной стратегии оказалось весьма плодотворным. Было показано, что если для матричной игры с нулевой суммой рассматривать не только чистые стратегии, но и смешанные, то любая матричная игра имеет решение. В этом и состоит основная теорема теории игр, впервые доказанная в 1928 г. выдающимся американским математиком Дж. фон

Нейманом. Далее мы укажем один из возможных путей ее доказательства, а сейчас приведем ее формулировку.

Основная теорема теории игр. *Каждая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.*

Отметим еще одно важное свойство оптимальных стратегий, которое может оказаться полезным при отыскании решения игры. Рассмотрим чистые стратегии игрока. Назовем стратегию a_i полезной, если она входит хоть в какую-нибудь оптимальную смешанную стратегию (т. е. употребляется в ней с ненулевой частотой). Тогда: если 1-й выбрал оптимальную стратегию, а 2-й использует только свои полезные стратегии и при том как угодно, то выигрыш 1-го равен цене игры.

5. ТЕОРИЯ ИГР И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

И теория игр и линейное программирование возникли из потребностей практики и были вызваны появлением широкого круга задач экстремального характера. Первоначально они развивались почти независимо друг от друга. В 1951 г. американский математик Данциг установил глубокую и красивую связь между этими математическими теориями. Оказалось, что основная теорема теории игр есть своеобразная форма теоремы двойственности линейного программирования, что каждой игре можно сопоставить эквивалентную пару двойственных задач линейного программирования и обратно — каждой паре разрешимых двойственных задач эквивалентную им игру.

Поясним эти фундаментальные выводы.

Пусть имеется игра с платежной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, решение которой надо найти. Используя определение оптимальных стратегий, цены игры и их свойства, попытаемся сформулировать математическую задачу их отыскания. Обозначим оптимальные стратегии и цену через X, Y, v .

1. Стратегии игроков — это векторы $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, удовлетворяющие условиям

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (a)$$

$$y_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (б)$$

2. Пусть 1-й игрок придерживается оптимальной стратегии X , а 2-й игрок выбирает стратегию a^j . Тогда средний выигрыш 1-го игрока $E(X, a^j)$,

равный $\sum_{i=1}^m x_i a_{ij}$, $1 \leq j \leq n$, должен в силу (8) быть не меньше, чем v .

Следовательно, оптимальная стратегия X должна удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (в)$$

3. 1-й игрок стремится выбрать такую стратегию, которая сделает его гарантированный выигрыш (в данном случае v) максимально возможным. Это означает, что из всех X и v , удовлетворяющих (а), (в), надо найти такие, чтобы v было максимальным.

Отсюда, оптимальная стратегия X для 1-го и цена игры v должны удовлетворять условиям следующей задачи линейного программирования:

$$v \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Рассуждая аналогично относительно оптимальной стратегии $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ 2-го игрока и учитывая, что он стремится сделать свой гарантированный проигрыш v минимально возможным, получаем, что Y и v должны удовлетворять условиям следующей задачи линейного программирования:

$$v \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \leq v, \quad i = 1, \dots, m, \quad (9')$$

$$\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Можно показать, что задачи (9) и (9') взаимно двойственные, обе они разрешимы, и, следовательно, по теореме двойственности, если X^* и v_1 — решение задачи 9, а Y^* и v_2 — решение задачи (9'), то $v_1 = v_2 = v^*$.

Нетрудно убедиться, что найденные X^* , Y^* , v удовлетворяют условию (8) и, следовательно, дают нам решение игры с платежной матрицей A .

Сведение игры к паре двойственных задач линейного программирования дает нам возможность применять для анализа матричных игр любые вычислительные методы линейного программирования.

6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИГР

а) **Графические методы решения простых игр.** Пусть дана игра с платежной матрицей (табл. 11).

Таблица 11

	a^1	a^2	a^3
a_1	4	0	2
a_2	6	7	1

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости XOZ (рис. 2). Смешанную стратегию $(x, 1-x)$, $0 \leq x \leq 1$ 1-го игрока будем изображать точкой с координатами $(x, 0)$ и говорить, что «они соответствуют друг другу». Точка $(x, 0)$ однозначно определяет смешанную стратегию 1-го игрока.

Пусть 1-й выбрал смешанную стратегию $X = (x, 1-x)$. Если при этом 2-й выберет стратегию a^1 , a^2 или a^3 , то ожидаемый (средний) выигрыш 1-го будет соответственно равен: $4x + 6(1-x) = 6 - 2x$; $0 \cdot x + 7(1-x) = 7 - 7x$; $2x + 1(1-x) = x + 1$.

* Заметим, что, сведя игру к паре взаимно двойственных задач (9) и (9') и доказав их разрешимость, мы тем самым докажем основную теорему теории игр.

Проведем на сегменте $[0, 1]$ — области стратегий 1-го игрока — три прямые ($z_1 = 6 - 2x$, $z_2 = 7 - 7x$, $z_3 = x + 1$) ожидаемых выигрышей для 1-го при его стратегии $(x, 1 - x)$, когда 2-й выбирает соответственно a^1 , a^2 или a^3 . При выборе стратегии $(x, 1 - x)$ 1-й может быть уверен, что он гарантирует себе выигрыш не меньший, чем минимальная из ординат z_1, z_2, z_3 , соответствующих x . Мы ищем оптимальную стратегию $(x^*, 1 - x^*)$ для 1-го, т. е. такую, при которой его минимальный выигрыш (независимо от поведения 2-го) достигал бы максимума. Геометрически это означает, что мы ищем такое x , при котором наименьшая из ординат z_1, z_2, z_3 будет больше, чем при любом другом x . Для этого строим нижнюю границу выигрыша 1-го при стратегиях a^1, a^2, a^3 2-го, т. е. ломаную $N_0 N^* N_1$ (жирная линия). Какую бы стратегию $(x, 1 - x)$ ни выбрал 1-й, его минимальный выигрыш будет равен ординате $x N_x$. В соответствии с основной теоремой оптимальная стратегия для 1-го — выбрать точку x^* , для которой ордината $x^* N^*$ наибольшая. Очевидно, ордината $x^* N^*$ — цена игры, а $(x^*, 1 - x^*)$ — оптимальная стратегия для 1-го. Для вычисления x^* и цены заметим, что точка N^* есть точка пересечения прямых z_2 и z_3 . Решив совместно уравнения $z_2 = 7 - 7x$, $z_3 = x + 1$, имеем: $x^* = 3/4$, $N^* = (3/4, 1/4)$.

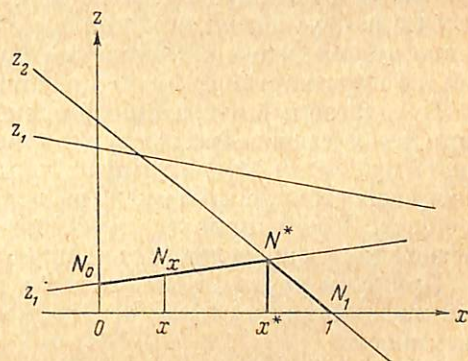


Рис. 2

Для нахождения оптимальной стратегии 2-го игрока заметим, что ему невыгодно применять чистую стратегию a^1 , так как в этом случае, независимо от поведения 1-го, он проиграет больше, чем при стратегии a^3 , так как стратегия a^3 доминирует над a^1 . Это непосредственно видно из чертежа: прямая z_1 лежит выше, чем z_3 , на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, a^1 не входит в оптимальную стратегию для 2-го. Значит, в оптимальную стратегию для 2-го могут входить только a^2 и a^3 .

Пусть $(0, y, 1 - y)$ — оптимальная стратегия для 2-го. Так как $v = 3/4$ — цена игры, то, используя свойства оптимальной стратегии, получим уравнение: $0 \cdot y + 2(1 - y) = 13/4$, откуда $y = 1/8$, $y^* = (0, 1/8, 7/8)$.

Итак, $X^* = (3/4, 1/4)$ и $Y^* = (0, 1/8, 7/8)$ — оптимальные стратегии, а $v = 3/4$ — цена игры.

Используя аналогичные рассуждения, читатель сможет решить любую матричную игру, в которой один из партнеров имеет только две чистые стратегии (игры типа $m \times 2, 2 \times n$). Если бы мы захотели распространить графический метод на игры типа $m \times n$, то, очевидно, потребовался бы переход в m -мерное пространство и наши построения для $m > 3$ стали бы нереализуемыми.

б) Методы линейного программирования. Так как игра может быть сведена к паре двойственных задач линейного программирования, то для ее решения можно использовать все вычислительные методы линейного программирования.

в) Итеративный метод решения игр (метод Брауна). Часто при решении практической задачи возникает ситуация, в которой можно довольствоваться приближенным решением игры, дающим средний выигрыш, достаточно близкий к цене игры. Заметим, что даже простой анализ платежной матрицы и нахождение нижней $\underline{v}$ и верхней $\bar{v}$ цен игры может оказаться весьма полезным, так как он укажет пределы, в которых лежит

цена игры: $v \leq \underline{v} \leq \bar{v}$. Если промежуток между $\underline{v}$ и $\bar{v}$ весьма мал, т. е. $\underline{v}$ и $\bar{v}$ близки друг к другу, то часто можно не искать точное решение, а выбрать минимаксную и максиминную стратегии. Это весьма грубый, приближенный метод. Имеются приближенные методы, которые дают возможность найти цену игры, а в ряде случаев — оптимальные стратегии, с любой наперед заданной степенью точности. Использование «хороших» приближенных методов можно оправдывать тем, что сами платежные матрицы при анализе конкретной игровой ситуации строятся с определенной долей погрешности, которая влечет неточность точного решения игры.

Идея итеративного метода Брауна заключается в том, что если два разумных человека будут достаточно много раз сталкиваться с одной и той же игровой ситуацией (матричной игрой), каждый раз разрешать ее так или иначе и оценивать последствия, то они постепенно накопят опыт, обучатся и найдут довольно приемлемое для обоих «решение» вопроса. Естественно думать, что при удлинении процесса повторения и анализа одной и той же игры партнеры будут приближаться к оптимальному решению.

Предлагаемый итеративный процесс базируется, таким образом, на традиционном статистическом принципе: основывать будущие решения на опыте предыстории. Каждый из партнеров стремится максимально увеличить свой возможный выигрыш, полагая, что будущее будет походить на прошлое. Такой принцип максимизации после совершения 1-м игроком первого хода определит дальнейшую последовательность партий игры.

При этом первый ход 1-го игрока довольно произволен, так как никакой информации о втором партнере у 1-го нет, кроме предположения о его разумности.

Пусть 1-й выбирает стратегию a_i и сообщает об этом 2-му. Тогда 2-й выберет в ответ (на своем первом ходе) такую стратегию a^j , которая делает минимальным его проигрыш a_{ij} , т. е. наилучшую против a_i .

Пусть партнеры сыграли k партий и очередь хода за 1-м, который имеет информацию о всех предыдущих партиях. Изучив информацию о первых k партиях, 1-й установил, что его противник использовал в них: первую чистую стратегию — k_1^2 раз, вторую — k_2^2 раз, i -ю — k_i^2 раз, n -ю — k_n^2 раз. Тогда 1-й игрок делает предположение, что 2-й придерживается в игре смешанной стратегии $Y^{(k)} = (k_1^2/k, k_2^2/k, \dots, k_n^2/k)^T$ и выбирает в $(k+1)$ -й партии (на своем $(k+1)$ -м ходе) такую стратегию $a_{i_{k+1}}$, которая дает ему максимум выигрыша против $Y^{(k)}$.

Аналогично, 2-й игрок, обнаружив после l партий, что 1-й применял первую чистую стратегию k_1^1 раз, вторую — k_2^1 раз, m -ю — k_m^1 раз, предполагает, что 1-й придерживается смешанной стратегии $X^{(k)} = (k_1^1/k, k_2^1/k, \dots, k_m^1/k)$, и выбирает в $(k+1)$ -й партии (на своем $(k+1)$ -м ходе) такую стратегию a^j_{k+1} , которая обеспечивает ему

минимальный средний проигрыш $\sum_{i=1}^m (k_i^1/k) a_{ij} = (X^{(k)} \cdot a^j)$ против стратегии $X^{(k)}$ * 1-го игрока.

Такая процедура поочередного выбора игроками стратегий представляет схему итерационного процесса, которую легко формализовать. Известно, что после достаточно большого числа партий средние выигрыши игроков в описанном процессе будут стабилизироваться и стремиться к цене игры v .

Описанный процесс сходится весьма медленно. И все же он позволяет получить приближенное решение игры, выявить полезные стратегии. Цен-

* Такой подход представляется благоразумным, если противник действительно применяет некоторую смешанную стратегию. В игре с природой такое предположение, например, представляется естественным.

ность этого метода еще и в том, что его трудоемкость растет приблизительно пропорционально числу строк и столбцов платежной матрицы и поэтому для больших m и n он позволяет значительно быстрее найти решение, чем при использовании методов линейного программирования. Делаются попытки модифицировать этот метод, чтобы ускорить его сходимость.

Мы рассмотрели лишь основные понятия и факты теории игр, приложения которой к экономике связаны с именами Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна — авторов монографии «Теория игр и экономическое поведение»*. Их программа заключалась в разработке моделей и методов анализа сначала простых, а потом и сложных экономических явлений конфликтного характера. Хотя в настоящее время теория игр представляет собой достаточно развитую дисциплину, до сих пор не вполне ясны перспективы ее применения для анализа сложных проблем экономики. Вместе с тем теория игр уже получила применение в ряде других важных областей: в исследовании боевых операций, в теории статистических решений.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Д. Вильямс. Совершенный стратег, или букварь по теории стратегических игр. М., «Сов. радио», 1960.
2. Дж. Мак Кинси. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1966.
3. Р. Д. Льюис и Х. Райфа. Игры и решения. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

Поступила в редакцию
10 X 1966

* Имеется в виду монография этих авторов: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, 1953.