46 руб., что представляется не совсем оправданным. Действительно, по этой цене радиолы были очень быстро распроданы.

Возьмем теперь другой пример.

За 11 месяцев 1964 г. было реализовано 307 радиоприемников «Фестиваль», запас на 1 декабря 1964 г. составил 61 шт.

Таким образом, среднедневная реализация радиоприемников данной марки за 11 месяцев была равна: 307 шт. / 330 дней = 0,93 шт. / день.

Исходя из этого, запас на 1 декабря 1964 г. равен:

$$61 \text{ шт.} : 0{,}93 \text{ шт.} / \text{день} \approx 65 \text{ дней.}$$

Поскольку по действующей цене 207 руб. радиоприемники «Фестиваль», хотя и медленно, но все же продавались, можно утверждать, что цена $b$ существенно больше действующей. Встает вопрос: насколько больше? Учитывая весь ход реализации за 11 месяцев (радиоприемники продавались хорошо в январе и феврале, затем с марта наступило резкое сокращение среднедневной реализации, а в октябре и ноябре она несколько поднялась), можно предположить, что $\beta$ не превышает 1,4—1,5. В случае, когда $\beta$ существенно отличается от 2, следует пользоваться формулами (1) и (5).

Принимая $\beta = 1{,}5$, определяем новый уровень цены на радиоприемники «Фестиваль»:

$$\bar{x}_0 = \frac{207 \cdot 307}{368} = 172{,}7 \text{ руб.},$$

$$a = 172{,}7 + \frac{207 - 172{,}7}{1{,}5} = 195 \text{ руб.}$$

Таким образом, новую цену следовало установить на уровне 195 руб. Фактически цена была снижена до 162 руб. 50 коп., что, по нашему мнению, опять-таки было не совсем обоснованно. Подтверждается это тем, что по цене 162 руб. 50 коп. подавляющая часть имевшихся в запасе приемников «Фестиваль» была продана в течение декабря 1964 г.

Применение формул (1) — (5) возможно при наличии хорошего учета реализации товаров в натуральном или стоимостном выражении. Количество реализованного товара — один из главных показателей, характеризующих спрос на товар. Чем больше было продано товара за выбранный промежуток времени, тем меньше должно быть снижение цены на этот товар. Без тщательного изучения хода реализации каждого товара невозможно применение точных методов его переоценки.

Поступила в редакцию
25 XII 1964

## ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТА

И. В. АЛЕКСЕЕНКО

*(Москва)*

В настоящее время все более широкое применение сложных систем приводит к постановке и решению ряда проблем, связанных с их исследованием [1]. Например, на практике часто возникает задача об оценке неизвестных параметров сложной системы по результатам наблюдений некоторых ее характеристик.

Если среди неизвестных параметров системы есть такие, которые можно наблюдать непосредственно, то по известным правилам статистики [2] для них находятся несмещенные состоятельные эффективные оценки.

Но существуют и такие параметры системы, которые наблюдать непосредственно невозможно, поэтому для оценки этих параметров обычно используют косвенные наблюдения.

Сформулируем задачу в общем случае.

Пусть параметры $a_k (k = 1, \ldots, n)$, которые характеризуют сложную систему, неизвестны и пусть наблюдаются некоторые функции, связывающие эти параметры,

$$f_i = f_i(t, a_1, \ldots, a_n), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Требуется по результатам наблюдений этих функций оценить параметры системы $a_k (k = 1, \ldots, n)$.

В том случае, когда неизвестные параметры связаны линейной зависимостью, найти их оценки можно методом, описанным в [3].

Остановимся на более общем случае, когда неизвестные параметры связаны нелинейно. Пусть функции (1) дифференцируемы. Для определения оценок $\tilde{a}_k (k = 1, \ldots, n)$ для параметров $a_k (k = 1, \ldots, n)$ воспользуемся методом наименьших квадратов.

Пусть независимые наблюдения функций $f_i (i = 1, \ldots, m)$ проводятся в моменты времени $t_j (j = 1, \ldots, N)$. Тогда в результате $N$ измерений получим $Nm$ случайных величин

$$\bar{f}_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

каждая из которых представляет собой сумму

$$\bar{f}_{ij} = f_{ij} + \Delta f_{ij},$$

где $f_{ij}$ — истинное значение функции $f_i$ в момент времени $t_j$, а $\Delta f_{ij}$ — погрешность измерения.

По методу наименьших квадратов оценки $\tilde{a}_k (k = 1, \ldots, n)$ находятся из условия минимума функционала:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \frac{[\bar{f}_{ij} - f_{ij}(a_1, \ldots, a_n)]^2}{\sigma_{ij}^2}.$$

Отсюда необходимые условия минимума имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ij}^2} (\bar{f}_{ij} - \tilde{f}_{ij}) \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial a_1} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ij}^2} (\bar{f}_{ij} - \tilde{f}_{ij}) \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial a_2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{ij}^2} (\bar{f}_{ij} - \tilde{f}_{ij}) \frac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial a_n} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\tilde{f}_{ij}$ и $\dfrac{\partial \tilde{f}_{ij}}{\partial a_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ означает, что значения функций и их производных берутся в точке $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$.

Для того чтобы решить систему уравнений (3), нужно вместо $f_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, N)$ подставить их численные значения (2), а производные $\dfrac{\partial f}{\partial a_k}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, N;\ k = 1, \ldots, n)$ найти, продифференцировав функции (1) по всем параметрам $a_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Оценки $\tilde{a}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, найденные при решении системы уравнений (3), являются асимптотически эффективными [3].

Но, к сожалению, в большинстве случаев система уравнений (3) в явном виде не решается, поэтому будем искать оценки параметров в виде ряда:

$$\tilde{a}_k = a_k{}^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta a_k^{(\nu)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $a_k^0$ — начальное приближение оценки $k$-го параметра, а $\Delta a_k^{(\nu)}$ — поправка $\nu$-го приближения. Каждая $s$-я частичная сумма ряда (4)

$$a_k^{(s)} = a_k{}^0 + \sum_{\nu=1}^{s} \Delta a_k^{(\nu)} = a_k^{(s-1)} + \Delta a_k^{(s)}, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{5}$$

является $s$-м приближением искомых оценок.

Значения $a_k^{(s)}$ $(k=1,\ldots,n;\ s=1,2,\ldots)$ удовлетворяют системе (3), поэтому

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\bar f_{ij}-f_{ij}^{(s)}\right)\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_1}\right)^{(s)}=0,\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\bar f_{ij}-f_{ij}^{(s)}\right)\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_2}\right)^{(s)}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\bar f_{ij}-f_{ij}^{(s)}\right)\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_n}\right)^{(s)}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

где $f_{ij}^{(s)}$ и $\left(\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial a_k}\right)^{(s)}$ $(k=1,\ldots,n)$ означает, что значения функций и их производных берутся в точке $s$-го приближения оценок для параметров.

Разложим функции $f_{ij}^{(s)}$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,N)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(s-1)$-го приближения $(a_1^{(s-1)},\ldots,a_n^{(s-1)})$ по степеням поправок $\Delta a_1^{(s)},\ldots,\Delta a_n^{(s)}$.

Отбросив члены ряда порядка $(\Delta a_k^{(s)})^2$ $(k=1,\ldots,n)$ и выше, получим

$$f_{ij}^{(s)}\cong f_{ij}^{(s-1)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_k}\right)^{(s-1)}\Delta a_k^{(s)},\quad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,N,\ s=1,2,\ldots.\tag{7}$$

Подставим в систему уравнений (6) вместо функций $f_{ij}^{(s)}$ их выражения, взятые из формул (7), а вместо производных $(\partial f_{ij}/\partial a_k)^{(s)}$ — производные в точке $(s-1)$-го приближения. Получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_1}\right)^{(s-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_k}\right)^{(s-1)}\Delta a_k^{(s)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\bar f_{ij}-f_{ij}^{(s-1)}\right)\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_1}\right)^{(s-1)},\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_2}\right)^{(s-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_k}\right)^{(s-1)}\Delta a_k^{(s)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\bar f_{ij}-f_{ij}^{(s-1)}\right)\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_2}\right)^{(s-1)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_n}\right)^{(s-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_n}\right)^{(s-1)}\Delta a_k^{(s)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\left(\bar f_{ij}-f_{ij}^{(s-1)}\right)\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial a_n}\right)^{(s-1)}.\\
&\qquad\qquad s=1,2,\ldots.
\end{aligned}\tag{8}$$

Система уравнений (8) — это система $n$ алгебраических уравнений с $n$ неизвестными относительно величин $\Delta a_k^{(s)}$ $(k=1,\ldots,n)$.

Таким образом, процедура нахождения оценок $\tilde a_k$ $(k=1,\ldots,n)$ для параметров $a_k$ $(k=1,\ldots,n)$ следующая. Выбираем начальное приближение оценок $a_k^0$ $(k=1,\ldots,n)$ и, решая систему уравнений (8) при $s=1$, находим поправки первого приближения оценок $\Delta a_k^{(1)}(k=1,\ldots,n)$. Затем по формуле (5) при $s=1$ вычисляем первое приближение оценок $a_k^{(1)}(k=1,\ldots,n)$. Решая систему уравнений (8) при $s=2$, находим поправки второго приближения оценок $\Delta a_k^{(2)}(k=1,\ldots,n)$, а затем по формуле (5) при $s=2$ вычисляем второе приближение оценок $a_k^{(2)}$ $(k=1,\ldots,n)$. Аналогично находится третье приближение оценок $a_k^{(3)}$ $(k=1,\ldots,n)$ и т. д.

К сожалению, выделить класс зависимостей $f_i\ (t,\ a_1, \ldots, a_n)\ \ (i = 1, \ldots, m)$, в котором последовательность приближений оценок $a_1^{(s)}, \ldots, a_n^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ сходится к оценкам $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$, в общем виде не удалось. Однако на конкретных примерах ведутся исследования по нахождению достаточных условий, при которых изложенная процедура приводит к сходящимся последовательностям приближений оценок.

Рассмотрим задачу, когда часть параметров наблюдается непосредственно и наблюдаемая система функций имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= a_1(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_\nu &= a_\nu(t), \\ f_{\nu+1} &= f_{\nu+1}(t,\ a_1, \ldots, a_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= f_m(t,\ a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}\right\} \tag{1а}$$

В этом случае сначала нужно построить оценки параметров $a_1, \ldots, a_\nu$ известными методами математической статистики [3], затем найденные оценки $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_\nu$ подставить в функции $f_{\nu+1}, \ldots, f_m$, которые теперь зависят только от $n - \nu$ неизвестных параметров. Система (1а) сводится к системе $m - \nu$ функций:

$$\left.\begin{aligned} f_{\nu+1} &= f_{\nu+1}(t,\ a_{\nu+1}, \ldots\ a_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= f_m(t,\ a_{\nu+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}\right\} \tag{1б}$$

Оценки параметров $a_{\nu+1}, \ldots, a_n$ ищутся описанным выше способом.

Для наглядной иллюстрации изложенной методики приведем пример оценки параметров одноканальной системы массового обслуживания с ожиданием. Поступающий поток — пуассоновский с параметром $\lambda$; время обслуживания распределено по показательному закону с параметром $\mu$. Требуется по наблюдениям величин $\lambda$ и $\mu$ оценить среднее время пребывания требований в системе $T$ и среднее время ожидания в очереди $t$.

Известно [4], что

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}, \qquad t = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)},$$

откуда

$$\lambda = \frac{t}{T(T - t)}, \qquad \mu = \frac{1}{T - t}.$$

Пусть $\overline{\mu}_j$ и $\overline{\lambda}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$ — результаты $N$ независимых измерений величин $\mu$ и $\lambda$. Предположим, что погрешности измерений $\Delta\mu_j$ и $\Delta\lambda_j$ распределены нормально с параметрами $(0,\ \sigma_{1j})$ и $(0,\ \sigma_{2j})$ соответственно. Согласно описанной выше методике оценки $\tilde{T}$ и $\tilde{t}$ для параметров $T$ и $t$ ищем в виде:

$$\tilde{T} = T_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta T_\nu$$

$$\tilde{t} = t_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta t_\nu$$

где $T_0$ и $t_0$ — начальные приближения оценок, выбранные каким-то образом. Система уравнений (8) для нахождения поправок $\Delta T_{s+1}$ и $\Delta t_{s+1}$ $(s + 1)$-го приближения оценок имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{N} \left[ \frac{1}{\sigma_{1j}^2} (\mu_T')_s^2 + \frac{1}{\sigma_{2j}^2} (\lambda_T')_s^2 \right] \Delta T_{s+1} + \left[ \frac{1}{\sigma_{2j}^2} (\mu_T')_s (\mu_t')_s + \frac{1}{\sigma_{2j}^2} (\lambda_T')_s (\lambda_t')_s \right] \Delta t_{s+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_{1j}^2} [\overline{\mu}_j - (\mu)_s] (\mu_T')_s + \frac{1}{\sigma_{2j}^2} [\overline{\lambda}_j - (\lambda)_s] (\lambda_T')_s,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_{1j}^2}(\mu_T')_s(\mu_t')_s+\frac{1}{\sigma_{2j}^2}(\lambda_T')_s(\lambda_t')_s\right]\Delta T_{s+1}+\left[\frac{1}{\sigma_{1j}^2}(\mu_t')_{s^2}+\frac{1}{\sigma_{2j}^2}(\lambda_t')_{s^2}\right]\Delta t_{s+1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_{1j}^2}[\bar{\mu}_j-(\mu)_s](\mu_t')_s+\frac{1}{\sigma_{2j}^2}[\bar{\lambda}_j-(\lambda)_s]\lambda_T',$$

где

$$\mu_T'=-\frac{1}{(T-t)^2},\qquad \mu_t'=\frac{1}{(T-t)^2},$$

$$\lambda_T'=\frac{t(t-2T)}{T^2(T-t)^2},\qquad \lambda_t'=\frac{1}{(T-t)^2}.$$

Решая эту систему уравнений при $s=1, 2, \ldots$, находим соответственно поправки первого, второго и т. д. приближений искомых оценок.

Изложенная методика позволяет находить оценки неизвестных параметров сложных систем, заданных аналитически. Оценки параметров систем, подобных приведенной здесь, легко находятся по формулам (8) и (5). Если же число неизвестных параметров велико и наблюдаемые функции (1) имеют довольно сложный вид, то решать задачу об оценке этих параметров можно при помощи быстродействующих ЭВМ.

В заключение мне хочется поблагодарить проф. Н. П. Бусленко за помощь, оказанную при написании данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Бусленко. К теории сложных систем. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 5.
2. Г. Крамер. Математические методы статистики. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Ю. В. Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
4. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. Теория и приложения. М., «Мир», 1965.

Поступила в редакцию
7 VI 1966

## НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

### I ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ЭКОНОМИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКЕ

Экономическая кибернетика складывается в настоящее время в самостоятельную научную дисциплину, предметом которой является исследование и проектирование автоматизированных систем управления экономическими объектами. Она призвана сыграть важную роль в деле создания и внедрения системы оптимального планирования и руководства народным хозяйством. Этим объясняется актуальность обсуждения теоретических и общеметодологических положений экономической кибернетики, сближения точек зрения и уточнения концепций системы, управления и информации в экономике, выработки единой рабочей терминологии, определения направлений перспективных исследований.

1-я Всесоюзная конференция по экономической кибернетике была организована ЦЭМИ АН СССР, Советом по кибернетике и НИИЭП Госплана ГрузССР в г. Батуми 11—16 октября 1966 г. В ней приняли участие 445 человек — представителей разных научных учреждений, ведомств, предприятий различных городов нашей страны. Основная работа конференции велась в ее четырех секциях:

1. Теоретические вопросы экономической кибернетики.
2. Регулирование экономических систем и экономико-математическое моделирование.
3. Проблемы экономической информации.
4. Автоматизированные системы управления.

На обсуждение было представлено 92 доклада. Участники конференции получили вместе с подборкой отпечатанных на ротапринте докладов библиографический указатель, а также проект словаря унифицированной терминологии экономической кибернетики. Этот проект, подготовленный специальной терминологической комиссией, организованной на базе ЦЭМИ, секцией экономической кибернетики Совета по кибернетике АН СССР, обсуждался на секциях конференции по соответствующим разделам.

Конференцию открыл председатель оргкомитета конференции акад. Н. П. Федоренко, выступивший на пленарном заседании с большим докладом. Были рассмотрены крупные теоретические и практические проблемы народнохозяйственного планирования с точки зрения возможности применения научного аппарата и методов кибернетики. Дан анализ функциональной схемы планирования как сложной динамической системы, выделены основные понятия, необходимые при разработке и анализе плановых решений.

Значительное внимание Н. П. Федоренко уделил вопросу о прогнозной информации. Докладчик предложил использовать при перспективном прогнозировании экономики в СССР метод электронной имитации. Имитация представляет собой воспроизведение поведения экономической системы на ее комплексной модели, которая в свою очередь включает целую серию более детальных моделей, отработанных на данных о прошлом поведении этой системы. В то же время Н. П. Федоренко подчеркнул значение прогнозной информации, получаемой методом экспертных оценок, и указал на необходимость комбинировать работу по электронной имитации экономики с экспертным прогнозированием основных технических тенденций и народнохозяйственных пропорций на 2000 год.

Заместитель председателя оргкомитета к.э.н. Ю. И. Черняк (ЦЭМИ АН СССР) охарактеризовал в своем докладе некоторые теоретические подходы к экономическим системам и основные черты методологии. Отметив, что каждый из подходов находит применение в определенных классах экономических задач, докладчик подробно остановился на информационном подходе, который имеет наибольшее практическое значение в широком классе задач экономического управления.

На основе предложенной в докладе классификации теоретических проблем экономической кибернетики лежало рассмотрение их в трех аспектах: на уровне теоретических исследований процессов управления с помощью аппарата математической логики; на уровне инструментальном — исследования процессов управления с точки зрения движения и переработки информации; на уровне конструктивном — проектирования автоматизированных систем управления с учетом всей сложности человеческих факторов. Особый интерес вызвали у участников конференции определения большой системы, сложной системы, а также предложения по методике исчисления смысловой экономической информации.