

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Ю. Н. ТЮРИН

(Москва)

Начиная с работы Л. В. Канторовича [1], был предложен ряд моделей экономики, на которых изучались различные вопросы. Часть этих работ, в том числе и [1], была направлена на изучение такой системы оценок, при которой каждое предприятие, стремясь получить наибольшую прибыль, действует наилучшим образом в интересах общества. Основой для этого (с точки зрения экономики) является представление о том, что хозяйственная деятельность общества считается направленной на достижение некоторой цели и степень успеха при этом может быть выражена количественно. В математическом оформлении эта идея выглядит так: общество выбирает выполнимый план действий, в результате которого некоторый показатель «целевая функция» примет наибольшее из возможных значений.

Модель Л. В. Канторовича была линейной. В работе [2] А. Л. Лурье отказался от этого ограничения и рассмотрел общую схему дискретного оптимального планирования. В своих исследованиях автор настоящей статьи опирался в основном на идеи этих двух авторов.

В данной статье мы хотели построить достаточно естественный аппарат для описания экономики (производства) и на элементарных экономических моделях установить связь между избранным планом и соответствующими оценками. Оказалось, что необходимый математический аппарат выходит за рамки элементарного.

В основном тексте автор, следуя А. Л. Лурье, рассмотрел модель производства, в которой потребление в течение планируемого периода задано и требуется выбрать какой-либо план производства, обеспечивающий это потребление. Свое внимание автор сосредоточил на изучении системы объективно обусловленных оценок товаров и производственных мощностей. Основная часть математических исследований отнесена в приложения. В приложении А вводится понятие дифференцируемого отображения и исследуются условия дифференцируемости по x функции $m(w, x) = \max f(y)$, $y \in w(x)$, где $w(x)$ — множество, зависящее от параметра x . В приложении Б совокупность замкнутых ограниченных выпуклых множеств вкладывается в линейное топологическое пространство. В приложении В изучается производная функции $m(w, x)$ по отображению w .

1. Описание экономики

Все, что производится экономической системой, мы будем называть товарами. Количества товаров мы будем мерить непрерывно меняющимися величинами. Это безусловно верно, когда речь идет о жидкостях, сыпучих веществах и т. п. Дискретным характером количества других вещей, вроде автомобилей, можно пренебречь только в случае, если число таких вещей велико. При этом относительная погрешность оказывается

малой. Итак, наше предположение оказывается по существу предположением о том, что мы рассматриваем предметы массового производства. Производимые экономикой товары будем нумеровать числами от 1 до m .

1. Каждое конкретное предприятие или экономическую ячейку (завод, совхоз, экономический район и т. п.) будем описывать его экономическими возможностями. Именно, при заданных (одних и тех же) затратах труда, энергии, сырья, полуфабрикатов и т. п. одно и то же предприятие имеет возможность выпускать различную конечную продукцию. Обозначим через

x_i^t вектор затрат ячейки с номером i в период времени t , $x_i^t = (x_{i1}^t, x_{i2}^t, \dots, x_{im}^t)$, а через y_i^t обозначим вектор выпуска той же ячейки в тот же пе-

риод, $y_i^t = (y_{i1}^t, y_{i2}^t, \dots, y_{im}^t)$. Конечно, в реальных условиях, если речь идет об отдельном предприятии, большая часть координат векторов x_i^t, y_i^t оказывается нулями. Но если ячейка с номером i оказывается целым экономическим районом, то это уже не так.

Предположим, что совокупность векторов затрат i -го предприятия в момент времени t образует замкнутое выпуклое ограниченное множество, которое мы обозначим a_i^t .

Совокупность векторов выпуска y_i^t которые возможны при одних и тех же затратах x_i^t , образует некоторое множество $w_i^t(x_i^t)$. Таким образом, каждому предприятию поставлено в соответствие описывающее его отображение $w_i^t(\cdot)$ с областью определения a_i^t , которое мы будем называть производственным отображением i -го предприятия в период t .

Относительно производственного отображения $w_i^t(\cdot)$ предположим, что оно является выпуклым отображением, т. е. при всяком x_i^t множество $w_i^t(x_i^t)$ является замкнутым и ограниченным, и, кроме того, если $x_i^t, \tilde{x}_i^t \in a_i^t$, то при всех $\alpha, \tilde{\alpha} \geq 0$, $\alpha + \tilde{\alpha} = 1$ оказывается выполненным включение $w_i^t(\alpha x_i^t + \tilde{\alpha} \tilde{x}_i^t) \supset \alpha w_i^t(x_i^t) + \tilde{\alpha} w_i^t(\tilde{x}_i^t)^*$. Предположим, кроме того, что $w_i^t(0) = \langle 0 \rangle$ и что $w_i^t(x_i^t + \Delta_i^t) \supset w_i^t(x_i^t)$, если $\Delta x_i^t \geq 0$.

Производственные отображения одной и той же ячейки могут быть различными в различные периоды времени. Мы будем, однако, считать, что эти изменения не зависят от действий ячейки, скажем, от выбора плана работы — затрат x_i^t и выпуска y_i^t . Причинами таких изменений могут быть изменения технологии, модернизация оборудования, капитальное строительство и т. п. **. Таким образом, в этой схеме на долю руководителей экономических ячеек оставлено только текущее управление.

2. Общие производственные возможности всей экономики описываются в период времени t производственным отображением $W^t(\cdot)$, которое определяется так:

$$W^t(X^t) = \left\{ Y^t : Y^t = \sum_{i=1}^n y_i^t, y_i^t \in w_i^t(x_i^t), x_i^t \in a_i^t, \sum_{i=1}^n x_i^t \leq X^t \right\}. \quad (1)$$

* Если A, B — множества, α, β — числа, то множество $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ есть $\{z : z = \alpha x + \beta y, x \in A, y \in B\}$.

** В том числе амортизация оборудования, которая происходит, по нашему предположению, независимо от режима работы.

Это значит, что вектор ресурсов X^t , которым располагает экономика в период времени t , разделяется на отдельные части x_i^t , которые поступают в качестве текущих затрат на i -е предприятие, т. е. $x_i^t \in a_i^t$, $\sum_{i=1}^n x_i^t \leq X^t$. Предприятия выбирают один из возможных для них выпусков $y_i^t \in w_i^t(x_i^t)$, и сумма этих возможных выпусков дает возможный выпуск всей экономики, т. е. $\sum_{i=1}^n y_i^t = Y^t$. Совокупность так получаемых Y^t определяет множество $W^t(X^t)$.

Это отображение $W^t(\cdot)$ мы будем называть суммой отображений $w_i^t(\cdot)$ и обозначать

$$W^t(\cdot) = w_1^t(\cdot) \oplus w_2^t(\cdot) \oplus \dots \oplus w_n^t(\cdot). \quad (2)$$

Геометрически только что введенное сложение отображений можно представить, вводя «графики отображений». Графиком Γ отображения $\Gamma(\cdot)$, определенного на множестве a , называем совокупность пар точек (x, y) таких, что $x \in a$, $y \in \Gamma(x)$. Легко видеть, что график выпуклого отображения представляет собой выпуклое ограниченное замкнутое множество, а сложение отображений соответствует сложению их графиков в смысле Минковского. Понятно поэтому, что график W^t отображения $W^t(\cdot)$ есть выпуклое множество, а, стало быть, $W^t(\cdot)$ — выпуклое отображение.

Нетрудно проверить, что $W^t(0) = \{0\}$ и $W^t(X^t + \Delta X^t) \supset W^t(X^t)$, если $\Delta X^t \geq 0$, ввиду аналогичных свойств $w_i^t(\cdot)$.

3. Рассмотрим плановый период длины T ($t = 1, 2, \dots, T$). Будем считать, что начальные ресурсы экономики, которые могут быть использованы в качестве затрат в период, отвечающий $t = 1$, заданы и составляют вектор $X^1 = (X_1^1, X_2^1, \dots, X_m^1)$. Возможные выпуски Y^1 составят тогда множество $W^1(X^1)$. Будем считать, что заранее определенный вектор Z^2 должен быть использован на различные общественные нужды периода $t = 2$, так что в качестве затрат следующего периода может быть использован только остаток предыдущего выпуска $X^2 = Y^1 - Z^2$. Предположим вообще, что такая последовательность векторов $Z^2, Z^3, \dots$ задана и что текущие затраты в период $t + 1$, т. е. вектор X^{t+1} , оказываются равными выпуску в предыдущий период за вычетом вектора Z^{t+1} , т. е. $Y^t = X^{t+1} + Z^{t+1}$.

Предположим, что начальные ресурсы X^1 и последовательность $Z^2, Z^3, \dots, Z^T$ таковы, что производство оказывается возможным. Ясно, что среди возможных выпусков Y^t следует рассматривать только те, которые превосходят Z^{t+1} .

Обозначим положительный ортант m -мерного пространства через Q .

Введем отображения $V^{s,t}(\cdot)$, которые будут описывать множество возможных выпусков в момент t при заданных затратах в момент, s , $s < t$: $V^{s,t}(X^s) = W^t((W^{t-1}(\dots((W^s(X^s) - Z^{s+1}) \cap Q) \dots) - Z^t) \cap Q)$. (3)

Ввиду следующей ниже леммы отображения $V^{s,t}(\cdot)$ оказываются выпуклыми отображениями.

Лемма 1. Если A — выпуклое множество, $\Gamma(\cdot)$ — выпуклое отображение, то множество $\Gamma(A) = \{y : y \in \Gamma(x), x \in A\}$ тоже выпукло.

Действительно, пусть $\alpha + \alpha' = 1$, $\alpha, \alpha' \geq 0$ и пусть $y \in \Gamma(A)$, $y' \in \Gamma(A)$, т. е. существуют $x \in A$, $x' \in A$ такие, что $y \in \Gamma(x)$, $y' \in \Gamma(x')$. Тогда $\alpha y + \alpha' y' \in \alpha \Gamma(x) + \alpha' \Gamma(x') \subset \Gamma(\alpha x + \alpha' x')$, но $\alpha x + \alpha' x' \in A$, так что $\alpha y + \alpha' y' \in \Gamma(A)$, что и требовалось.

Отсюда следует, что суперпозиция выпуклых отображений является выпуклым отображением.

В этих обозначениях возможные затраты периода t составят множество $[V^{1,t-1}(X^1) - Z^t] \cap Q$, очевидно, выпуклое.

2. Цели экономики

4. Будем рассматривать только такие критерии оптимальности (вводящие в совокупность $V^{1,T}(X^1)$ отношения «лучше — хуже»), которые обладают свойством: если $Y^T \geq \bar{Y}^T$, то вектор Y^T «лучше» вектора $\bar{Y}^T$. Это означает, что в множестве $V^{1,T}(X^1)$ экстремальными могут быть только точки «северо-восточной» границы. Именно в этих точках достигают максимума на множестве $V^{1,T}(X^1)$ линейные формы с положительными коэффициентами. Поэтому любой из рассматриваемых критериев оптимальности может быть заменен путем подходящего выбора вектора $p^{T+1} \geq 0$ следующим: «Найти точку $Y^T \in V^{1,T}(X^1)$, в которой достигается максимума на $V^{1,T}(X^1)$ линейная форма $p^{T+1}Y^T$ ». В частности, если критерий задан в таком виде: «Найти точку $Y^T \in V^{1,T}(X^1)$, в которой достигается максимума на $V^{1,T}(X^1)$ функция $F(Y^T)$ (критерий F)», то при условии монотонности $F(\cdot)$ он может быть заменен линейным критерием с $p^{T+1} = \nabla F(\bar{Y}^T)$, где $\bar{Y}^T$ есть оптимальная в смысле критерия F точка из $V^{1,T}(X^1)$.

Понятно теперь, что достаточно рассматривать критерии вида F , в которых функция $F(Y^T)$ может предполагаться выпуклой (и дифференцируемой).

Пусть $\bar{Y}^T \in V^{1,T}(X^1)$ — оптимальный выпуск. Цепочку затрат и выпусков, начинающуюся X^1 и кончающуюся $\bar{Y}^T$, назовем оптимальной, и отдельные ее члены (затраты, выпуски) будем отмечать чертой сверху:

$$X^1, \bar{Y}^1, \bar{X}^2, Y^2, \dots, \bar{X}^T \bar{Y}^T, \bar{Y}^1 \in W^1(X^1), \bar{X}^2 = \bar{Y}^1 - Z^1, \bar{Y}^2 \in W^2(\bar{X}^2), \dots, \bar{Y}^T \in W^T(\bar{X}^T).$$

3. Управление при помощи оценок

5. Пусть a — выпуклое множество, $m(x)$ — выпуклая функция, которая достигает на множестве a максимума в точке $\bar{x}$, т. е. $m(\bar{x}) = \max_{x \in a} m(x)$, $x \in a$.

Будем считать функцию $m(x)$ определенной на некотором множестве A , причем точка $\bar{x}$ является его внутренней точкой. Рассмотрим множества

$$M = \{(x, z) : x \in A, z \leq m(x)\} \quad (4)$$

и

$$Q = \{(x, z) : x \in a, z > m(\bar{x})\}. \quad (5)$$

Легко видеть, что M и Q — непересекающиеся выпуклые множества, замыкания которых имеют общую точку $(\bar{x}, m(\bar{x}))$. Эти множества можно разделить гиперплоскостью, проходящей через названную точку, т. е. найти вектор u и число v такие, что

$$u \cdot x + v \cdot z \leq u \cdot \bar{x} + v \cdot m(\bar{x}) \leq u \cdot x + v \cdot z. \quad (6)$$

$$(x, z) \in M$$

$$(x, z) \in Q$$

Из определения Q видно, что $v \geq 0$. Естественно в экономических задачах считать функцию $m(x)$ монотонно возрастающей. В таком случае множество a содержит «начало» ортанта $\{x : x \leq \bar{x}\}$, откуда $u \leq 0$. Если $v = 0$, то мы получаем (из левой части) $u \cdot x \leq u \cdot \bar{x}$ при всех $x \in A$. Простейший способ поэтому избежать случая $v = 0$ состоит в том, что мы предполагаем $\bar{x}$ внутренней точкой A , что делает данное неравенство невозможным.

Делим на $v > 0$, полагая $u' = u/v$. Получаем из левой части неравенства

$$u'x + m(x) \leq u'\bar{x} + m(\bar{x}) \quad (7)$$

при всех $x \in A$. Это показывает, что $\max_{x \in A} [u'x + m(x)]$ достигается в точке $\bar{x}$. Из правой части неравенства получаем

$$u'x + m(\bar{x}) \leq u'x + m(x) \quad (8)$$

при $x \in A$. Это показывает, что $\min_{x \in A} u'x = u'\bar{x}$.

Удобнее положить $q = -u'$, и тогда результаты этого раздела запишутся следующим образом.

Существует вектор $q \geq 0$ такой, что $m(x) - q \cdot x$ достигает на A максимума в точке $\bar{x}$, $q \cdot x$ достигает максимума на a в точке $\bar{x}$.

Раз $\bar{x}$ является внутренней точкой множества A , то в случае дифференцируемости $m(\cdot)$ на A , получаем:

$$q = \nabla m(\bar{x}). \quad (9)$$

6. Используем эту конструкцию для построения системы оценок товаров $p^t, t = 1, 2, \dots, T, T+1$.

Пусть $\bar{Y}^T \in V^{1,T}(X^1)$ — оптимальный выпуск.

Находим вектор p^{T+1} такой, что

$$p^{T+1}\bar{Y}^T = \max_{Y^T \in W^T(\bar{X}^T)} p^{T+1}Y^T.$$

Пусть теперь

$$m(Y^{T-1}) = \max_{Y^T \in W^T(Y^{T-1}, Z^T)} p^{T+1}Y^T, \quad a = V^{1,T-1}(X^1),$$

A — область определения отображения $W^T(\cdot)$; $\bar{x} = \bar{Y}^{T-1}$. Применяя к этому случаю результаты предыдущего раздела, получаем, что выпуск $\bar{Y}^T$ должен отыскиваться среди тех, для которых $p^{T+1}Y^T - qY^{T-1}$ или, что то же самое, $p^{T+1}Y^T - qX^T$ достигает максимума на W^T . При этом $q\bar{Y}^{T-1}$ является максимальным значением qY^{T-1} на $V^{1,T-1}(X^1)$. Полагая $q = p^T$ и рассуждая так и далее, построим систему оценок $p^{t+1}, p^t, \dots, p^1$. Оценки обладают следующим свойством: выпуск $\bar{Y}^t$ и затраты $\bar{X}^t$ таковы, что

$$p^{t+1}\bar{Y}^t - p^t\bar{X}^t = \max_{Y^t \in W^t(X^t), X^t \in A^t} (p^{t+1}Y^t - p^tX^t).$$

Условие это означает, что в каждый период $t = 1, 2, \dots, T$ общий для экономики план затрат и выпусков должен выбираться (в соответствующих оценках) таким, чтобы «национальный доход» был максимальным.

7. Выясним, что означает это требование для каждого отдельного предприятия.

Вспомогая, что условие $Y^t \in W^t(X^t)$ можно записать иначе: $Y^t = \sum_{i=1}^n y_i^t, y_i^t \in w_i^t(x_i^t), \sum_{i=1}^n x_i^t \leq X^t, x_i^t \in a_i^t$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{Y^t \in W^t(X^t)} (p^{t+1}Y^t - p^tX^t) &= \max_{\sum_{i=1}^n x_i^t \leq X^t} \max_{\substack{y_i^t \in w_i^t(x_i^t) \\ x_i^t \in a_i^t}} \left(p^{t+1} \sum_{i=1}^n y_i^t - p^t \sum_{i=1}^n x_i^t \right) = \\ &= \max_{\sum_{i=1}^n x_i^t \leq X^t} \sum_{i=1}^n \max_{\substack{y_i^t \in w_i^t(x_i^t) \\ x_i^t \in a_i^t}} (p^{t+1}y_i^t - p^tx_i^t). \end{aligned}$$

Условие

$$\max_{\substack{y_i^t \in w_i^t(x_i^t) \\ x_i^t \in a_i^t}} (p^{t+1}y_i^t - p^t x_i^t)$$

означает, что в период t каждое предприятие должно выбирать свои затраты и выпуски так, чтобы в соответствующих оценках (на затраты — p^t , на выпуск — p^{t+1}) получить максимальную прибыль. В таком случае экономическая система в целом будет действовать оптимально.

8. Мы убедились, что о.о. оценки товара представляют собой такие оценки, которые позволяют обнаруживать оптимальные (с общей точки зрения) планы отдельных экономических ячеек, пользуясь критерием максимальной прибыли:

$$\max_{y \in w(x); x \in a} (py - qx). \quad (10)$$

Если мы заменим цены p и q другими, $p' = \lambda p$, $q' = \mu q$, где λ , μ суть скалярные множители, то это условие примет вид

$$\max_{\substack{y \in w(x) \\ x \in a}} \left[\frac{1}{\lambda} p' y - \frac{1}{\mu} q' x \right], \quad (11)$$

или, полагая $c = \lambda / \mu$,

$$\max_{y \in w(x); x \in a} \left(\frac{1}{c} p' y - q' x \right). \quad (12)$$

Предположим теперь, что векторы $p^1, p^2, \dots, p^t, \dots$ коллинеарны. Тогда можно подобрать такие скаляры $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^t, \dots$, что $p^t = \lambda^t \cdot p$. В таком случае условие максимума прибыли примет вид

$$\max_{\substack{y_i^t \in w_i^t(x_i^t) \\ x_i^t \in a_i^t}} \left[\frac{\lambda^{t+1}}{\lambda^t} p y_i^t - p x_i^t \right]. \quad (13)$$

Отношение $\lambda^t / \lambda^{t+1} = c^{t+1}$ естественно называть нормой эффективности вложений в период t .

В действительности векторы $p^1, p^2, \dots$ будут меняться по величине и направлению, но, вероятно, довольно медленно. Скаляры $c^1, c^2, \dots$ будут иметь теперь тот смысл, что $|c^{t+1} p^{t+1}| = |p^t|$. Изменениями направления p^t можно пренебречь (для не слишком далеко по времени отстоящих p^t) и, с малой ошибкой, заменить критерий максимальной прибыли в оценках p^t другим:

$$\max_{\substack{y_j^t \in w_j^t(x_i^t) \\ x_i^t \in a_i^t}} [(c^{t+1})^{-1} p^t y_i^t - p^t x_i^t]. \quad (14)$$

Вероятно, нормы эффективности денежных вложений будут меняться с течением времени довольно медленно, так что, рассчитывая денежные вложения на недалекое будущее, можно считать норму эффективности постоянной.

4. Структура доходов и расходов

9. Рассмотрим функцию

$$m(w, x) = \max_{y \in w(x)} f(y), \quad (15)$$

где $f(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая выпуклая функция, $w(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемое выпуклое отображение.

Пусть $\hat{w}(\cdot)$ — фиксированное выпуклое отображение, $\hat{x}$ — фиксированный вектор. В приложении (см. В, 16, стр. 36) было определено, что следует понимать под отображением $(w \oplus \lambda \circ \hat{w})(\cdot)$ — для $\lambda \geq 0$. Догматически воспользуемся формулой

$$m(w \oplus \lambda \circ \hat{w}, x + \lambda \hat{x}) = m(w, x) + \lambda \partial m / \partial w \cdot \hat{w} + \lambda \partial m / \partial x \cdot \hat{x} + o(\lambda). \quad (16)$$

Обсуждение этого отнесем в приложение В. Здесь через $\partial m / \partial w \cdot \hat{w}$ обозначен линейный непрерывный функционал относительно $\hat{w}$, $\partial m / \partial x$ — вектор частных производных функции $m(w, x)$ по координатам вектора x .

При фиксированном x $(w \oplus \lambda \circ \hat{w})(\cdot)$ представляет собой отображение, определенное при $\lambda \geq 0$, очевидно, выпуклое и ограниченное. Следовательно, в силу теоремы 7 приложения оно дифференцируемо в точке $\lambda = 0$ справа, т. е. существуют такие множества (зависящие, может быть, от x) a_{π} и a_{Π} , что

$$(w \oplus \lambda \circ \hat{w})(x) + \lambda a_{\pi}(\lambda) w(x) + \lambda a_{\Pi}. \quad (17)$$

В силу этого в условиях теоремы 5

$$\max_{y \in (w \oplus \lambda \circ \hat{w})(x)} f(y) = \max_{y \in w(x)} f(y) + \lambda [\max_{y' \in a_{\Pi}} \nabla f(\bar{y}) y' - \max_{y'' \in a_{\Pi}} \nabla f(\bar{y}) y''], \quad (18)$$

где $\bar{y}$ означает точку, в которой достигается на $w(x)$ максимум функции $f(y)$.

Функционал $\partial m / \partial w$ естественно считать функционалом объективно обусловленных оценок производственных мощностей. Равенство (18) показывает, что эти оценки не изменяются, если вместо функции $f(\cdot)$ в формулу (15) подставить линейную функцию $\nabla f(\bar{y}) y$. То, что при этом не меняются объективно обусловленные оценки продуктов также следует из теоремы 5. В дальнейшем поэтому мы будем рассматривать лишь такие функции:

$$m(w, x) = \max_{y \in w(x)} p y. \quad (19)$$

Как и ранее, $\partial m / \partial x$ обозначим q . В равенстве (15) положим $\hat{w} = w$, $\hat{x} = x$ и получим

$$m((1 + \lambda) \circ w, (1 + \lambda)x) = m(w, x) + \lambda \frac{\partial m}{\partial w} w + \lambda q x + o(\lambda). \quad (20)$$

Очевидно,

$$m((1 + \lambda) \circ w, (1 + \lambda)x) = \max_{y \in (1 + \lambda)w(x)} p y = (1 + \lambda) m(w, x). \quad (21)$$

Заменяя $m(w, x)$ через $p \bar{y}$, получаем теперь из (19)

$$p \bar{y} = \partial m / \partial w \cdot w + q x. \quad (22)$$

Имеем

$$\begin{aligned} m(w \oplus \lambda \circ \hat{w}, x + \lambda \hat{x}) &= \max_{\substack{y \in w(\bar{x}) + \lambda \hat{w}(\bar{x}'/\lambda) \\ \bar{x} + \bar{x}' \leq x + \lambda \hat{x} \\ \bar{x} \in a, \bar{x}' \in \hat{a}}} p y = \\ &= \max_{\substack{y \in w(\bar{x}), y' \in \hat{w}(\bar{x}') \\ \bar{x} + \bar{x}' = x + \lambda \hat{x} \\ \bar{x} \in a, \bar{x}' \in \hat{a}}} p(y + \lambda y') \geq \max_{y \in w(x)} p y + \lambda \max_{y' \in \hat{w}(x)} p y'. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\max_{w \in \hat{w}(\hat{x})} py \leq \partial m / \partial w \cdot \hat{w} + \partial m / \partial x \cdot \hat{x}. \quad (24)$$

Применяя полученное неравенство к $\hat{w} = w_i$, $\hat{x} = x_i$ и обозначая через $\bar{y}_i$ точку, в которой на $w_i(x_i)$ достигается максимум py , получим

$$p\bar{y}_i \leq \partial m / \partial w \cdot w_i + \partial m / \partial x \cdot x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Пусть $\sum_i \bar{y}_i = \bar{y}$, $\sum x_i = x$, $w_1 \oplus \dots \oplus w_n = w$.

Просуммируем неравенства (25) по i от 1 до n .

Получаем

$$p\bar{y} \geq \partial m / \partial w \cdot w + \partial m / \partial x \cdot x. \quad (26)$$

Нам уже известно, однако, что на самом деле это равенство. Значит, на самом деле являются равенствами и (25), т. е.

$$p\bar{y}_i = \partial m / \partial w \cdot w_i + \partial m / \partial x \cdot x_i. \quad (27)$$

10. Применим полученный результат, когда $w(.) = W^t(.)$, $x = \bar{X}^t$, $\bar{y} = \bar{Y}^t$ и функция $f(.)$ есть

$$\max_{Y^t \in V^{t+1}, T(Y^t - Z^{t+1})} F(Y^t).$$

Равенство (22) примет тогда вид

$$p^{t+1}\bar{Y}^t = p^t\bar{X}^t + \partial m / \partial W^t \cdot W^t.$$

Это означает, что стоимость всего созданного продукта составляется из стоимости затрат и слагаемого $\partial m / \partial W^t \cdot W^t$, которое естественно считать прокатной оценкой производственных мощностей. Ясно, что для любого другого возможного выпуска Y^t будет выполняться неравенство

$$p^{t+1}Y^t \leq \partial m / \partial W^t \cdot W^t + p^t\bar{X}^t.$$

Пусть теперь $w_i^t(.)$ есть производственное отображение i -й ячейки. Применяя (27), получаем $p^{t+1}\bar{y}_i^t = \partial m / \partial W^t \cdot w_i^t + p^t x_i^t$, т. е. стоимость выпуска равна стоимости затрат плюс прокатная оценка оборудования (для каждой ячейки).

11. Представим себе, что мы можем провести некоторое мероприятие, связанное с необходимостью капитальных вложений, т. е. превращения товаров в производственные мощности. Предположим, что это мероприятие оказывается еще достаточно малым, чтобы изменение величины целевой функции можно было мерить ее дифференциалом. В таком случае можно сказать, выгодно это мероприятие или нет, используя оценки.

Итак, пусть в момент t , $t < T$ мы можем построить новую производственную ячейку; производственные отображения, описывающие ее, суть $\omega^s(.)$, $s = t + 1, \dots, T$. Пусть для этого потребуются вектор затрат u^t . В таком случае общие возможности экономики при $s = t + 1, \dots, T$ составят $W^s(.) \oplus \omega^s(.)$. Дифференциал целевой функции, связанный с этим увеличением производственных мощностей и затратами u^t , равен $\sum_s \partial m / \partial W^s \cdot \omega^s - p^t u^t$. Мероприятие выгодно, если эта величина положительна, и невыгодно, если она отрицательна.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Отображения

12. Рассмотрим множество $\Gamma(x)$ точек m -мерного евклидова пространства, зависящее от векторного параметра x , принадлежащего множеству A r -мерного евклидова пространства. Будем говорить в таком случае, что задано отображение $\Gamma(\cdot)$, определенное на множестве A . Мы ограничимся случаем таких отображений $\Gamma(\cdot)$, когда существует компакт K m -мерного пространства, которому принадлежат $\Gamma(x)$ при всех возможных x , т. е. когда $\Gamma(x) \subset K$ при $x \in A$. Именно для этого случая определим различные варианты непрерывности отображений.

Определение 1. Отображение $\Gamma(\cdot)$ называется *полу не пр е р ы в н ы м с в е р х у* в точке $x_0 \in A$, если всякая сходящаяся последовательность точек $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$, причем $y_i \in \Gamma(x_i)$ и $x_i \rightarrow x_0$, сходится непременно к точке множества $\Gamma(x_0)$.

Определение 2. Отображение $\Gamma(\cdot)$ называется *полу не пр е р ы в н ы м с н и з у* в точке $x_0 \in A$, если для всякой точки $y_0 \in \Gamma(x_0)$ существует сходящаяся к ней последовательность точек y_i таких, что $y_i \in \Gamma(x_i)$ и $x_i \rightarrow x_0$.

Определение 3. Отображение, полунепрерывное в точке x_0 одновременно сверху и снизу, называется *н е пр е р ы в н ы м* в этой точке.

Ясно, что если множества $\Gamma(x)$ состоят каждое только из одной точки, т. е. если отображение является функцией, то полунепрерывность сверху или снизу отображения совпадает с непрерывностью функции.

Определениям 1 и 2 можно придать более удобную форму, если ввести некоторое понятие предела последовательности множеств.

Определение 4. Пределом последовательности множеств $\Gamma(x)$ [x — векторное переменное] при $x \rightarrow x_0$ назовем множество, которое будем обозначать

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Gamma(x) = \{y: y = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i, \text{ если } y_i \in \Gamma(x_i), \text{ и } x_i \rightarrow x_0 \text{ при } i \rightarrow \infty\}.$$

В таком случае определения 1, 2, 3 принимают следующий вид.

Определение 1'. Отображение $\Gamma(\cdot)$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $x_0 \in A$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \Gamma(x) \subset \Gamma(x_0)$.

Определение 2'. Отображение $\Gamma(\cdot)$ называется *полунепрерывным снизу* в точке $x_0 \in A$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \Gamma(x) \supset \Gamma(x_0)$.

Определение 3'. Отображение $\Gamma(\cdot)$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in A$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \Gamma(x) = \Gamma(x_0)$.

Теорема 1. Пусть $f(x, a)$ — непрерывная функция двух векторных переменных x и a . Пусть $\Gamma(a)$ — непрерывное в точке a_0 отображение. Совокупность точек $\Gamma(a)$, в которых функция $f(x, a)$ достигает максимума на $\Gamma(a)$, обозначим $G(a)$, т. е.

$$G(a) = \{x: x \in \Gamma(a), f(x, a) \geq f(\xi, a) \text{ при всяком } \xi \in \Gamma(a)\}.$$

Оказывается, что отображение $G(a)$ полунепрерывно сверху в точке a_0 .

Эта теорема является нужным для наших целей вариантом известного положения*, а потому ее доказательство опускаем.

Теорема 2. Суперпозиция полунепрерывных сверху (снизу) отображений является полунепрерывным сверху (снизу) отображением.

Теорема 3. Если отображения $\Gamma(a)$, $\Delta(a)$ полунепрерывны сверху (снизу) в точке a_0 , то таковы же и отображения $\Gamma(a) + \Delta(a)$, $\lambda \cdot \Gamma(a)$ **.

Следствием теорем 1 и 2 является следующая теорема.

* См. [3], гл. II, § 9, теорема 7.

** Здесь и в дальнейшем знак $+$, соединяющий два множества A и B , означает их сложение по Минковскому, т. е. $A + B = \{z: z = x + y, x \in A, y \in B\}$. Умножение множества A на число λ определяется так: $\lambda \cdot A = \{z = \lambda x, x \in A\}$.

Теорема 4. Если отображение $\Gamma(a)$ непрерывно в точке a_0 , функция $f(x, a)$ непрерывна, то функция $m(a) = \max_{x \in \Gamma(a)} f(x, a)$ непрерывна в точке a_0 .

Введем обозначения. Если $\lim C(\lambda) = \{0\}$ при $\lambda \rightarrow 0$, будем обозначать $C(\lambda)$ символом $o(1)$.

Символ $o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ вводится естественно: отображение $\Gamma(\lambda)$ есть $o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если $1/\lambda \cdot C(\lambda)$ есть $o(1)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Аналогично вводятся $o(\lambda^2)$, $o(\lambda^3)$ и т. д.

Запись $A(\lambda) \subset B(\lambda) + o(1)$ означает, что для всякого вектора $x_\lambda \in A(\lambda)$ найдется вектор $y_\lambda \in B(\lambda)$ такой, что $x_\lambda - y_\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Если к тому же $B(\lambda) \subset A(\lambda) + o(1)$, то будем писать $A(\lambda) \stackrel{(1)}{=} B(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Естественно, что $A(\lambda) \stackrel{(2)}{=} B(\lambda)$ означает, что $A(\lambda) \subset B(\lambda) + o(\lambda)$ и $B(\lambda) \subset A(\lambda) + o(\lambda)$.

13. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция x . Рассмотрим функцию

$$m(a) = \max_{x \in \Gamma(a)} f(x). \quad (28)$$

Исследуем, в каких случаях $m(\cdot)$ дифференцируема и как определяется ее производная. Будет полезным следующее определение.

Определение 5. Отображение $\Gamma(a)$ назовем дифференцируемым в точке a в направлении $\bar{a}$, если существуют замкнутые ограниченные множества Γ_Π^-, Γ_Π такие, что при $\lambda \rightarrow 0, \lambda > 0$

$$\Gamma(a + \lambda \bar{a}) + \lambda \cdot \Gamma_\Pi \stackrel{(1)}{=} \Gamma(a) + \lambda \cdot \Gamma_\Pi. \quad (29)$$

Сформулируем некоторые леммы.

Лемма 2. Если $A(\lambda) \stackrel{(1)}{=} B(\lambda)$ и $f(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\max_{x \in A(\lambda)} f(x) \stackrel{(1)}{=} \max_{x \in B(\lambda)} f(x). \quad (30)$$

Лемма 3. Пусть $f(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\Gamma(\lambda)$ при достаточно малых λ принадлежит некоторому компактному K , Γ' принадлежит некоторому компактному K' . Тогда

$$f(x + \lambda x') = f(x) + \lambda \cdot \nabla f(x) \cdot x' + o(\lambda), \quad (31)$$

причем $1/\lambda \cdot o(\lambda) \rightarrow 0$ равномерно по $x \in \Gamma(\lambda), x' \in \Gamma'$.

Доказательства очевидны.

Пусть теперь для $\Gamma(\cdot)$ выполнено равенство (29). В силу леммы 2 имеем

$$\max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) + \lambda \Gamma_\Pi} f(x) \stackrel{(1)}{=} \max_{x \in \Gamma(a) + \lambda \Gamma_\Pi} f(x). \quad (32)$$

В силу леммы 3

$$\max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) - \lambda \cdot \Gamma_\Pi} f(x) \stackrel{(1)}{=} \max_{\substack{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) \\ x' \in \Gamma_\Pi}} [f(x) + \lambda \nabla f(x) \cdot x']. \quad (33)$$

$$\max_{x \in \Gamma(a) + \lambda \Gamma_\Pi} f(x) \stackrel{(1)}{=} \max_{\substack{x \in \Gamma(a) \\ x' \in \Gamma_\Pi}} [f(x) + \lambda \nabla f(x) \cdot x']. \quad (34)$$

Обозначим

$$\varphi_\Pi(x) = \max_{x' \in \Gamma_\Pi} \nabla f(x) \cdot x' \quad (35)$$

и

$$\varphi_{\Pi}(x) = \max_{x' \in \Gamma_{\Pi}} \nabla f(x) \cdot x'. \quad (36)$$

Ввиду непрерывной дифференцируемости $f(\cdot)$ эти функции непрерывны. Вычислим сначала $\max_{x \in \Gamma(a)} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)]$.

Обозначим H_{λ} совокупность точек, в которых на $\Gamma(a)$ достигает максимума функция $f + \lambda \varphi_{\Pi}$. При этом H_0 будем обозначать совокупность точек $\Gamma(a)$, в которых достигает максимума на $\Gamma(a)$ функция f . В силу теоремы 1 отображение H_{λ} полунепрерывно сверху в точке 0. Получим теперь оценки снизу и сверху для $\max_{x \in \Gamma(a)} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)]$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Gamma(a)} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] &= \max_{x \in H_{\lambda}} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] \leq \\ &\leq \max_{x \in H_{\lambda}} f(x) + \lambda \max_{x \in H_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) \leq \max_{x \in \Gamma(a)} f(x) + \lambda \max_{x \in H_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) = \\ &= \max_{x \in \Gamma(a)} f(x) + \lambda \max_{x \in H_0} \varphi_{\Pi}(x) + \lambda [\max_{x \in H_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) - \max_{x \in H_0} \varphi_{\Pi}(x)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Так как $\lim_{\lambda \rightarrow 0} H_{\lambda} \subset H_0$, то

$$\max_{x \in H_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) \leq \max_{x \in H_0} \varphi_{\Pi}(x) + o(1), \quad (38)$$

откуда

$$\max_{x \in \Gamma(a)} [f(x) - \lambda \varphi_{\Pi}(x)] \leq \max_{x \in \Gamma(a)} f(x) + \lambda \max_{x \in H_0} \varphi_{\Pi}(x) + o(\lambda). \quad (39)$$

Противоположное неравенство получается легко:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Gamma(a)} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] &\geq \max_{x \in H_0} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] \geq \\ &\geq \max_{x \in H_0} f(x) + \lambda \max_{x \in H_0} \varphi_{\Pi}(x) = \max_{x \in \Gamma(a)} f(x) + \lambda \max_{x \in H_0} \varphi_{\Pi}(x). \end{aligned} \quad (40)$$

Следовательно,

$$\max_{x \in \Gamma(a) + \lambda \Gamma_{\Pi}} f(x) = \max_{x \in \Gamma(a)} f(x) + \lambda \max_{\substack{x \in H_0 \\ x' \in \Gamma_{\Pi}}} \nabla f(x) x'. \quad (42)$$

Вычислим теперь $\max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)$.

Обозначим множество точек $\Gamma(a + \lambda \bar{a})$, в которых достигает максимума на $\Gamma(a + \lambda \bar{a})$ функция f , через F_{λ} , функции $f + \lambda \varphi_{\Pi}$ — через G_{λ} . Отображения F_{λ} и G_{λ} полунепрерывны сверху в точке 0. При этом $F_0 = G_0 = H_0$. Легко получить неравенства

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] &= \max_{x \in G_{\lambda}} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] \leq \\ &\leq \max_{x \in G_{\lambda}} f(x) + \lambda \max_{x \in G_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) \leq \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \max_{x \in G_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) \end{aligned} \quad (42)$$

и

$$\begin{aligned} \max_{w \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] &\geq \max_{x \in F_{\lambda}} [f(x) + \lambda \varphi_{\Pi}(x)] = \max_{x \in F_{\lambda}} f(x) + \\ &+ \lambda \max_{x \in F_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x) = \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \max_{x \in F_{\lambda}} \varphi_{\Pi}(x). \end{aligned} \quad (43)$$

Если

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \max_{x \in F_\lambda} \varphi_\lambda(x) \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \max_{x \in G_\lambda} \varphi_\Pi(x), \quad (44)$$

то два полученных неравенства позволяют вычислить $\max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) + \lambda \Gamma_\Pi} f(x)$ (с точностью до $o(\lambda)$):

$$\begin{aligned} \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \max_{x \in F_\lambda} \varphi_\Pi(x) + o(\lambda) &\leq \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) + \lambda \Gamma_\Pi} f(x) \leq \\ &\leq \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \max_{x \in G_\lambda} \varphi_\Pi(x) + o(\lambda), \end{aligned} \quad (45)$$

так что в случае (44)

$$\max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) + \lambda \Gamma_\Pi} f(x) = \max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \max_{x \in \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda} \varphi_\Pi(x). \quad (46)$$

Легко указать условия, при которых неравенство (44) справедливо.

а) Пусть отображение F_λ непрерывно в точке $\lambda = 0$. Тогда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda = F_0 = H_0 = G_0$ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \max_{x \in F_\lambda} \varphi_\Pi(x) = \max_{x \in \lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda} \varphi_\Pi(x) = \max_{x \in F_0} \varphi_\Pi(x). \quad (47)$$

Так как $\lim_{\lambda \rightarrow 0} G_\lambda \subset G_0 = F_0$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \max_{x \in G_\lambda} \varphi_\Pi(x) = \max_{x \in \lim_{\lambda \rightarrow 0} G_\lambda} \varphi_\Pi(x) \leq \max_{x \in F_0} \varphi_\Pi(x). \quad (48)$$

Из (47) и (48) следует неравенство (44).

б) Если $f(\cdot)$ — линейная функция, то $\varphi_\Pi(x)$ не зависит от x , и потому неравенство (44) выполнено.

в) Если $\Gamma(a)$ — выпуклое множество, $f(\cdot)$ — выпуклая функция, то $\nabla f(x)$ постоянно на $x \in F_0^*$. Значит, $\varphi_\Pi(x)$ постоянно при $x \in F_0$ и неравенство (44) справедливо.

Возвращаясь к (32), используя (41) и (46), получаем

$$\max_{x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a})} f(x) + \lambda \max_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ x' \in \Gamma_\Pi}} \nabla f(x) x' = \max_{x \in \Gamma(a)} f(x) + \lambda \max_{\substack{x' \in H_0 \\ x'' \in \Gamma_\Pi}} \nabla f(x) x''.$$

Теперь можно сформулировать теорему:

Теорема 5. Пусть $\Gamma(\cdot)$ — отображение, дифференцируемое в точке a в направлении $\bar{a}$, причем $\Gamma(a + \lambda \bar{a}) + \lambda \Gamma_\Pi \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \Gamma(a) + \lambda \Gamma_\Pi$. Пусть $f(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Достаточным условием дифференцируемости функции $m(\cdot)$ в точке a в направлении $\bar{a}$ служит одно из следующих:

а) отображение F_λ непрерывно в точке $\lambda = 0$, причем $F_\lambda = \{x : x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}) \text{ и } f(\cdot) \text{ достигает в этих точках максимума на } \Gamma(a + \lambda \bar{a})\}$;

* Действительно, F_0 в этом случае есть выпуклое множество. Так как $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, то в каждой точке поверхности $y = f(x)$ существует единственная касательная гиперплоскость (тангенсы углов наклона которой к осям координат и есть координаты градиента). Если этой поверхности принадлежит отрезок, то касательная плоскость для всех его точек одна и та же (ввиду выпуклости поверхности), и потому равны градиенты для точек соответствующего отрезка в пространстве x -ов. Так как любые две точки из F_0 можно соединить отрезком, целиком принадлежащим F_0 , и так как на F_0 функция $f(\cdot)$ постоянна, то на рассматриваемой поверхности соответствующие точки также будут соединены отрезком. Значит, действительно градиент $f(\cdot)$ не меняется на F_0 .

б) $f(\cdot)$ — линейная функция;

в) выпуклое множество $\Gamma(a)$ и функция $f(\cdot)$.

При этом производная равна

$$\max_{\substack{x \in H_0 \\ x' \in \Gamma_\Pi}} \nabla f(x) \cdot x' = \max_{\substack{x \in H_0 \\ x' \in \Gamma_\Pi}} \nabla f(x) \cdot x',$$

где H_0 есть подмножество $\Gamma(a)$, на котором $f(x)$ достигает максимума на $\Gamma(a)$, причем в «выпуклом» случае эта формула упрощается:

$$\max_{x' \in \Gamma_\Pi} \nabla f(x) \cdot x' = \max_{x' \in \Gamma_\Pi} \nabla f(x) \cdot x',$$

где x — любая точка множества H_0 .

Замечание 1. К сожалению, далеко не все отображения оказываются дифференцируемыми. Например, отображение $B(\lambda)$ (определенное для всех действительных λ), устройство которого легко понять из рис. 1, не дифференцируемо. Тем не менее, очевидно, дифференцируема функция $m(\lambda) = \max_{x \in B(\lambda)} f(x)$ в случае непрерывной дифференцируемости $f(\cdot)$. Что-

бы охватить одной теоремой (о дифференцируемости максимума) возможно больший класс отображений и использовать уже имеющиеся идеи, введем понятие гладкого отображения.

Отображение $\Gamma(\cdot)$ называется гладким в точке a в направлении $\bar{a}$, если существуют отображения $\Gamma_\Pi(x)$ и $\Gamma_\Pi(x)$ непрерывные по x и такие, что при малых $\lambda > 0$

$$\{z : z = x + x', x \in \Gamma(a + \lambda \bar{a}), x' \in \lambda \Gamma_\Pi(x)\} \stackrel{(\lambda)}{=} \{z : z = x + x', x \in \Gamma(a), x' \in \lambda \Gamma_\Pi(x)\}.$$

(Отличие от дифференцируемости состоит в том, что каждая точка $\Gamma(a)$ и $\Gamma(a + \lambda \bar{a})$ «раздувается» по-своему, а не одинаково).

Нетрудно проверить, что в предшествующих рассуждениях вместо дифференцируемого отображения всюду можно ставить гладкое, и это не отразится на результатах.

Замечание 2. Для непрерывной дифференцируемости функции $m(a) = \max_{x \in \Gamma(\bar{a})} f(x)$ достаточно предполагать непрерывную дифференцируемость отображения $\Gamma(\cdot)$, что означает непрерывность отображений Γ_Π , Γ_Π в зависимости от a и $\bar{a}$ или непрерывную гладкость, т. е. непрерывную зависи-

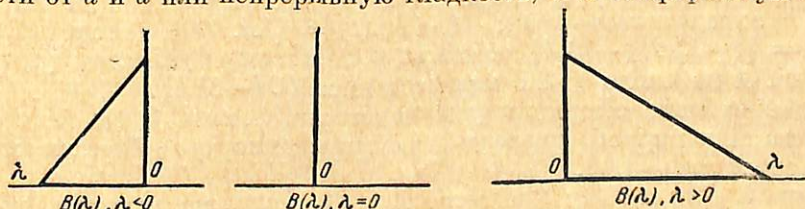


Рис. 1

мость $\Gamma_\Pi(x)$ и $\Gamma_\Pi(x)$ от a , $\bar{a}$. Пример хорошо известного дифференцируемого отображения дает линейное программирование.

Пусть $W(b) = \{x : x \geq 0, Ax \leq b\}$, где A — данная матрица, b — данный вектор. Предположим, что множество $W(b)$ ограничено и невырождено (в смысле линейного программирования) для данного b . В двумерном случае легко нарисовать отображения-дифференциалы (рис. 2).

Аналогичное справедливо и для выпуклого программирования.

Б. Линейное пространство выпуклых множеств

14. Рассмотрим совокупность N выпуклых, ограниченных замкнутых множеств n -мерного пространства. Определим в этой совокупности операции сложения двух множеств и умножения множеств на положительные числа:

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A, y \in B\},$$

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x, x \in A\}, \quad \lambda \geq 0.$$

При этом, очевидно, вновь получаются множества из N . Обозначим через O множество, состоящее из o -вектора. Легко проверить, что выполняются обычные свойства* операций:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A; \quad A + (B + C) = (A + B) + C; \\ A + O &= A; \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B; \\ (\lambda + \mu)A &= \lambda A + \mu A; \\ (\lambda \mu)A &= \lambda(\mu A); \quad 1 \cdot A = A. \end{aligned}$$

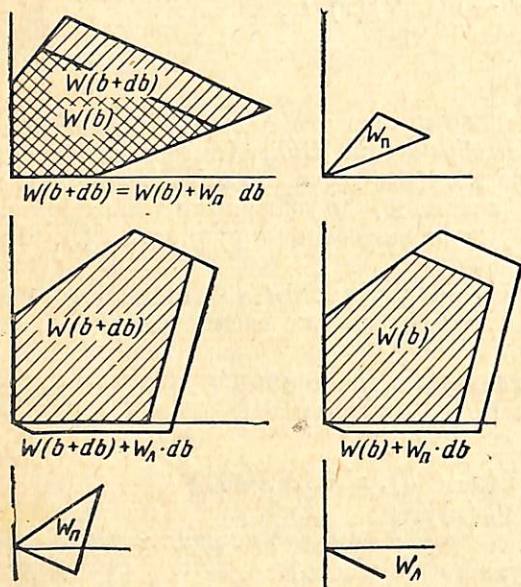


Рис. 2

Такая совокупность не является линейным пространством лишь потому, что не определена обратная к сложению операция — вычитание и умножение допускаются только на неотрицательные числа**. Совокупности такого рода называют конусами.

Сформулируем следующую очевидную теорему.

Теорема 6. Конус может быть расширен до линейного пространства в том и только в том случае, если из равенства $a + c = b + c$ следует, что $a = b$. Элементами этого линейного пространства служат пары $\{a, b\}$ с законом отождествления $\{a + c, b + c\} = \{a, b\}$.

Каждому множеству A из N соответствует при этом пара $\{A, O\}$, обратным элементом к которой служит пара $\{O, A\}$. Умножение на числа естественно определяется так: $\lambda \cdot \{A, B\} = \{\lambda A, \lambda B\}$, если $\lambda \geq 0$ и $\lambda \{A, B\} = \{(-\lambda)B, (-\lambda)A\}$, если $\lambda < 0$. При этом результатом умножения множества A на число $\lambda < 0$ является пара $\{O(-\lambda)A\}$.

Предварительно сформулируем некоторые леммы. Здесь для любого множества A n -мерного пространства замыкание его обозначаем $\bar{A}$, выпуклую оболочку — $[A]$.

Лемма 4. Для любых множеств A и B n -мерного пространства $[A + B] = [A] + [B]$.

Лемма 5. Для ограниченных множеств n -мерного пространства $\bar{A} + B = \bar{A + B}$.

Лемма 6. Для ограниченного множества A n -мерного пространства $[\bar{A}] = \bar{A}$.

* Заметим, что выпуклость рассматриваемых множеств при этом существенна. Для невыпуклых множеств, вообще говоря, $2A \neq A + A$.

** То, что вычитания действительно нет, легко понять, рассматривая уравнение $A + X = B$, если A, B — круги с центром в o радиусов 2 и 1 соответственно.

Доказательства этих лемм очевидны.

Лемма 7. Пусть $A, B, D \in N$ и $A + B = D$. Это условие определяет B в конусе N единственным образом.

Доказательство. Рассмотрим $X = \{x : x \in R^n, A + x \subset D\}$. Очевидно $A + X \subset D$ и X — ограниченное множество. Заметим, что если $A + Y \subset D$, то $Y \subset X$ по определению X . Значит, $B \subset X$. Поскольку $D = [D] \supset [A + X] = [A] + [X] = A + [X]$, то $[X] \subset X$ и, значит, X — выпуклое множество. Поскольку $D = \bar{D} = A + \bar{X} = \bar{A} + \bar{X} = A + \bar{X}$, то $\bar{X} \subset X$ и, значит, X — замкнутое множество. Предположим теперь, что $B \neq X$. Так как $B \subset X$, то найдется точка $x_0 \in X$, которая строго отделяется от B гиперплоскостью. Найдется, иначе говоря, вектор p такой, что $px_0 > pz$ при $z \in B$. Далее,

$$\max_{x \in D} px = \max_{x \in A+B} px = \max_{x \in A} px + \max_{x \in B} px,$$

и, с другой стороны,

$$\max_{x \in D} px \geq \max_{x \in A+X} px = \max_{x \in A} px + \max_{x \in X} px \geq \max_{x \in A} px + px_0 > \max_{x \in A} px + \max_{x \in B} px.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

15. Рассмотрим топологию и упорядочение пространства выпуклых ограниченных множеств. Будем говорить, что последовательность $\{A_n, B_n\}$ стремится к нулю (при $n \rightarrow \infty$), если $A_n \xrightarrow{(1)} B_n$. Нетрудно проверить, что линейные операции при этом оказываются непрерывными, и, таким образом, линейное пространство выпуклых ограниченных замкнутых множеств превращается в линейное топологическое пространство.

Отношение порядка в этом пространстве введем следующим образом: $\{A, B\} < \{A', B'\}$, если и только если $A + B' \subset A' + B$. Определение корректно, и отношение $<$ согласовано с линейными операциями.

Нам будет полезна следующая очевидная теорема.

Теорема 7. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция со значениями в упорядоченном линейном топологическом пространстве, t — действительный параметр. Если функция $f(\cdot)$ выпукла, т. е. если для любых $a, a', a + a' = 1$, t, t' оказывается $f(at + a't') \geq af(t) + a'f(t')$, то $f(t)$ дифференцируема справа и слева.

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства аналогичной теоремы о действительно значных выпуклых функциях*.

16. В совокупности выпуклых отображений, действующих из r -мерного пространства в m -мерное, линейные операции вводятся с помощью графиков этих отображений. Как было уже сказано, сложение отображений соответствует сложению их графиков. Результатом умножения на число $\lambda > 0$ отображения $\Gamma(\cdot)$, определенного на a , будем считать определенное на λa отображение, обозначая его $(\lambda \cdot \Gamma)(\cdot)$, график которого есть $\lambda \cdot \Gamma$, где Γ — график отображения $\Gamma(\cdot)$, т. е.

$$(\lambda \cdot \Gamma)(x) \left\{ z : z = \lambda \cdot y, y \in \Gamma\left(\frac{x}{\lambda}\right), x \in \lambda a \right\}.$$

* См., например, Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд и Г. Полиа. Неравенства. М., Изд-во иностр. лит., 1948, стр. 114, теорема 111.

В. Дифференцирование функционала на N

17. Рассмотрим функцию $m(w, z) = \max_{y \in w(z)} \varphi(y)$.

Пусть $\varphi(\cdot)$ — непрерывная выпуклая функция векторного переменного z , $w(\cdot)$ — ограниченное выпуклое отображение, заданное на выпуклом ограниченном множестве a . Справедлива следующая лемма.

Лемма 8. Если $\varphi(\cdot)$ — выпуклая функция, $w(\cdot)$ — выпуклое отображение, то $m(w, z)$ — выпуклая функция пары (w, z) .

Доказательство. Пусть u, v — выпуклые отображения, определенные на a и b соответственно; x, y — векторы из a и b , и $\alpha, \beta \geq 0$ — числа, $\alpha + \beta = 1$.

Рассмотрим

$$m(\alpha \circ u \oplus \beta \circ v, \alpha x + \beta y) = \max_{\substack{z_1 \in \alpha u(\xi_1/\alpha) \\ z_2 \in \beta v(\xi_2/\beta) \\ \xi_1 + \xi_2 = \alpha x + \beta y \\ \xi_1 \in \alpha a, \xi_2 \in \beta b}} \varphi(z_1 + z_2).$$

Положим $z_1 = \alpha z'$, $z_2 = \beta z''$, $\xi_1 = \alpha \xi'_1$, $\xi_2 = \beta \xi'_2$. Подставим в выражение для $m(\alpha \circ u \oplus \beta \circ v, \alpha x + \beta y)$ и отбросим штрихи. Получим

$$\begin{aligned} m(\alpha \circ u \oplus \beta \circ v, \alpha x + \beta y) &= \max_{\substack{z_1 \in u(\xi_1), z_2 \in v(\xi_2) \\ \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 = \alpha x + \beta y \\ \xi_1 \in a, \xi_2 \in b}} \varphi(\alpha z_1 + \beta z_2) \geq \\ &\geq \max_{\substack{z_1 \in u(x) \\ z_2 \in v(y)}} [\alpha \varphi(z_1) + \beta \varphi(z_2)] = \alpha m(u, x) + \beta m(v, y), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Из этого факта следует, что функции параметров λ или μ — $m(w \oplus \lambda \circ u, z)$ или $m(w, z + \mu \hat{z})$ — при фиксированных $w, z, v, \hat{z}$ являются непрерывными выпуклыми функциями этих параметров. Действительно, $m[w \oplus (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) \circ v, z] = m[\alpha_1 \circ (w \oplus \lambda_1 \circ v) \oplus \alpha_2 \circ (w \oplus \lambda_2 \circ v), z] \geq \alpha_1 m(w \oplus \lambda_1 \circ v, z) + \alpha_2 m(w \oplus \lambda_2 \circ v, z)$.

По μ выпуклость доказывается аналогично. Это означает, что для данных w, z и любых $v, \hat{z}$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{m(w \oplus \lambda \circ v, z) - m(w, z)}{\lambda} \quad \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{m(w, z + \mu \hat{z}) - m(w, z)}{\mu},$$

конечные или бесконечные, которые мы обозначим $\partial m / \partial w \cdot v$ и $\partial m / \partial z \cdot \hat{z}$ соответственно.

Здесь нам придется сделать отступление от намеченной цели и получить некоторые необходимые для дальнейшего результаты, которые могут иметь и самостоятельный интерес.

18. Пусть Γ_n есть последовательность выпуклых замкнутых ограниченных множеств, сходящаяся* к выпуклому замкнутому ограниченному множеству Γ . Обозначим через $K(x)$ выпуклый конус внешних нормалей опорных гиперплоскостей к Γ в точке x поверхности Γ , для Γ_n соответ-

* В том смысле, что к каждой точке $y \in \Gamma$ «подходит» последовательность $y_n \in \Gamma_n$, $y_n \rightarrow y$ и всякая сходящаяся последовательность $\{y_n\}$, $y_n \in \Gamma_n$ сходится к точке множества Γ .

венно $K_n(x)$. Через $K^\varepsilon(x)$ обозначим ε -раздutie* конуса $K(x)$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 8. Если $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$, то для каждой точки x_0 поверхности Γ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номер $n_0 = n(\varepsilon)$ и число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такие, что для $n > n_0$ и x , $|x - x_0| < \delta$, где x принадлежит поверхности Γ_n , имеем $K_n(x) \subset K^\varepsilon(x_0)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим существование для некоторого $\varepsilon > 0$ такой подпоследовательности $x_{n_k} \rightarrow x_0$, x_{n_k} принадлежит поверхности Γ_{n_k} такой, что в конусе $K_{n_k}(x_{n_k})$ найдется нормаль, не принадлежащая $K^\varepsilon(x_0)$. Пусть этой нормали соответствует гиперплоскость π_{n_k} . Из последовательности π_{n_k} выбираем сходящуюся подпоследовательность**, предел которой назовем π . Будем рассматривать только эту подпоследовательность множеств Γ_i ; $\Gamma_i \rightarrow \Gamma$. Нормаль к π не принадлежит открытому ядру $K^\varepsilon(x_0)$, значит, не принадлежит $K(x_0)$. Следовательно, по обе стороны от π есть точки из Γ . С другой стороны, с точностью до бесконечно малой поправки все точки выпуклых тел Γ_i лежат по одну сторону от π , откуда мы получаем, что последовательность Γ_i не может сгуститься к Γ , что доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть $f_n(x)$ — последовательность дифференцируемых выпуклых функций, заданных на замкнутом ограниченном выпуклом множестве A_n , сходящаяся к $f(x)$ — дифференцируемой выпуклой функции, заданной на A . Тогда во всякой внутренней точке x из A имеем $\nabla f_n(x) \rightarrow \nabla f(x)$.

Под словом «сходится» можно понимать «сходится в каждой точке» в силу следующего утверждения.

Теорема 9. Если последовательность ограниченных выпуклых функций f_n сходится к f в каждой точке замкнутого выпуклого ограниченного множества A , то f_n сходится к f равномерно на A .

19. Вычислим $dt/dw \cdot v$.

Ограничимся случаем линейной функции $\varphi(\cdot)$. Тогда

$$m(w \oplus \lambda \circ v, z) = \max_{v \in (w \oplus \lambda \circ v)(z)} p \cdot y = \max_{\substack{x+y=z \\ x \in a, y \in b}} \max_{\substack{\xi \in w(x) \\ \eta \in \lambda v\left(\frac{y}{\lambda}\right)}} p(\xi + \eta).$$

Обозначим $\max_{\xi \in w(x)} p \cdot \xi$ через $f(x)$, а $\max_{\eta \in v(y)} p \cdot \eta$ через $g(y)$. Функции $f(x)$ и $g(y)$ заданы на a и b , областях определения отображений w и v соответственно. Теперь

$$m(w \oplus \lambda \circ v, z) = \max_{\substack{x+y=z \\ x \in a, y \in \lambda b}} \left[f(x) + \lambda g\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right] = \max_{\substack{x+\lambda y=z \\ x \in a, y \in b}} [f(x) + \lambda g(y)].$$

Относительно отображения $w(\cdot)$ предположим, что оно является непрерывно дифференцируемым в точке z . Дифференцируемой будет, следовательно, и функция $f(\cdot)$. Точку z будем считать внутренней точкой множества a .

Найдем условие оптимальности для пары точек $x \in a$, $y \in b$. В каждой точке $y \in b$ существует выпуклый конус возможных направлений, который обозначим $S_b(y)$. Для достаточно малых λ оптимальные пары (x, y) будут таковы, что x окажется внутренней точкой a . Происходит это потому, что

* ε -раздutie конуса определим так: рассмотрим пересечение конуса $K(x)$ с единичной сферой, затем это пересечение раздеем на ε по сфере. Конус, который соответствует этому множеству, и есть $K^\varepsilon(x)$. Начало конуса всегда помещаем в точку 0.

** В конечномерном пространстве из всякой последовательности единичных векторов можно выбрать сходящуюся. Здесь сходимость гиперплоскостей понимается как сходимость единичных нормалей к ним.

при $\lambda \rightarrow 0$, очевидно, $x \rightarrow z$, а точка z — по предположению — внутренняя для a . Дадим паре (x, y) приращение (ξ, η) такое, что $x + \xi \in a$, $y + \eta \in b$, $(x + \xi) + \lambda(y + \eta) = z$ или $\xi + \lambda\eta = 0$, $\eta \in C_b(y)$. При этом $f(x + \xi) + \lambda g(y + \eta) \leq f(x) + \lambda g(y)$, что дает $\nabla f(x) \cdot \xi + \lambda \nabla g(y) \cdot \eta \leq 0$. Величина $\nabla g(y) \cdot \eta$ должна существовать, ибо из экономических соображений вертикальных касательных не может быть ни в одной точке y из b .

Заменяем $\lambda\eta$ на η и ξ на $-\eta$, получаем условие оптимальности

$$\nabla f(x)\eta + \nabla g(y)\eta \leq 0 \quad (49)$$

для всех $\eta \in C_b(y)$ при $x + \lambda y = z$, $x \in a$, $y \in b$. Рассмотрим множество M :

$$M = \{(x, y) : x \in a, y \in b, \nabla g(y)\eta \leq \nabla f(x)\eta \text{ для всех } \eta \in C_b(y)\}. \quad (50)$$

Тогда совокупность оптимальных точек для задачи

$$\max_{\substack{x+\lambda y=z \\ x \in a, y \in b}} [f(x) + \lambda g(y)] \quad (51)$$

получается как результат пересечения множества M с прямой $x + \lambda y = z$, что будем обозначать $M|_{x+\lambda y=z}$.

Исследуем строение множества M . Положим

$$F(x, y) = \sup_{\eta \in C_b(y), |\eta|=1} [\nabla g(y)\eta - \nabla f(x)\eta]. \quad (52)$$

Эта величина существует для всякого $y \in b$ (и всякого x), так как $\nabla g(y)\eta$ является «касательным конусом» к $g(y)$ в точке y и потому $\nabla g(y)\eta$ выпукла по η . По x функция $F(x, y)$ — непрерывна, по y — как сейчас увидим — полунепрерывна сверху, т. е.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(x, y) \geq F(x, y_0).$$

Нормали $\nabla g(y)$ образуют границу конуса $K_b(y)$. Из теоремы 8 следует, что $K_b(y)$ есть полунепрерывное сверху отображение, заданное на b . Поэтому если $y' \rightarrow y$, то $K_b(y') \subset K_b^e(y)$. Наоборот, $C_b(y)$ есть полунепрерывное снизу отображение, заданное на b (ввиду очевидной связи между $K_b(y)$ и $C_b(y)$); поэтому $C_b^e(y') \supset C_b(y)$. Из той же теоремы следует полунепрерывность сверху $\nabla g(y)$ при $y' \rightarrow y$ и фиксированном η .

Из всего сказанного следует необходимое свойство $F(x, y)$. Ввиду этого множество $M = \{(x, y) : x \in a, y \in b, F(x, y) \leq 0\}$ является замкнутым.

Вычислим теперь $\partial m / \partial w \cdot v$. Обозначим (x^λ, y^λ) любую точку из $M|_{x+\lambda y=z}$. Для любой такой пары $f(x^\lambda) + \lambda g(y^\lambda)$ постоянно. Выберем последовательность (x^λ, y^λ) сходящейся к некоторой паре (z, y) из $\lim_{\lambda \rightarrow 0} M|_{x+\lambda y=z} \subset M_z$. Тогда $f(x^\lambda) + \lambda g(y^\lambda) = f(z - \lambda y + o(\lambda)) + \lambda g(y +$

$+ o(1)) = f(z) - \lambda \nabla f(z) \cdot y + \lambda g(y) + o(\lambda)$, откуда $\partial m / \partial w \cdot v = g(y) - \nabla f(z) \cdot y$. Эта величина не зависит от выбора $(z, y) \in \lim_{\lambda \rightarrow 0} M|_{x+\lambda y=z}$.

Далее, функция $g(y) - \nabla f(z) \cdot y$ постоянна на множестве M_z , ибо M_z оказывается тем подмножеством, на котором она достигает максимума на множестве (z, b) . Действительно, пусть $(z, y) \in M_z$. Дадим y возможное приращение $\eta \in C_b(y)$. Получим, что приращение функции есть $[g(y + \eta) - \nabla f(z) \cdot (y + \eta)] - [g(y) - \nabla f(z) \cdot y] = \nabla g(y) \cdot \eta - \nabla f(z) \cdot \eta$ — по самому определению M величина неположительная. Так как функция $g(y) - \nabla f(z) \cdot y$ выпукла по y , то это есть достаточное условие максимальной.

Итак,

$$\frac{\partial m}{\partial w} v = \max_{y \in b} [g(y) - \nabla f(z) \cdot y]. \quad (53)$$

Вспоминая определение $g(y)$, можем написать

$$\frac{\partial m}{\partial w} v = \max_{y \in b} [\max_{x \in v(y)} px - \nabla f(z) y] \quad (54)$$

или иначе:

$$\frac{\partial m}{\partial w} v = \max_{(x, y) \in v} [px - \nabla f(z) y]. \quad (55)$$

Условие $(x, y) \in v$ означает, что вектор (x, y) принадлежит графику отображения $v(\cdot)$. Отсюда легко получить линейность функционала $\partial m / \partial w \cdot v$ по v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial w} (v_1 + v_2) &= \max_{(x, y) \in v_1 + v_2} [px - \nabla f(z) y] = \max_{(x, y) \in v_1} [px - \nabla f(z) y] + \\ &+ \max_{(x, y) \in v_2} [px - \nabla f(z) \cdot y] = \frac{\partial m}{\partial w} v_1 + \frac{\partial m}{\partial w} v_2. \end{aligned} \quad (56)$$

20. Докажем формулу (16). Пусть $w_n \rightarrow w$, $z_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$). В таком случае $m(w_n z_n) \rightarrow m(w, z)$. В силу следствия из теоремы 8 производные

$\frac{\partial m}{\partial z} \Big|_{w=w_n, z=z_n}$ сходятся к производной $\partial m / \partial z$. При этом производной

$\frac{\partial m}{\partial z} \Big|_{w=w_n, z=z_n}$ будем называть один из векторов, нормальных к каса-

тельной гиперплоскости. Такое толкование удобно, потому что позволяет обобщить формулу Лагранжа на случай дифференцируемой в данной точке выпуклой функции (обычно требуют непрерывную дифференцируемость в точке и дифференцируемость в окрестности):

$$\varphi(t + h) = \varphi(t) + \partial \varphi / \partial t (t + \theta h) \cdot h,$$

при подходящем выборе $0 < \theta < 1$ и $\partial \varphi / \partial t$.

Получим теперь формулу (16)

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{m(w \oplus \lambda \circ v, z + \lambda \hat{z}) - m(w, z)}{\lambda} &= \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{m(w \oplus \lambda \circ v, z + \lambda \hat{z}) - m(w \oplus \lambda \circ v, z)}{\lambda} + \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{m(w \oplus \lambda \circ v, z) - m(w, z)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial m}{\partial z} (w \oplus \lambda \circ v, z + \theta \lambda \hat{z}) + \frac{\partial m}{\partial w} v. \end{aligned}$$

В силу непрерывности $\partial m / \partial z$ предел первого слагаемого есть $\partial m / \partial z \cdot \hat{z}$ и формула доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., изд-во «Наука», 1964.
3. К. Берг. Общая теория игр нескольких лиц. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию
25 I 1965