ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1966 том II, вып. 3

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ДОСТАВКИ ГРУЗОВ

Б. А. АТЛАС, С. С. ГДАЛЕВИЧ

(Ленинград)

Уровень технического прогресса на водном транспорте и экономичность его работы во многом зависят от решения проблемы обоснования оптимального комплекса технических средств доставки грузов (совокупности судов и перегрузочных машин) для освоения заданного объема перевозок с минимальными суммарными (по флоту и механизации) приведенными затратами. В каждом пункте для данного рода груза должен быть выбран один из нескольких возможных вариантов механизации погрузки или выгрузки, а перевозки между двумя корреспондирующими пунктами должны осуществляться судами одного типа.

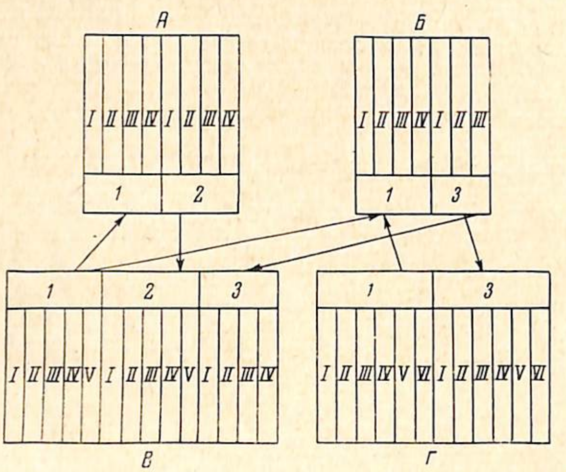

Рис. 1

В качестве иллюстрации на рис. 1 дана схема перевозок между четырьмя пунктами: $А$, $Б$, $В$ и $Г$. Стрелками показаны направления заданных грузопотоков, арабскими цифрами — номера родов грузов, римскими — варианты механизации. Может оказаться, например, что для направления $Б - В$ (и обратно), без учета других направлений, оптимальным является способ доставки, при котором в пункте $Б$ используется комбинация вариантов механизации $I - III$ (соответственно по первому и третьему роду грузов), а для направления $Б - Г$ способ доставки с комбинацией вариантов $II - IV$ в пункте $Б$. Однако, как было отмечено, для определенного рода груза в каждом пункте должен быть выбран какой-либо один вариант механизации. Не исключена возможность, что при рассмотрении всей совокупности грузопотоков в оптимальный комплекс войдет комбинация вариантов механизации в пункте $Б$, отличная как от $I—III$, так и от $II—IV$. Это связано с тем обстоятельством, что тип судна влияет на выбор механизации, и наоборот. Следовательно, выбор типов судов и перегрузочных машин должен осуществляться комплексно. В настоящее время обоснование производится раздельно и, естественно, не гарантируется нахождение оптимального комплекса, что приводит к нерациональным затратам средств. С другой стороны, если во всех пунктах по каждому роду груза произвольно выбрать вариант механизации, то при заданных грузопотоках нетрудно определить оптимальные типы судов. Действительно, так как варианты механизации заданы, то для каждого направления выбирается тип судна, при котором суммарные затраты по доставке (по флоту и механизации) наименьшие. Однако даже для упомянутой задачи с четырьмя пунктами количество способов выбора вариантов механизации превышает 500 000, поэтому решение задач рассматриваемого типа практически невозможно без применения математических методов и ЭВМ. Этот тип задач является частным случаем более общей и часто встречающейся на практике задачи по определению оптимального комплекса технических средств с учетом ограничений по капиталовложениям, которые необходимо рационально распределить между объектами комплекса. В общем виде последняя задача формулируется следующим образом: имеется T пунктов, связанных грузопотоками; между каждой парой корреспондирующих пунктов задан объем перевозок Q_{ij} и Q_{ji} в обоих направлениях (в одном из направлений объем перевозок может быть равен нулю) и в каждом направлении задан род перевозимого груза; N типов судов существующего и проектируемого флота; в i-м пункте для перегрузки k-го рода груза возможен выбор одного и только одного из H_i^k вариантов механизации; перевозки между каждой парой корреспондирующих пунктов должны осуществляться судами одного типа; известны $R_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l)$ — суммарные приведенные затраты по осуществлению заданного объема перевозок между пунктами i и j способом доставки, при котором используются суда n-го типа и варианты механизации переработки k-го и l-го родов грузов $h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l$ [способом $(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l)$], при этом $R_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_i^l)$ и $R_{ji}(n; h_j^k; h_j^l; h_i^k; h_i^l)$ не различаются*:

$$R_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l) = G_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l) +$$
$$+ \alpha_{ij}^k G_{h_i^k} + \alpha_{ij}^l G_{h_i^l} + \alpha_{ji}^k G_{h_j^k} + \alpha_{ji}^l G_{h_j^l},$$

где $G_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_i^k; h_j^l)$ — приведенные затраты, связанные с использованием судов n-го типа для выполнения всего объема перевозок между пунктами i и j по способу $(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l)$;

α_{ij}^k — доля объема перегрузки k-го рода груза в i-м пункте, приходящаяся на корреспонденцию с пунктом j $(0 < \alpha_{ij}^k \leqslant 1)$ (аналогичный смысл имеют $\alpha_{ij}^l; \alpha_{ji}^k; \alpha_{ji}^l$);

$G_{h_i^k}$ — приведенные затраты по выполнению всего объема перегрузки k-го рода груза в i-м пункте при использовании варианта механизации h_i^k (аналогичный смысл имеют затраты $G_{h_i^l}$; $G_{h_j^k}$; $G_{h_j^l}$).

Введем следующие обозначения:

$a_{ij}(n; h_i^k; h_j^k)$ — число судов n-го типа, необходимое для выполнения всего объема перевозок между пунктами i и j, связанными корреспонденцией по одному роду груза (k), по способу $(n; h_i^k; h_j^k)$;

$a_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l)$ — число судов n-го типа, необходимое для выполнения всего объема перевозок между пуктами i и j, связанными корреспонденцией по двум родам грузов $(k; l)$, по способу $(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l)$;

D_n — капиталовложения, связанные с постройкой одного судна n-го типа (для существующих типов $D_n = 0$);

$P_{h_i^k}$ — капиталовложения, связанные с установкой в i-м пункте варианта механизации h_i^k (для существующих вариантов $P_з = 0$);

* В результате анализа массовых грузопотоков основных речных пароходств установлено, что почти все пары пунктов корреспондируют не более чем по двум родам массовых грузов, причем, если пара пунктов корреспондирует по двум родам грузов, то эти грузы переводятся в двух взаимно-противоположных направлениях. Для пары пунктов i и j, корреспондирующих по одному роду груза (груз перевозится в одном из двух направлений), функция затрат имеет вид $R_{ij}(n; h_i^k; h_j^k)$.

$z = z(n;\ h_i^k;\ h_i^l;\ h_j^k;\ h_j^l)$ — капиталовложения, связанные со способом доставки $(n;\ h_i^k;\ h_i^l;\ h_j^k;\ h_j^l)$ *.

I_1 и I_2 — множества всех пар (i, j), таких, что между пунктами i и j задан объем перевозок в одном и в обоих направлениях соответственно; K_i — множество индексов родов грузов (k), которые перерабатываются в пункте i;

$y_{h_i^k}$ — искомая интенсивность применения варианта механизации h_i^k при переработке k-го рода груза в пункте i **;

$$U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k;\ \sum_{h_j^k=1}^{H_j^k} y_{h_j^k} h_j^k\right) —$$

— искомая интенсивность применения способа перевозки груза между пунктами i и j судами n-го типа при искомых вариантах механизации $\{(i, j) \in I_1;\ k \in K_i \cap K_j;\ n = 1, 2, \ldots, N\}$; аналогично определяется

$$U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k;\ \sum_{h_i^l=1}^{H_i^l} y_{h_i^l} h_i^l;\ \sum_{h_j^k=1}^{H_j^k} y_{h_j^k} h_j^k;\ \sum_{h_j^l=1}^{H_j^l} y_{h_j^l} h_j^l\right)$$

для $(i, j) \in I_2$, $k;\ l \in K_i \cap K_j$.

С учетом введенных обозначений задача заключается в нахождении чисел $n;\ y_{h_l^k};\ y_{h_j^k}$ для каждой пары $(i, j) \in I_1$; $k \in K_i \cap K_j$, а также $n;\ y_{h_k^l}$, $y_{h_i^l}\ y_{h_j^k} y_{h_j^l}$; для каждой пары $(i, j) \in I_2$; $(k, l) \in K_i \cap K_j$; при которых достигается минимум целевой функции

$$\sum_{I_1} \sum_{n=1}^{N} R_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k;\ \sum_{h_j^k=1}^{H_j^k} y_{h_j^k} h_j^k\right) \times U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k;\ \sum_{h_j^k=1}^{H_j^k} y_{h_j^k} h_j^k\right) +$$

$$+ \sum_{I_2} \sum_{n=1}^{N} R_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k;\ \sum_{h_i^l=1}^{H_i^l} y_{h_i^l} h_i^l;\ \sum_{h_j^k=1}^{H_j^k} y_{h_j^k} h_j^k;\ \sum_{h_j^l=1}^{H_j^l} y_{h_j^l} h_j^l\right) \times$$

$$\times U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k;\ \sum_{h_i^l=1}^{H_i^l} y_{h_i^l} h_i^l;\ \sum_{h_j^k=1}^{H_j^k} y_{h_j^k} h_j^k;\ \sum_{h_j^l=1}^{H_j^l} y_{h_j^l} h_j^l\right)$$

при ограничениях:

$$\sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} = 1 \quad \text{для всех} \quad k \in K_i; \quad i = 1, 2, \ldots, T; \tag{1}$$

---

* В рассматриваемых условиях

$$z = D_n a_{ij}(n;\ h_i^k;\ h_i^l;\ h_j^k;\ h_j^l) + \alpha_{ij}^k P_{h_i^k} + \alpha_{ij}^l P_{h_i^l} + \alpha_{ji}^k P_{h_j^k} + \alpha_{ji}^l P_{h_j^l}$$

** Под интенсивностью понимается доля общего объема груза k-го рода, перерабатываемая при варианте h_i^k (по условию задачи $y_{h_i^k} = 1$ либо $y_{h_i^k} = 0$; отсюда, в частности, следует, что $\sum_{h_i^k=1}^{H_i^k} y_{h_i^k} h_i^k$ — номер соответствующего искомого варианта механизации).

$$\sum_{n=1}^{N} U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k\right)=1 \quad \text{для всех} \quad (i,\ j)\in I_1,$$

$$\sum_{n=1}^{N} U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_i{}^l=1}^{H_i{}^l} y_{h_i{}^l} h_i^l;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k;\ \sum_{h_j{}^l=1}^{H_j{}^l} y_{h_j{}^l} h_j^l\right)=1$$

$$\text{для всех} \quad (i,\ j)\in I_2; \tag{2}$$

$$y_{h_i{}^k}=\begin{cases}1\\ \text{или} \quad \text{для всех} \quad k\in K_i;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ T;\\ 0\end{cases} \tag{3}$$

$$U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k\right)=\begin{cases}1\\ \text{или для всех } (i,\ j)\in I_1,\\ 0\end{cases}$$

$$U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_i{}^l=1}^{H_i{}^l} y_{h_i{}^l} h_i^l;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k;\ \sum_{h_j{}^l=1}^{H_j{}^l} y_{h_j{}^l} h_j^l\right)=$$

$$=\begin{cases}1\\ \text{или} \quad \text{для всех} \quad (i,\ j)\in I_2;\\ 0\end{cases} \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{T}\sum_{h_i{}^k=1}^{H_j{}^k}\sum_{k\in K_i} P_{h_i{}^k} y_{h_i{}^k}+\sum_{n=1}^{N} D_n \sum_{ij\in I_1} a_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k\right)\times$$

$$\times U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N} D_n \sum_{ij\in I_2} a_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_i{}^l=1}^{H_i{}^l} y_{h_i{}^l} h_i^l;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k;\ \sum_{h_j{}^l=1}^{H_j{}^l} y_{h_j{}^l} h_j^l\right)\times$$

$$\times U_{ij}\left(n;\ \sum_{h_i{}^k=1}^{H_i{}^k} y_{h_i{}^k} h_i^k;\ \sum_{h_i{}^l=1}^{H_i{}^l} y_{h_i{}^l} h_i^l;\ \sum_{h_j{}^k=1}^{H_j{}^k} y_{h_j{}^k} h_j^k;\ \sum_{h_j{}^l=1}^{H_j{}^l} y_{h_j{}^l} h_j^l\right)\leqslant Z. \tag{5}$$

$$0\leqslant Z\leqslant C$$

Ограничения (1) обеспечивают переработку заданного количества грузов во всех пунктах; ограничения (2) обеспечивают выполнение всего объема перевозок; условия (1) и (3) связаны с использованием в каждом пункте одного и только одного варианта механизации переработки однородного груза; условия (2) и (4) связаны с использованием одного и только одного типа флота для выполнения заданного объема перевозок между каждой парой корреспондирующих пунктов; неравенство (5) является ограничением на размер капиталовложений во флот и механизацию.

При разработке алгоритма решения методом динамического программирования были учтены следующие обстоятельства, которые, как правило, имеют место в реальных транспортных процессах.

1) Корреспонденция основных грузопотоков имеет вид дерева или нескольких деревьев, т. е. все пункты можно перенумеровать: 1, 2, ..., T таким образом, что каждый предыдущий пункт связан корреспонденцией грузопотоков не более чем с одним из последующих (в то же время этот пункт может быть связан с одним или несколькими предыдущими). Вершиной дерева является пункт, который связан корреспонденцией лишь с одним пунктом.

2) В каждом пункте перерабатывается не более трех родов груза. Если в некоторых пунктах перегружается более трех родов груза, то каждый такой пункт можно рассматривать как два или более самостоятельных. При этом корреспонденция грузопотоков между новой совокупностью пунктов также удовлетворяет условию (1).

Пункты, соответствующие вершинам дерева, назовем узловыми нулевого порядка. Те пункты, которые соответствуют вершинам после удаления всех крайних «веток»,— узловыми первого порядка. Аналогично определяются пункты более высоких порядков.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Подготовительный этап. Разобьем интервал $[0; C]$ на m промежутков

$$\left[0; \frac{C}{m}\right]; \left[\frac{C}{m}; \frac{2C}{m}\right]; \ldots; \left[\frac{C(m-1)}{m}; C\right]$$

и будем приближенно считать, что все значения

$$z \in \left[\frac{qC}{m}; \frac{(q+1)C}{m}\right]$$

равны между собой, при этом

$$z = \frac{q+1}{m}C; \; q = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Рассмотрим функцию затрат $R_{ij}(n; h_i^k; h_j^k)$ *. При любых фиксированных h_i^k; h_j^k каждому значению n отвечает одно значение суммы капиталовложений. С другой стороны, одному и тому же z может соответствовать несколько значений n, а следовательно, столько же значений $R_{ij}(n; h_i^k; h_j^k)$ (для некоторых z может не существовать ни одного способа доставки). Нетрудно убедиться, что для такого z все значения R_{ij}, удовлетворяющие неравенству

$$R_{ij}(n; h_i^k; h_j^k) > \min_n R_{ij}(n; h_i^k; h_j^k) = R_{ij}(n_0; h_i^k; h_j^k),$$

могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения. Действительно, предположим, что в оптимальный комплекс войдут рассматриваемые варианты механизации и некоторый тип судна $n_1 \neq n_0$, осуществляющий перевозки между пунктами i и j. Однако при $n = n_0$, не меняя остальных элементов комплекса и при той же сумме капиталовложений, получим другое решение с меньшими затратами $(R_{ij}(n_0; h_i^k; h_j^k))$.

После исключения указанных заведомо неоптимальных способов доставки каждому значению z при фиксированных вариантах механизации

* Для функции вида $R_{ij}(n; h_i^k; h_i^l; h_j^k; h_j^l)$ все рассуждения проводятся аналогично.

будет отвечать не более одного значения n, поэтому функция затрат может быть представлена в виде

$$S_{ij}(h_i^k;\ h_j^k;\ z) \quad \text{для} \quad (i,\ j) \in I_1;$$

$$S_{ij}(h_i^k;\ h_i^l;\ h_j^k;\ h_j^l;\ z) \quad \text{для} \quad (i,\ j) \in I_2.$$

Тип судна однозначно определяется набором $(h_i^k;\ h_j^k;\ z)$. Выберем произвольный узловой пункт первого порядка i. Корреспонденции этого пункта будут наиболее полно охарактеризованы, если, не нарушая общности, считать, что в нем перерабатываются три рода груза и он корреспондирует с пунктами нулевого порядка $1,\ 2,\ \ldots,\ j_1$ по первому роду груза, с $j_1+1,\ \ldots,\ j_2$ — по третьему, с $j_2+1,\ \ldots,\ j_3$ — по первому и третьему, с $j_3+1,\ \ldots,\ j_4$ — по второму, с $j_4+1,\ \ldots,\ j_5$, а также с узловым пунктом первого или более высокого порядка j — по первому и второму родам грузов.

Если в пункте i перерабатывается менее трех родов грузов, либо не существует одной или нескольких из перечисленных групп пунктов нулевого порядка, то для такой «менее сложной» схемы корреспонденций все дальнейшие рассуждения и алгоритм остаются справедливыми. Следует заметить, что если пункт i корреспондирует с j-м по другому сочетанию родов грузов или вообще по одному роду груза, то порядок нумерации пунктов нулевого порядка соответственно изменится. В каждом конкретном случае наиболее приемлемая нумерация следует из построения приведенного ниже алгоритма.

Рассмотрим

$$f_{i1}(h_i^1;\ z) = \min_{h_1^1} S_{i1}(h_i^1;\ h_1^1;\ z) = S_{i1}(h_i^1;\ \bar{h}_1^1;\ z).$$

Так как пункт 1 связан перевозками лишь с i-м, то очевидно, что нет необходимости знать значения $S_{ij}(h_i^1;\ h_1^1;\ z)$ при $h_1^1 \neq \bar{h}_1^1$. В то же время следует запомнить номер варианта $\bar{h}_1^1$, который соответствует $f_{i1}(h_i^1;\ z)$. Совершенно аналогично строятся функции f_{ij} и для остальных пунктов нулевого порядка, связанных корреспонденцией с рассматриваемым пунктом i, как для $(i,\ j) \in I_1$, так и для $(i,\ j) \in I_2$.

Этап 1. Определяется

$$F_1(h_i^1;\ z) = \min_{x \leqslant z} [f_{i1}(h_i^1;\ x) + f_{i2}(h_i^1;\ z-x)] \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant C.$$

$F_1(h_i^1;\ z)$ для каждой пары значений h_i^1 и z определяет минимальные затраты, связанные с доставкой между пунктами i, 1 и 2, а значение x, при котором достигается минимум, соответствует оптимальному распределению z на x и $z-x$.

Этап 2.

$$F_2(h_i^1;\ z) = \min_{x \leqslant z} [f_{i3}(h_i^1;\ x) + F_1(h_i^1;\ z-x)].$$

$F_2(h_i^1;\ z)$ для каждой пары h_i^1 и z определяет минимальные затраты, связанные с доставкой между пунктами i, 1, 2 и 3. Значение x, при котором достигается минимум, равно сумме капиталовложений, которую следует отнести на доставку между пунктами i и 3, а $z-x$ на два других направления.

. . . .

Этап $j_1 - 1$.

$$F_{j_1-1}(h_i^1;\ z) = \min_{x \leqslant z} [f_{ij_1}(h_i^1;\ x) + F_{j_1-2}(h_i^1;\ z-x)].$$

Этап j_1.

$$F_{j_1}(h_i^1;\ h_i^3;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_1+1}(h_i^3;\ x) + F_{j_1-1}(h_i^1;\ z-x)].$$

. . . .

Этап $j_2 - 1$.

$$F_{j_2-1}(h_i^1;\ h_i^3;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_2}(h_i^3;\ x) + F_{j_2-2}(h_i^1;\ h_i^3;\ z-x)].$$

Этап j_2.

$$F_{j_2}(h_i^1;\ h_i^3;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_2+1}(h_i^1;\ h_i^3;\ x) + F_{j_2-1}(h_i^1;\ h_i^3;\ z-x)].$$

. . . .

Этап $j_3 - 1$.

$$F_{j_3-1}(h_i^1;\ z) = \min_{x \leqslant z;\ h_i^3}[f_{ij_3}(h_i^1;\ h_i^3;\ x) + F_{j_3-2}(h_i^1;\ h_i^3;\ z-x)].$$

$F_{j_3-1}(h_i^1;\ z)$ для каждой пары аргументов h_i^1 и z определяет минимальные затраты по доставке между пунктами i, 1, ..., j_3. Значения x и h_i^3, при которых достигается минимум, соответствуют наивыгоднейшему распределению величины z на x и $z - x$ и оптимальному варианту механизации перегрузки третьего рода груза в пункте i.

Этап j_3.

$$F_{j_3}(h_i^1;\ h_i^2;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_3+1}(h_i^2;\ x) + F_{j_3-1}(h_i^1;\ z-x)].$$

. . . .

Этап $j_4 - 1$.

$$F_{j_4-1}(h_i^1;\ h_i^2;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_4}(h_i^2;\ x) + F_{j_4-2}(h_i^1;\ h_i^2;\ z-x)].$$

Этап j_4.

$$F_{j_4}(h_i^1;\ h_i^2;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_4+1}(h_i^1;\ h_i^2;\ x) + F_{j_4-1}(h_i^1,\ h_i^2;\ z-x)].$$

. . . .

Этап $j_5 - 1$.

$$F_{j_5-1}(h_i^1,\ h_i^2;\ z) = \min_{x \leqslant z}[f_{ij_5}(h_i^1;\ h_i^2;\ x) + F_{j_5-2}(h_i^1;\ h_i^2;\ z-x)]. \qquad (6)$$

$F_{j_5-1}(h_i^1;\ h_i^2;\ z)$ для каждого набора аргументов определяет минимальные затраты по доставке между пунктом i и всеми пунктами нулевого порядка, связанными с ним перевозками.

Этап j_5.

$$F_{j_5}(h_j^1;\ h_j^2;\ z) = \min_{x \leqslant z;\ h_i^1;\ h_i^2}[S_{ji}(h_j^1;\ h_j^2;\ h_i^1;\ h_i^2;\ x) + F_{j_5-1}(h_i^1;\ h_i^2;\ z-x)]. \qquad (7)$$

$F_{j_5}(h_j^1;\ h_j^2;\ z)$ определяет минимальные затраты по доставке между узловым пунктом более высокого порядка j, узловым пунктом первого порядка i и пунктами нулевого порядка 1, 2, ..., j_5. С другой стороны, $F_{j_5}(h_j^1;\ h_j^2;\ z)$ может быть интерпретирована как затраты по всевозможным способам доставки между некоторым (укрупненным) пунктом i и пунктом j.

Таким образом, исходная задача свелась к новой, в которой число корреспондирующих пунктов уменьшилось на j_5, а пункт i рассматривается как пункт нулевого порядка. Исходные данные полученной задачи для оставшихся корреспонденций те же, что и в первоначальной, за исключением функции $S_{ji}(h_j^1;\ h_j^2;\ h_i^1;\ h_i^2;\ z)$, которая заменяется на $F_{j_5}(h_j^1;\ h_j^2;\ z)$.

Решение новой задачи проводится совершенно аналогично. В результате решения последней задачи определяется функция того же типа, как и на каждом из предыдущих этапов. Не вводя новых обозначений, будем считать, что этой функцией является $F_{j_5}(h_j^1; h_j^2; z)$. В этом случае с учетом всех условий задачи минимальные затраты по всему объему перевозок $F = \min\limits_{h_j^1; h_j^2; z} F_{j_5}(h_j^1; h_j^2; z)$. Оптимальный комплекс технических средств определяется следующим образом.

Значения $\bar{h}_j^1$; $\bar{h}_j^2$ и z, при которых достигается минимум F_{j_5}, — варианты механизации переработки первого и второго родов грузов, входящие в оптимальный комплекс, и общий размер капиталовложений во флот и механизацию.

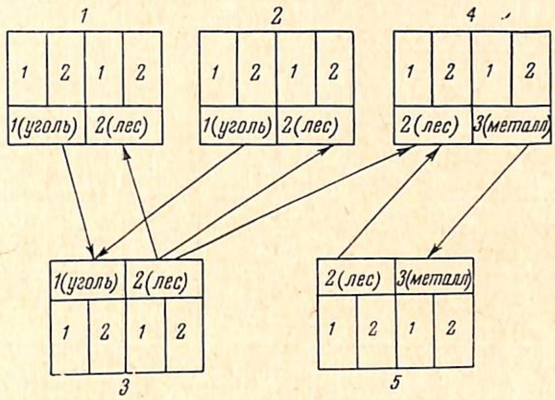

Рис. 2

Подставив $\bar{h}_j^1$, $\bar{h}_j^2$ и z в (7), определим варианты механизации $\bar{h}_i^1$ и $\bar{h}_i^2$, которые также входят в искомый комплекс, и сумму капиталовложений $\bar{x}$, связанную с доставкой между пунктами j и i. Затем $\bar{h}_i^1$, $\bar{h}_i^2$ и $\bar{x}$ подставляем в (6) вместо h_i^1; h_i^2; z. Заметим, что после подстановки функция $f_{ij_5}(\bar{h}_i^1; \bar{h}_i^2; \bar{x})$, как было показано на предварительном этапе, соответствует вполне определенному типу судна.

Так, последовательно возвращаясь к предыдущим этапам, определяем оптимальный комплекс транспортных и перегрузочных средств.

Как видно из алгоритма, с учетом всевозможных исходов предыдущего этапа на последующем проводилась оптимальная стратегия выбора технических средств и распределения капиталовложений, что согласуется с принципом оптимальности Беллмана.

Изложенный алгоритм позволяет найти абсолютный минимум затрат; при этом отклонение суммы капиталовложений, рассчитанной в процессе решения, от истинной не превосходит $(T-1)C/m$. За счет увеличения m эта величина может быть сведена к сколь угодно малой.

В лаборатории транспортно-экономической кибернетики Ленинградского института водного транспорта выполняется научно-исследовательская работа по обоснованию оптимального комплекса транспортных и перегрузочных средств для освоения основных грузопотоков Северо-Западного и Беломорско-Онежского речных пароходств. С этой целью составлена машинная программа по расчету исходных данных и составляется программа решения задачи изложенным алгоритмом на ЭВМ «Урал-4».

Программой предусмотрено занесение исходных данных на внешний накопитель, что позволяет решать задачи подобного типа любого встречающегося на практике размера.

В дальнейшем имеется в виду объединение обеих программ в целях одновременного расчета исходных данных и непосредственного решения задачи. Разработаны также методические указания для научно-исследовательских и проектных организаций по практическому использованию алгоритмов решения основных задач по оптимальному выбору средств доставки грузов при различных условиях. В качестве примера рассмотрим решение задачи обоснования оптимального комплекса для схемы грузопотоков, приведенной на рис. 2.

Исходные данные размещены в табл. 1—4.

Таблица 1

$f_{31}(h_3^1;\ h_3^2;\ z)$

z / $h_3^1 - h_3^2$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1—1	4,2 3 1—2	3,5 2 2—1	—	—	—	2,5 1 2—2	—	—	—	—
1—2	4,0 3 1—1	—	3,2 2 2—1	—	—	—	2,4 1 2—2	—	—	—
2—1	—	3,8 3 1—1	—	3,0 2 2—1	—	—	—	—	2,4 1 2—1	—
2—2	—	—	3,6 3 1—1	2,9 2 1—2	—	—	—	—	2,3 1 2—1	—

Таблица 2

$f_{32}(h_3^1;\ h_3^2;\ z)$

z / $h_3^1 - h_3^2$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1—1	5,0 3 1—1	—	4,2 2 1—2	—	—	—	3,7 1 2—2	—	—	—
1—2	—	4,7 3 1—1	—	4,2 2 2—2	—	—	—	3,8 1 2—1	—	—
2—1	—	4,5 3 1—2	—	4,3 2 2—1	—	—	—	—	4,0 1 1—2	—
2—2	—	—	4,3 3 2—2	—	4,0 2 2—1	—	—	—	3,7 1 1—2	—

Таблица 3

$f_{45}(h_4^2;\ h_4^3;\ z)$

z / ${}^2_4\ h_4^3$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1—1	2,5 3 2—2	—	2,3 3 2,1	2,0 2 1—1	1,8 2 2—1	—	—	—	—	—
1—2	—	—	2,3 3 2—1	1,8 2 1—1	—	1,7 2 2—1	—	—	—	—
2—1	—	2,3 3 2—1	—	2,0 2 2—1	1,8 2 2—2	—	—	—	—	—
2—2	—	—	2,1 3 2—1	—	1,7 2 2—1	1,5 2 2—2	—	—	—	—

В верхней части каждой заполненной клетки табл. 1—3 помещены затраты по доставке в виде значений функции $f_{ij}(h_i^k;\ h_i^l;\ z)$ (считается, что эти значения вычислены на предварительном этапе), в нижней части — номер соответствующего типа судна и комбинация вариантов $(h_j^k;\ h_j^l)$ в пункте нулевого порядка j. Каждый столбец соответствует сумме капиталовложений z из промежутка $[0{,}5(r-1);\ 0{,}5r]$, где r — номер столбца. Клетки, для которых $f_{ij}(h_i^k;\ h_i^l;\ z)$ не определены, прочеркнуты. Так как третий и четвертый пункты не являются пунктами нулевого порядка, исходные данные приведены в виде табл. 4 значений функции $S_{34}(h_3^2;\ h_4^2;\ z)$ с указанием соответствующего типа судна. В верхней части клеток табл. 4 помещены расходы по доставке, в нижней — соответствующий размер капиталовложений.

Этап 1. Составляется табл. 5 значений

$$F_1(h_3^2; z) = \min_{x\leqslant z;\ h_3^1} [f_{31}(h_3^1; h_3^2; x) + f_{32}(h_3^1; h_3^2; z-x)].$$

$F_1(h_3^2; z)$ — для каждого набора $(h_3^2; z)$ представляет собой минимальные затраты по доставке между пунктами *1*, *2* и *3*.

Построение табл. 5 покажем на примере заполнения клетки, находящейся на пересечении первой строки и 9-го столбца.

Таблица 4

$S_{34}(h_4^2;\ h_3^2;\ z)$

h_4^2	n \ h_3^2	1	2
1	1	1,8 1,5	1,6 2,0
	2	—	—
	3	2,4 0,5	2,2 1,0
2	1	—	1,5 2,0
	2	1,8 1,5	—
	3	—	2,1 1,0

В верхнюю часть клетки заносится $F_1(1;\ 4{,}5) = \min\limits_{x\leqslant 4{,}5;\ h_3^1} [f_{31}(h_3^1;\ 1;\ x) + f_{32}(h_3^1;\ 1;\ 4{,}5-x)] = \min\limits_{x\leqslant 4{,}5} \{[f_{31}(1;\ 1;\ x) + f_{32}(1;\ 1;\ 4{,}5-x)];\ [f_{31}(2;\ 1;\ x) + f_{32}(2;\ 1;\ 4{,}5-x)]\} = f_{31}(1; 1; 3{,}0) + f_{32}(1; 1; 1{,}5) = 2{,}5 + 4{,}2 = 6{,}7.$

Таблица 5

h_3^2	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	9,2 1	8,5 1	8,3 2	7,7 3	7,5 2	7,5 1	7,3 4	6,7 3	—
2	—	—	8,7 2	—	7,9 2	7,9 3	7,2 3	7,6 5	6,9 5	—

В нижнюю часть заносим число 3 — номер столбца табл. 2, из которого взято значение $f_{32}(1;\ 1;\ 1{,}5) = 4{,}2$.

Этап 2. Составляется табл. 6 значений

$$F_2(h_4^2;\ z) = \min_{x\leqslant z;\ h_3^2} [S_{34}(h_3^2;\ h_4^2;\ x) + F_1(h_3^2;\ z-x)]$$

(минимальные затраты по доставке между пунктами *1*, *2*, *3* и *4*).

Первая строка табл. 6 заполняется следующим образом. Выбирается произвольный элемент табл. 4 для $h_4^2 = 1$, например 2,4. Эти расходы соответствуют капиталовложениям 0,5. К этому элементу последовательно прибавляются числа из верхних частей заполненных клеток первой строки табл. 5.

Сумма заносится в соответствующие по размеру капиталовложений клетки первой строки табл. 6. Затем выбирается элемент 1,6 с капиталовложениями 2,0 и результаты аналогичных вычислений заносятся в клетки той же строки. Если при этом в одну и ту же клетку записаны два и более элементов, то из них выбирается минимальный.

Таблица 6

h_4^2 \ z	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	—	—	11,6 / 2	10,9 / 3	10,7 / 4	10,1 / 5	9,9 / 6	9,5 / 5	9,3 / 6	9,1 / 9
2	—	—	—	—	10,8 / 3	10,5 / 3	10,0 / 5	9,7 / 5	9,3 / 7	9,0 / 7

Точно так же производятся вычисления для остальных элементов табл. 4 при $h_4^2 = 1$. Как и при заполнении предыдущей таблицы, в нижние части клетки записываются соответствующие номера столбцов табл. 5. Аналогично заполняется вторая строка табл. 6.

Этап 3. Строится табл. 7 значений

$$F_3(h_4^2;\ h_4^3;\ z) = \min_{x \leqslant z} [f_{45}(h_4^2;\ h_4^3;\ x) + F_2(h_4^2;\ z - x)].$$

Таблица 7

$h_4^2 - h_4^3$ \ z	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1—1	—	—	—	14,1 / 3	13,4 / 4	13,2 / 5	12,6 / 6	12,4 / 7	12,0 / 8	11,8 / 9
1—2	—	—	—	—	—	13,9 / 3	13,2 / 4	12,7 / 4	12,4 / 6	11,9 / 6
2—1	—	—	—	—	—	—	13,1 / 5	12,8 / 6	12,3 / 7	12,0 / 8
2—2	—	—	—	—	—	—	—	12,9 / 5	12,6 / 6	12,1 / 7

$F_3(h_4^2;\ h_4^3;\ z)$ для каждого набора $(h_4^2;\ h_4^3;\ z)$ представляет собой минимальные затраты по доставке грузов между всеми пунктами. Поэтому $F = \min\limits_{h_4^2;\ h_4^3;\ z} F_3(h_4^2;\ h_4^3;\ z) = F_3(1;\ 1;\ 5{,}0) = 11{,}8$ — затраты, соответствующие искомому оптимальному комплексу транспортных и перегрузочных средств (клетка 1—10).

Элементы оптимального комплекса определяются следующим образом. Из табл. 7 видно, что $h_4^2 = h_4^3 = 1$ (в пункте *4* используются первый вариант механизации выгрузки леса и первый вариант механизации погрузки металла). В нижней части той же клетки указан номер столбца (9) табл. 6. Это означает, что из суммы капиталовложений $z = 5$ млн. рублей на технические средства доставки грузов между пунктами *4* и *5* должно быть выделено 0,5, на остальные направления — 4,5 млн. рублей. Из табл. 3 для $h_4^2 = h_4^3 = 1$ и $z = 0{,}5$ определяется $f_{45}(1;\ 1;\ 0{,}5) = 2{,}5$ млн. рублей, тип судна третий, который в оптимальном комплексе осуществляет перевозки между пунктами *4* и *5*.

Таблица 8

Пункты	Род груза		
	Уголь	Лес	Металл
1	2	1	—
2	1	2	—
3	2	1	—
4	—	1	1
5	—	2	2

Таблица 9

Направления перевозок	Тип судна	Суммарные затраты, млн. руб	Капиталовложения, млн. руб.
3⇄1	2	3,0	2,0
3⇄2	3	4,5	1,0
3→4	1	1,8	1,5
4⇄5	3	2,5	0,5
Итого		11,8	5,0

Возвращаясь к предыдущим этапам, определяем остальные элементы комплекса. В табл. 8 приводятся варианты механизации, входящие в оптимальный комплекс, в табл. 9 — типы судов, расходы и капиталовложения по направлениям перевозок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. А. Важоньи. Научное программирование в промышленности и торговле. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. А. А. Союзов. Организация работы речного флота. М., «Речной транспорт», 1961.
4. Применение математических методов и ЭВМ для комплексного эксплуатационно-экономического обоснования выбора транспортных и перегрузочных средств (отчет по научно-исследовательской работе). Л., Ленингр. ин-т водн. трансп., 1964.

Поступила в редакцию
22 VI 1965