

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ МИНИМУМА

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ, А. М. РУБИНОВ

(Ленинград, Новосибирск)

При решении оптимальных задач большое значение имеют признаки оптимальности (необходимые условия, которым должна удовлетворять точка, доставляющая минимальное значение изучаемому функционалу).

Ниже рассматриваются некоторые экстремальные задачи в банаховых пространствах, выводятся необходимые условия минимума. В предлагаемую схему укладывается ряд практически важных задач.

1°. Пусть X — нормированное пространство, в котором задан некоторый функционал f ; Ω — произвольное подмножество пространства X . Пусть, далее, f достигает минимума на Ω (хотя бы локального) в точке $u \in \Omega$. В настоящей работе приводятся некоторые необходимые условия минимума (локального).

Определение. Элемент u назовем допустимым направлением в точке $x \in \Omega$, если существует вещественное число $\alpha_0 > 0$, зависящее от x и u , такое, что при $\alpha \in (0, \alpha_0]$ окажется

$$x + \alpha u \in \Omega.$$

Ясно, что допустимые направления образуют конус. Под конусом будем понимать множество K , обладающее тем свойством, что если $x \in K$, то для $\lambda > 0$ и $\lambda x \in K$. Обозначим этот конус через K_x . Отметим, что если $x \in \Omega$, то $0 \in K_x$.

Опишем конус K_x в одном важном частном случае. Пусть $x \in X$ и $\Omega = \{z \in X / \varphi(z) < \varphi(x)\}$, где φ — дифференцируемый по Гато в точке x функционал. Положим $\text{grad } \varphi(x) = \Phi x$. Из определения градиента следует, что

$$\varphi(x + \alpha u) - \varphi(x) = \alpha \Phi x(u) + o(\alpha).$$

Если $u \in K_x$, то при $\alpha \in (0, \alpha_0]$ имеем $\varphi(x + \alpha u) < \varphi(x)$.

Таким образом, левая часть написанного выше равенства неположительна. Знак правой части при малых α зависит от первого члена, откуда $\Phi x(u) \leq 0$.

С другой стороны, легко показать, что если $\Phi x(u) < 0$, то найдется α_0 такое, что при $0 < \alpha \leq \alpha_0$

$$\varphi(x + \alpha u) < \varphi(x),$$

т. е. $u \in K_x$. Итак, конус K_x состоит в данном случае из всех элементов открытого подпространства $\Phi x(u) < 0$. В случае, если $\Omega = \{x / \varphi(x) = c\}$, конус K_x может состоять только из нуля. Отметим еще, что если Ω выпукло, $x \in \Omega$, то K_x есть коническая оболочка множества $\Omega - x$. Действительно, пусть $z \in \Omega$, тогда при $\alpha \in [0, 1]$ имеем $x + \alpha(z - x) \in \Omega$, т. е. $z - x \in K_x$. Обратно, пусть $u \in K_x$. Тогда существует α_0 такое, что при $0 < \alpha \leq \alpha_0$ $x + \alpha u \in \Omega$. Нормируем u так, чтобы $\alpha_0 = 1$. Пусть $z =$

$= u + x$. Тогда $x + \alpha(z - x) \in \Omega$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ и, значит, $z \in \Omega$, т. е. $u \in \Omega - x$. Ясно, что в данном случае K_x — выпуклый конус.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_x^f = \{z \in X / f(z) < f(x)\},$$

K_x^f — конус допустимых направлений для множества Ω_x^f в точке x . Отметим, что $0 \notin K_x^f$.

Теорема 1. Пусть функционал f задан на X и достигает минимума на Ω в точке y . Тогда $K_y \cap K_y^f = \emptyset$. Если K_y и K_y^f — непустые выпуклые конусы и по крайней мере один из них имеет внутреннюю точку, то существует $h \in X^*$ такой, что $h \neq 0$ и

$$\min_{u \in K_y} h(u) = \sup_{u \in K_y^f} h(u) = 0. \quad (1)$$

(Здесь, как обычно, X^* — пространство, сопряженное к пространству X .)

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и существует $u \in K_y \cap K_y^f$. Тогда, очевидно, луч

$$\{\alpha u / \alpha > 0\} \subset K_y \cap K_y^f.$$

Пусть α_0 и α_0^f таковы, что $y + \alpha u \in \Omega$ при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, $y + \alpha u \in \Omega_y^f$ при $0 < \alpha \leq \alpha_0^f$. Так как в точке y достигается минимум функционала f на Ω , то при достаточно малых $\alpha \in (0, \alpha_0]$ окажется $f(y + \alpha u) \geq f(y)$.

С другой стороны, $f(y + \alpha u) < f(y)$ для $\alpha \in (0, \alpha_0^f]$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы. Вторая часть следует из теоремы отделимости Эйдельгайта [1].

Накладывая на функционал f и множество Ω различные ограничения, можно получить более содержательные условия минимума. Рассмотрим некоторые из них.

Предложение 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, Ω — выпуклое множество. Тогда равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$\min_{x \in \Omega} h(x - y) = \sup_{u \in K_y^f} h(u) = 0. \quad (1')$$

Доказательство. Учитывая, что $y \in \Omega$ и $K_y \supset \Omega - y$, имеем $0 = \min_{u \in K_y} h(u) \leq \inf_{x \in \Omega - y} h(x) = \inf_{x \in \Omega} h(x - y) \leq 0$,

что и требовалось доказать.

Замечание. В частности, если Ω — линейное множество, то из (1) следует, что $h(x) = 0$ для любого $x \in \Omega$.

Предложение 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, f — выпуклый функционал. Тогда гиперплоскость $h(x - y) = 0$ (где $h \in X^*$ определен по формуле (1)) опорна к множеству Ω_y^f в точке y .

Доказательство. Так как множество Ω_y^f выпукло, то $K_y^f \supset \Omega_y^f - y$. Отсюда

$$0 = \sup_{u \in K_y^f} h(u) \geq \sup_{x \in \Omega_y^f - y} h(x) = \sup_{x \in \Omega_y^f} h(x - y),$$

т. е. Ω_y^f находится по одну сторону от гиперплоскости $h(x - y) = 0$. В то же время $y \in \Omega_y^f$. (Здесь через Ω обозначено замыкание множества Ω .)

Замечание. Пусть $f(x) = \|x\|$. Тогда из того, что гиперплоскость $h(x - y) = 0$ опорна к Ω_y^f в точке y , следует $|h(y)| = \|y\|$ в случае, если $\|h\| = 1$. В этом случае, если Ω — выпуклое множество, существует функционал $h \in X^*$ такой, что

$$\|h\| = 1; \quad |h(y)| = \|y\|; \quad |h(y)| \leq |h(x)|, \quad (x \in \Omega).$$

Легко видеть, что приведенное условие и достаточно. Действительно, пусть y — элемент, для которого найдется функционал $h \in X^*$, обладающий перечисленными выше свойствами. Тогда $\|y\| = |h(y)| \leq |h(x)| \leq \|x\|$ для $x \in \Omega$ (см. [2–4]).

Предложение 3 (принцип Л. В. Канторовича [5]). Пусть Ω — выпуклое телесное множество, функционал f задан на Ω и достигает там минимума в точке y , которая не является внутренней точкой Ω . Тогда существует $h \in X^*$, $h \neq 0$, такой, что $\min_{x \in \Omega} h(x) = h(y)$.

Доказательство. Из условий теоремы легко следует, что K_y есть выпуклый телесный конус, не совпадающий со всем пространством X . Обозначим через $\dot{K}_y$ внутренность конуса K_y и продолжим f на все пространство, полагая

$$f(x) < f(y), (x \in \dot{K}_y); f(x) > f(y), (x \in X \setminus (\Omega \cup \dot{K}_y)).$$

Ясно, что при таком продолжении — $\dot{K}_y = K_y^f$. Функционал h , определенный по формуле (1), достигает минимума на Ω в точке y .

Замечание. Приведем пример, показывающий, что телесность Ω существенна. Пусть X — сепарабельное нормированное пространство с базисом (в X существует система элементов $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, такая, что каждый элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде ряда $x =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_k). \text{ Пусть далее } \Omega \text{ — гильбертов кирпич в } X:$$

$$\Omega = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z_k \mid |\lambda_k| \leq \frac{1}{k^2}, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Легко видеть, что Ω — замкнутое выпуклое множество, не имеющее внутренних точек. Ясно, что для любого функционала $h \in X^*$ $h \neq 0$.

Отсюда следует, что если функционал f , определенный на X , достигает минимума на Ω в нуле, то не найдется линейного функционала $h \neq 0$, достигающего минимума на Ω также в нуле.

Предложение 4. Пусть f задан на Ω , достигает там минимума в точке y и дифференцируем в этой точке по Гато, причем $\text{grad } f(y) = Fy \neq 0$ и $K_y \neq \{0\}$. Тогда

$$\min_{u \in K_y} Fy(u) = 0.$$

Доказательство. Пусть $u \in K_y$. Тогда $f(y + au) - f(y) = aFy(u) + o(a)$.

Используя то, что в точке y функционал f достигает минимума, легко показать, что $Fy(u) \geq 0$, с другой стороны, $Fy(0) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что если f задан на X и дифференцируем в точке y , то $\sup_{u \in K_y^f} Fy(u) = 0$ (поскольку K_y^f включает полупространство $Fy(u) < 0$). Таким образом, в данном случае роль функционала h , определенного по формуле (1), играет функционал Fy . При этом не делалось никаких предположений относительно конуса K_y , кроме того, что $K_y \neq \{0\}$.

Предложение 5. Пусть Ω — выпукло, f задан на Ω и достигает там минимума в точке y . Тогда, если f дифференцируем по Гато в точке y :

$$\min_{x \in \Omega} Fy(x - y) = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Его можно провести при помощи тех же рассуждений, что и доказательство предположений 1 и 4.

Замечания. 1. Если Ω линейно, то из (2) следует, что для любого $x \in \Omega$

$$Fy(x) = 0. \quad (2')$$

В частности, если Ω — линейное, плотное в X множество, то из (2') следует, что $Fy = 0$.

2. Предположим, что Ω ограничено, через $\bar{y}$ обозначим один из элементов, на которых реализуется $\min_{x \in \Omega} Fy(x)$. Из (2) следует, что в данном случае y должно удовлетворять условию (см. [6])

$$Fy(\bar{y} - y) = 0. \quad (2'')$$

Условие (2'') особенно удобно в случае, если элемент $\bar{y}$ может быть явно выражен через y .

2°. Недостатком рассмотренных выше необходимых условий минимума является то, что для некоторых множеств, важных в приложениях, конус $K_y = \{0\}$.

В связи с этим имеет смысл ввести следующее определение.

Определение. Пусть $\Omega \subset X$. Элемент u назовем допустимым направлением в широком смысле слова в точке $x \in \bar{\Omega}$, если существуют последовательность $u_s \in X$ и числовая последовательность α_s такие, что

$$1) \quad x + \alpha_s u_s \in \Omega,$$

$$2) \quad u_s \rightarrow u,$$

$$3) \quad \alpha_s > 0, \alpha_s \rightarrow 0.$$

Конус направлений, допустимых в широком смысле, обозначим через M_x . Отметим, что M_x — замкнутое множество и $M_x \supset K_x$.

Опишем конус M_x в некоторых важных частных случаях.

1) Пусть функционал φ непрерывен и дифференцируем по Фреше в точке $x \in X$, $\text{grad } \varphi(x) = \Phi x$, $\Omega = \{x \in X / \varphi(x) = 0\}$.

Тогда

$$M_x = \{u | \Phi x(u) = 0\}.$$

Действительно, пусть $u \in M_x$. Тогда найдутся последовательности $u_s \in X$ и $\alpha_s > 0$ такие, что $\varphi(x + \alpha_s u_s) = 0$, $u_s \rightarrow u$, $\alpha_s \rightarrow 0$. Из определения градиента следует, что

$$\varphi(x + \alpha_s u_s) = \varphi(x) + \alpha_s \Phi x(u_s) + o(x, u_s, \alpha_s),$$

где

$$\frac{o(x, u_s, \alpha_s)}{\alpha_s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0.$$

Из написанного выше равенства следует, что при любом s

$$\Phi x(u_s) = \frac{o(x, u_s, \alpha_s)}{\alpha_s}.$$

Переходя к пределу, имеем $\Phi x(u) = 0$.

Пусть теперь $\Phi x(u) = 0$, покажем, что и $u \in M_x$. Если $u \notin M_x$, то найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что на множестве $x + V$, где $V = \{\alpha v | \|v - u\| \leq \varepsilon, 0 < \alpha \leq \delta\}$, функционал φ не обращается в нуль. Из непрерывности φ легко следует, что φ сохраняет знак на $x + V$. (Предположим, что $\varphi(x + \alpha_1 v_1) < 0$; $\varphi(x + \alpha_2 v_2) > 0$. Тогда по теореме Коши функция

$$\varphi(t) = \varphi((x + \alpha_1 v_1) + t(\alpha_2 v_2 - \alpha_1 v_1))$$

обращается в нуль в некоторой точке $t_0 \in [0, 1]$, т. е.

$$\varphi(x + (\alpha_1 v_1 + t_0(\alpha_2 v_2 - \alpha_1 v_1))) = 0.$$

Но в то же время $[a_1v_1 + t_0(a_2v_2 - a_1v_1)] \in V$, так как V выпукло.) Для определенности предположим, что $\Phi(x + av) > 0$, ($v \in V$). Тогда $\Phi x(v) \geq 0$ для всех v из шара $\|v - u\| \leq \varepsilon$, но это противоречит тому, что $\Phi x(u) = 0$, ибо, если линейный функционал в центре шара равен нулю, то в этом шаре он должен принимать и отрицательные, и положительные значения.

2) Пусть Φ — дифференцируемый по Фреше в точке x функционал и $\Omega = \{x \in X \mid \Phi(x) \leq 0\}$. Тогда, как легко показать, $M_x = \{u \mid \Phi x(u) \leq 0\}$. (В этом случае $M_x = \bar{K}_x$.)

3) Пусть Ω — выпуклое множество. Тогда M_x есть замкнутая коническая оболочка множества $\Omega - x$. Действительно, пусть $u \in M_x$, тогда $x + au_s \in \Omega$ ($a_s > 0$, $a_s \rightarrow 0$, $u_s \rightarrow u$, $s = 1, 2, \dots$), т. е. $a_s u_s \in \Omega - x$, u_s есть элемент конической оболочки $\Omega - x$, откуда и следует наше утверждение (отметим, что и в этом случае $M_x = \bar{K}_x$).

В дальнейшем будем предполагать, что f — заданный на X функционал и конус K_x^f имеет внутренние точки. Внутренность этого конуса обозначим через $\overset{\circ}{K}_x^f$. Пусть $u' \in K_x^f$, $\|u'\| = 1$. Тогда существует α_0' , зависящее от u' , такое, что $S_\varepsilon(u') \subset K_x^f$, и для всех $u \in S_\varepsilon(u')$ существует одно и то же α_0 , обладающее тем свойством, что при $0 < \alpha \leq \alpha_0$ $x + au \in \overset{\circ}{K}_x^f$.

Пусть f дифференцируем по Фреше в точке x . Тогда конус $\overset{\circ}{K}_x^f$ равномерно открыт. Действительно, $\overset{\circ}{K}_x^f$ состоит из элементов u таких, что $Fx(u) < 0$ (здесь $Fx = \text{grad } f(x)$). Тогда

$$f(x + au) = f(x) + \alpha Fx(u) + o(x, u, \alpha),$$

где $\frac{o(x, u, \alpha)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ равномерно по u . Пусть $u' \in \overset{\circ}{K}_x^f$, $\|u'\| = 1$. Легко видеть,

что в силу равномерного стремления $o(x, u, \alpha) / \alpha$ к нулю существует окрестность $S_\varepsilon(u')$ точки u' такая, что для всех элементов u из этой окрестности найдется α_0 , обладающее тем свойством, что при $0 < \alpha \leq \alpha_0$

$$Fx(u) - \frac{o(x, u, \alpha)}{\alpha} < 0.$$

Очевидно, что для $u \in S_\varepsilon(u')$ и $0 < \alpha \leq \alpha_0$ $f(x + au) < f(x)$, т. е. $x + au \in \overset{\circ}{K}_x^f$ и $u \in \overset{\circ}{K}_x^f$.

Теорема 2. Пусть функционал f , заданный на X , достигает минимума на множестве Ω в точке y и конус K_y^f равномерно открыт. Тогда $M_y \cap \overset{\circ}{K}_y^f = \emptyset$. Если M_y и $\overset{\circ}{K}_y^f$ не пусты и выпуклы, то существует $h \in X^*$ такой, что $h \neq 0$ и

$$\min_{x \in M_y} h(x) = \sup_{x \in \overset{\circ}{K}_y^f} h(x) = 0. \quad (3)$$

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и существует нормированный элемент $u' \in M_y \cap \overset{\circ}{K}_y^f$. Так как $u' \in \overset{\circ}{K}_y^f$, то найдется окрестность $S_\varepsilon(u')$, обладающая тем свойством, что для всех $u \in S_\varepsilon(u')$ существует α_0 такое, что $f(y + au) < f(y)$ при $0 < \alpha \leq \alpha_0$.

Так как $u' \in M_y$, то $u' = \lim u_s$, где $y + a_s u_s \in \Omega$, $a_s > 0$, $a_s \rightarrow 0$. Пользуясь этим, найдем номер s такой, что $u_s \in S_\varepsilon(u')$, $0 < a_s \leq \alpha_0$. При этом можно считать a_s настолько малым, что $f(y + a_s u_s) \geq f(y)$.

Полученное противоречие и доказывает первую часть теоремы. Вторая часть теоремы следует из теоремы отделимости Эйдельгайта ([1], стр. 42).

Замечание. Приведем пример, показывающий, что равномерная открытость $\dot{K}_y^f$ существенна. Пусть $u_0 \in X$, $\|u_0\| = 1$ и h — линейный непрерывный функционал такой, что $\|h\| = 1$, $h(u_0) = 1$. Определим в пространстве X функционал f следующим образом.

1. Если u удовлетворяет условию $h(u) \leq 0$, то положим $f(u) = 0$.

2. Рассмотрим открытое полупространство $h(u) > 0$. Пусть u таково, что $h(u) = 1$ и $\|u - u_0\| = \varepsilon$. Определим функционал f на луче $\{au \mid a \geq 0\}$, положив

$$f(au) = \begin{cases} a(a - \varepsilon), & a \in [0, \varepsilon], \\ (a - \varepsilon)(4\varepsilon - a), & a \in [\varepsilon, 4\varepsilon], \\ 4\varepsilon - a, & a \in [4\varepsilon, \infty). \end{cases}$$

Отметим, что построенный таким образом функционал f непрерывен и конус $\dot{K}_0^f$, построенный в точке 0 по множеству $\Omega_0^f = \{x/f(x) < f(0) = 0\}$, совпадает с открытым полупространством $h(u) > 0$. Таким образом, K_0^f открыт ($K_0^f = \dot{K}_0^f$), однако, как легко видеть, $\dot{K}_0^f$ неравномерно открыт.

Пусть u таково, что $h(u) = 1$ и $\|u - u_0\| = \varepsilon$. Положим

$$\Omega_u = \{\alpha u \mid \alpha \in [2\varepsilon, 3\varepsilon]\}, \quad \Omega = 0 \cup \bigcup_{u \in h^{-1}(1)} \Omega_u$$

(на рис. 1 указано множество Ω в случае, если пространство $X = R^2$). Легко видеть, что Ω — замкнутое телесное множество, причем функционал f достигает минимума на Ω в нуле. Покажем, что $u_0 \in M_0$, где M_0 — конус направлений, допустимых в широком смысле, построенный в точке 0 по множеству Ω . Пусть последовательность $u_1, u_2, \dots, u_s, \dots$ такова, что $h(u_s) = 1$ и $u_s \rightarrow u_0$. Из определения Ω следует, что найдется последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots$ такая, что $\alpha_s > 0$, $\alpha_s \rightarrow 0$, $\alpha_s u_s \in \Omega$ ($s = 1, 2, \dots$). Например, можно положить $\alpha_s = 5/2 \|u_0 - u_s\|$. Отсюда и следует, что $u_0 \in M_0$. С другой стороны, $u_0 \in \dot{K}_0^f$, следовательно, $M_0 \cap K_0^f \neq \emptyset$.

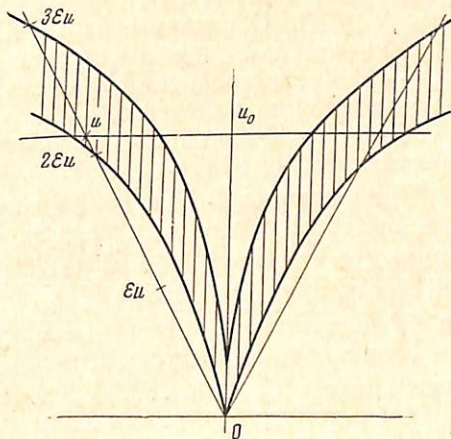


Рис. 1

Предложение 6. Пусть выполнены все предположения теоремы 2 и, кроме того, f — выпуклый функционал. Тогда гиперплоскость $h(x - y) = 0$ (где h определен по формуле (3)) опорна к множеству Ω_y^f в точке y . Если $f(x) = \|x\|$, то в случае, если $\|h\| = 1$, имеем $|h(y)| = \|y\|$.

Доказательство проводится с помощью тех же рассуждений, что и доказательство предложения 2.

Предложение 7. Пусть f задан на Ω , достигает минимума в точке y и дифференцируем по Фреше в этой точке. Пусть далее $F_y \neq 0$, $M_y \neq \{0\}$, тогда

$$\min_{u \in M_y} F_y(u) = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Предположим, что существует такое $u_0 \in M_y$, $\|u_0\| = 1$, что $Fy(u) = -\rho < 0$. Найдем $\varepsilon > 0$ так, что для u , удовлетворяющих условию $\|u - u_0\| < \varepsilon$, выполняется соотношение $Fy(u) < -\rho/2$.

Для этих u имеем при $\alpha > 0$

$$f(y + \alpha u) = f(y) + \alpha Fy(u) + o(y, u, \alpha) < f(y) + \alpha \left(-\frac{1}{2} \rho \right) - o(y, u, \alpha).$$

Так как $u_0 = \lim u_s$, где $y + \alpha_s u_s \in \Omega$, $\alpha_s > 0$, $\alpha_s \rightarrow 0$, то при достаточных больших s , учитывая, что $\frac{o(y, u, \alpha)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ равномерно по u , имеем

$$f(y + \alpha_s u_s) < f(y) + \alpha_s \left(-\frac{1}{2} \rho \right) + o(y, u_s, \alpha_s) < f(y).$$

С другой стороны, так как $y + \alpha_s u_s \in \Omega$, имеем $f(y + \alpha_s u_s) \geq f(y)$. Полученное противоречие и доказывает предложение.

Замечание. Предположим, что f задан на X . Тогда в предположениях предложения 7 конус $\dot{K}_y^f$ равномерно открыт. Ясно, что линейный функционал Fy играет роль функционала h , определенного по формуле (3). Однако при доказательстве теоремы не использовалась выпуклость конуса M_y .

Рассмотрим связь между приведенными в настоящей заметке необходимыми условиями минимума и принципом Дубовицкого и Милютина [7].

Пусть $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \dots \cap \Omega_n$.

Пусть далее f задан на X и $y \in \Omega$ — точка, в которой достигается минимум f на Ω . Обозначим через $K_y^1, K_y^2, \dots, K_y^{n-1}$ конусы допустимых направлений, построенные в точке y по множествам $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{n-1}$ через M_y^n — конус направлений, допустимых в широком смысле слова, построенный в точке y по множеству Ω_n .

Принцип Дубовицкого и Милютина может быть сформулирован в виде предложений 8 и 9.

Предложение 8. Пусть все конусы $\dot{K}_y^1, \dots, \dot{K}_y^{n-1}, \dot{K}_y^f$ непусты, равномерно открыты. Тогда из того, что в точке y функционал f достигает минимума, следует, что $K_y^1 \cap K_y^2 \cap \dots \cap K_y^{(n-1)} \cap M_y^n \cap K_y^f = \emptyset$.

Замечание. Если конус M_y^n телесен, то равномерная открытость конуса K_y^f не нужна.

Предложение 9. Пусть выполнены все условия предложения 8 и, кроме того, конусы $K_y^1, K_y^2, \dots, K_y^{n-1}, \dot{K}_y^f$ выпуклы.

Тогда найдутся функционалы g_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и g такие, что

1) $g_i \in (K_y^i)^*$, $i = 1, 2, \dots, n-1$; $g_n \in (M_y^n)^*$; $g \in (K_y^f)^*$;

2) $g, g_1, g_2, \dots, g_n$ одновременно не равны нулю;

3) $g_1 + g_2 + \dots + g_n + g = 0$.

Предложения 8 и 9 могут рассматриваться как обобщения теоремы 2 в том случае, когда $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \dots \cap \Omega_n$.

Отметим, что доказательство предложения 8 может быть проведено при помощи тех же рассуждений, что и доказательство первой части теоремы 2.

Наличие нескольких различных по форме необходимых условий минимума представляется нам полезным, так как из этих условий всегда можно выбрать такое, которое в применении к данной задаче оказывается наиболее просто проверяемым.

3°. Остановимся на применении полученных выше результатов к некоторым конкретным задачам.

а) Рассмотрим линеаризованный принцип максимума. Пусть движение управляемого объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = f(X(t), u(t), t), X(0) = X_0, \quad (5)$$

$$X(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)); \quad u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t)).$$

Здесь $f(X, u, t)$ — n -мерная вектор-функция, непрерывная по параметру t на $[0, T]$ и непрерывно-дифференцируемая по x^i и u^j ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, r$) в области допустимых значений x^i, u^j , определяемой системой уравнений (5) и классом управлений U . Управляющая r -мерная вектор-функция $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ подлежит выбору из выпуклого слабо замкнутого класса $U, U \in L_{r^p}([0, T]), 1 < p < \infty, L_{r^p}$ — пространство r -мерных вектор-функций, суммируемых на $[0, T]$ со степенью p .

Пусть задан функционал

$$I(u) = \int_0^T g(X(t, u), u(t), t) dt, \quad (6)$$

где $g(X, u, t)$ — непрерывная по t и непрерывно-дифференцируемая по x^i, u^j в области допустимых значений x^i, u^j ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, r$) функция. Требуется выбрать управление (управляющую вектор-функцию) $u \in U$ так, чтобы

$$I(u) = \min_{v \in U} I(v).$$

В данном случае необходимое условие минимума легко получить, используя соотношение (2'').* Для того чтобы управление $u \in U$ доставляло функционалу $I(u)$ минимальное возможное значение на U , необходимо, чтобы

$$\min_{v \in U} \int_0^T \sum_{i=1}^r \left[\left(\frac{\partial f_u(\tau)}{\partial u^i} \right)^* \psi_u(\tau) + \frac{\partial g_u(\tau)}{\partial u^i} \right] (v^i(\tau) - u^i(\tau)) d\tau = 0,$$

где $f_u(\tau) = f(X(\tau, u), u(\tau), \tau), g_u(\tau) = g(X(\tau, u), u(\tau), \tau),$

$$\frac{d\psi_u(\tau)}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f_u(\tau)}{\partial X} \right)^* \psi_u(\tau) - \frac{\partial g_u(\tau)}{\partial X}, \quad \psi_u(T) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial u^i} \right), \quad \frac{\partial g}{\partial X} = \left(\frac{\partial g}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right).$$

На основе полученного необходимого условия могут быть разработаны методы последовательных приближений (см. [8]).

б) Частным случаем одной из теорем Л. А. Люстерника является следующий результат (см. [9], теорема 12.1).

* Как показано в [7], другое необходимое условие — «принцип максимума» Л. С. Понтрягина — может быть выведено из принципа Дубовицкого и Милютина (предложение 9).

Теорема 3 (теорема Люстерника). Пусть в банаховом пространстве X заданы функционалы $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые в точке $y \in X$ дифференцируемы по Фреше, причем, $\text{grad } \varphi(y) \neq 0$. Тогда, если функционал f достигает минимума (локального) на множестве $\varphi(x) = \varphi(y)$ в точке y , то найдется μ такое, что $\text{grad } f(y) = \mu \text{grad } \varphi(y)$.

Доказательство. Положим $\text{grad } f(y) = Fy$, $\text{grad } \varphi(y) = \Phi y$.

Пусть $\Omega = \{x \in X | \varphi(x) = \varphi(y)\}$.

Тогда $M_y = \{u | \Phi y(u) = 0\}$. Из предложения 7 следует, что $\min_{u \in M_y} Fy(u) = 0$, иными словами, $Fy(u) = 0$, ($u \in M_y$). Таким образом,

$M_y = (Fy)^{-1}(0) = (\Phi y)^{-1}(0)$, откуда и следует, что $Fy = \mu \Phi y$.

Отметим, что теорема Люстерника легко выводится также из принципа Дубовицкого и Милютина (предложение 9).

в) Пусть φ — некоторый функционал, заданный на X . Найдем условия, которым должен удовлетворять элемент с наименьшей нормой на множестве $\Omega = \{x \in X | \varphi(x) = C\}$. При этом будем предполагать, что элемент $y \in \Omega$ с наименьшей нормой на Ω существует и φ дифференцируем по Фреше в точке y . Из теоремы 2 следует, что существует $h \in X^*$ такой, что

$$\min_{u \in M_y} h(u) = \sup_{u \in K_{y,f}} h(y) = 0.$$

Так как $M_y = \{u | \Phi y(u) = 0\}$, то, как легко видеть, $h^{-1}(0) = (\Phi y)^{-1}(0)$ и, следовательно, найдется μ такое, что $h = \mu \Phi y$. Будем считать, что $\|h\| = \|\mu \Phi y\|$. Тогда из предложения 6 следует, что $|h(y)| = |\mu \Phi y(y)| = \|y\|$, а это означает, что $|\Phi y(y)| = \|\Phi y\| \cdot \|y\|$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Для того чтобы y был элементом с наименьшей нормой на многообразии $\varphi(y) = C$, необходимо, чтобы

$$|\Phi y(y)| = \|\Phi y\| \cdot \|y\|.$$

Замечание. Легко показать и достаточность условия теоремы.

г) **Теорема 5** (о минимаксе). Пусть Ω — выпуклое подмножество X , имеющее элемент с наименьшей нормой. Пусть Γ — единичная сфера X^* . Тогда

$$\min_{x \in \Omega} \max_{h \in \Gamma} |h(x)| = \max_{h \in \Gamma} \min_{x \in \Omega} |h(x)|.$$

Доказательство. Из предложений 1 и 2 и замечания к предложению 2 следует, что существует функционал $h_0 \in X^*$ такой, что $\|h_0\| = 1$, $|h_0(y)| = \|y\|$ и $\min_{x \in \Omega} h_0(x - y) = 0$.

Используя свойства h_0 , имеем

$$\begin{aligned} \min_{x \in \Omega} \max_{h \in \Gamma} |h(x)| &= \min_{x \in \Omega} \|x\| = \|y\| = |h_0(y)| = \\ &= \min_{x \in \Omega} |h_0(x)| \leq \max_{h \in \Gamma} \min_{x \in \Omega} |h(x)|. \end{aligned}$$

Обратное неравенство, как известно, справедливо всегда.

д) Пусть X — банахово пространство, $x_1, \dots, x_n \in X$. Пусть далее $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — выпуклая дифференцируемая функция n переменных. Требуется среди всех «многочленов» вида $P = \sum_{k=1}^n a_k x_k$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ таковы, что $\varphi(a_1, \dots, a_n) \leq 1$, найти многочлен $P_0 = \sum_{k=1}^n a_k^0 x_k$, наилучшим образом приближающий данный элемент y .

Положим

$$\Omega = \left\{ z = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k - y \mid \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq 1 \right\}.$$

Очевидно, что наша задача сводится к нахождению элемента $z_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^0 x_k - y$ с наименьшей нормой на Ω . Из предложений 1, 2 и замечания к предложению 2 следует, что найдется функционал $h \in X^*$ такой, что $\|h\| = 1$, $|h(z_0)| = \|z_0\|$, $|h(z_0)| = \min_{z \in \Omega} |h(z)|$.

Из последнего равенства следует, что

$$\left| \sum_{k=1}^n \alpha_k^0 h(x_k) \right| = \min_{\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k h(x_k) \right|.$$

Предположим, что n -мерный вектор

$$h_n = (h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)) \neq 0.$$

Тогда, как легко следует из теоремы Люстерника ([9], теорема 12.1), найдется такое μ , что

$$\text{grad } \varphi(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) = \mu(h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)),$$

т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) = \mu h(x_1),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) = \mu h(x_2),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) = \mu h(x_n).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Если полином $P_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^0 x_k$ осуществляет наилучшее приближение к данному элементу y среди полиномов P , коэффициенты которых удовлетворяют условию $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq 1$, то найдется функционал $h \in X^*$ такой, что

$$1) \|h\| = 1,$$

$$2) \|y - P_0\| = |h(y - P_0)| = \min |h(y - P)|,$$

3) либо $h(x_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), либо коэффициенты α_k^0 удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{h(x_1)} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{h(x_2)} = \dots = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{h(x_n)}.$$

(Здесь предполагается, что если $h(x_k) = 0$ для некоторого k , то соответствующее уравнение заменяется уравнением $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.) Отметим, что из выпуклости функционала φ легко вытекает достаточность приведенных выше условий. Отметим также, что для отыскания P_0 может быть применен метод, описанный в [10].

е) Пусть $X = L^p([0, 1])$, $1 < p < \infty$, $\Omega = \{x \in L^p | x \geq 0, \|x\| \leq 1\}$, f — дифференцируемый функционал, заданный на Ω и достигающий минимума в точке y . Требуется указать условия, которым должен удовлетворять элемент y .

В данном случае принцип Л. В. Канторовича не может быть применен, поскольку Ω не имеет внутренних точек; принцип Дубовицкого и Миллота также неприменим, ибо конус M_x , построенный по ограничению $x \geq 0$, не является подпространством.

Так как Ω выпукло, то для нахождения необходимых условий в данном случае можно применить предложение 5, из которого следует, что y должен удовлетворять условию

$$Fy(\bar{y} - y) = 0,$$

где $\bar{y}$ — какой-либо из элементов, на котором реализуется $\min_{x \in \Omega} Fy(x)$.

(Ясно, что Fy есть элемент пространства $L^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.)

Положим $(Fy)^+ = \max\{Fy; 0\}$; $(Fy)^- = \min\{Fy; 0\}$. Непосредственным вычислением легко проверить, что функционал $(Fy)^+$ достигает минимума на Ω , в частности, в точке нуль, а функционал $(Fy)^-$ достигает

минимума на Ω , в частности, в точке $\left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1}$. При этом

$$\min_{x \in \Omega} (Fy)^-(x) = (Fy)^- \left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1} = -\|(Fy)^-\|.$$

Пусть $x \in \Omega$. Учитывая, что $x \geq 0$, $\|x\| \leq 1$, $(Fy)^+ \geq 0$, $(Fy)^- \leq 0$, имеем

$$\begin{aligned} Fy(x) &= (Fy)^+(x) + (Fy)^-(x) \geq -|(Fy)^-(x)| \geq -\|(Fy)^-\| \cdot \|x\| \geq \\ &\geq -\|(Fy)^-\| = (Fy)^+(0) - (Fy)^- \left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1} = Fy(\bar{y}), \end{aligned}$$

где $\bar{y}$ определяется следующим соотношением:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \text{ таково, что } Fy(t) \geq 0, \\ \left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1}, & \text{если } t \text{ таково, что } Fy(t) < 0. \end{cases}$$

Как показано выше, на элементе $\bar{y}$ достигается $\min_{x \in \Omega} Fy(x)$.

Вычислим $Fy(\bar{y} - y)$, учитывая, что

$$(Fy)^+(\bar{y}) = 0, \quad (Fy)^-(\bar{y}) = -\|(Fy)^-\|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} Fy(\bar{y} - y) &= (Fy)^+(\bar{y} - y) + (Fy)^-(\bar{y} - y) = -(Fy)^+(y) - \\ &- \|(Fy)^-\| - (Fy)^-(y) = -(Fy)(y) - \|(Fy)^-\|. \end{aligned}$$

В силу (2'') элемент y , на котором достигается минимум функционала f на Ω , удовлетворяет условию

$$Fy(y) + \|(Fy)^-\| = 0.$$

Отметим, что для непосредственного отыскания y может быть применен метод, описанный в [6].

ж) Пусть $X = L^2([0, 1])$, $\Omega = \{x \in L^2, x \geq 0, \|x\| = 1\}$, f — дифференцируемый функционал, заданный на Ω и достигающий там минимума

в точке y ; Ω — невыпуклое множество, не имеющее внутренних точек; конус $K_y = \{0\}$. Необходимое условие минимума в данном случае можно установить с помощью предложения 7.

Опишем конус M_y . Пусть $u = \lim u_s$, где $y + \alpha_s u_s \in \Omega$, $\alpha_s > 0$, $\alpha_s \rightarrow 0$. Пусть, далее, $E_1 = \{t \in [0, 1] \mid y(t) > 0\}$, $E_2 = \{t \in [0, 1] \mid y(t) = 0\}$.

Так как $y + \alpha_s u_s \in \Omega$, то:

- 1) $y + \alpha_s u_s \geq 0$, откуда $u_s(t) \geq 0 (t \in E_2)$ и, значит, $u(t) \geq 0 (t \in E_2)$;
- 2) $\|y + \alpha_s u_s\| = 1$, откуда $(y + \alpha_s u_s, y + \alpha_s u_s) = 1$. Из этого условия

следует, что $(y, u_s) = -\frac{1}{2} \alpha_s \|u_s\|^2$.

Учитывая, что $\alpha_s \rightarrow 0$, и переходя к пределу, имеем $(y, u) = 0$.

Таким образом, конус M_y состоит из элементов u таких, что $(y, u) = \int_0^1 y(t)u(t)dt = 0$; $u(t) \geq 0$; $t \in E_2$. (Отметим, что если $\mu E_2 > 0$, то принцип Дубовицкого и Милютина в данном случае неприменим, так как конус M_y не является подпространством.)

Из предложения 7 следует, что должно выполняться соотношение

$$\min_{u \in M_y} Fy(u) = 0. \quad (7)$$

Положим

$$(Fy)' = \begin{cases} Fy, & t \in E_1, \\ 0 & t \in E_2, \end{cases} \quad (Fy)'' = \begin{cases} 0, & t \in E_1, \\ Fy, & t \in E_2. \end{cases}$$

Ясно, что $Fy = (Fy)' + (Fy)''$.

Так как $u(t) \geq 0 (t \in E_2)$, то из (7) следует, что $(Fy)'' = 0$.

Анализируя условие (7), легко показать, что либо $(Fy)'(t) = 0$, либо $(Fy)'(t) = -\mu y(t)$, $\mu > 0 (t \in E_1)$.

Таким образом, элемент y , на котором достигается минимум, должен удовлетворять одному из двух соотношений

$$Fy = 0, \quad Fy = -\mu y.$$

Благодарим В. Ф. Гапошкина, указавшего на ряд неточностей и погрешностей в рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Дей. Линейные нормированные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. М. Г. Крейн. L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве. В кн. Н. И. Ахизер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории множеств. Харьков, 1938.
3. С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10.
4. А. Л. Гаркави. Теорема двойственности для приближения посредством элементов выпуклых множеств. Успехи матем. н., 1961, т. 16, вып. 4.
5. Л. В. Канторович. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. Докл. АН СССР, 1940, т. 28.
6. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. Вестн. ЛГУ, 1964, № 19.
7. А. И. Дубовицкий, А. А. Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР, 1963, т. 154.
8. В. Ф. Демьянов. Минимизация функционала в линейной системе при ограничении на фазовые координаты. Автоматика и телемеханика, 1964, т. XXV, № 11.
9. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956.
10. А. М. Рубинов. Минимизация нормы на компакте. Вестн. ЛГУ, 1965, № 1.

Поступила в редакцию
25 I 1965

е) Пусть $X = L^p([0, 1])$, $1 < p < \infty$, $\Omega = \{x \in L^p | x \geq 0, \|x\| \leq 1\}$, f — дифференцируемый функционал, заданный на Ω и достигающий минимума в точке y . Требуется указать условия, которым должен удовлетворять элемент y .

В данном случае принцип Л. В. Канторовича не может быть применен, поскольку Ω не имеет внутренних точек; принцип Дубовицкого и Милютина также неприменим, ибо конус M_x , построенный по ограничению $x \geq 0$, не является подпространством.

Так как Ω выпукло, то для нахождения необходимых условий в данном случае можно применить предложение 5, из которого следует, что y должен удовлетворять условию

$$Fy(\bar{y} - y) = 0,$$

где $\bar{y}$ — какой-либо из элементов, на котором реализуется $\min_{x \in \Omega} Fy(x)$.

(Ясно, что Fy есть элемент пространства $L^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.)

Положим $(Fy)^+ = \max\{Fy; 0\}$; $(Fy)^- = \min\{Fy; 0\}$. Непосредственным вычислением легко проверить, что функционал $(Fy)^+$ достигает минимума на Ω , в частности, в точке нуля, а функционал $(Fy)^-$ достигает минимума на Ω , в частности, в точке $\left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1}$. При этом

$$\min_{x \in \Omega} (Fy)^-(x) = (Fy)^- \left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1} = -\|(Fy)^-\|.$$

Пусть $x \in \Omega$. Учитывая, что $x \geq 0$, $\|x\| \leq 1$, $(Fy)^+ \geq 0$, $(Fy)^- \leq 0$, имеем

$$\begin{aligned} Fy(x) &= (Fy)^+(x) + (Fy)^-(x) \geq -|(Fy)^-(x)| \geq -\|(Fy)^-\| \cdot \|x\| \geq \\ &\geq -\|(Fy)^-\| = (Fy)^+(0) - (Fy)^- \left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1} = Fy(\bar{y}), \end{aligned}$$

где $\bar{y}$ определяется следующим соотношением:

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \text{ таково, что } Fy(t) \geq 0, \\ \left(\frac{|(Fy)^-|}{\|(Fy)^-\|}\right)^{q-1}, & \text{если } t \text{ таково, что } Fy(t) < 0. \end{cases}$$

Как показано выше, на элементе $\bar{y}$ достигается $\min_{x \in \Omega} Fy(x)$.

Вычислим $Fy(\bar{y} - y)$, учитывая, что

$$(Fy)^+(\bar{y}) = 0, \quad (Fy)^-(\bar{y}) = -\|(Fy)^-\|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} Fy(\bar{y} - y) &= (Fy)^+(\bar{y} - y) + (Fy)^-(\bar{y} - y) = -(Fy)^+(y) - \\ &- \|(Fy)^-\| - (Fy)^-(y) = -(Fy)(y) - \|(Fy)^-\|. \end{aligned}$$

В силу (2'') элемент y , на котором достигается минимум функционала f на Ω , удовлетворяет условию

$$Fy(y) + \|(Fy)^-\| = 0.$$

Отметим, что для непосредственного отыскания y может быть применен метод, описанный в [6].

ж) Пусть $X = L^2([0, 1])$, $\Omega = \{x \in L^2, x \geq 0, \|x\| = 1\}$, f — дифференцируемый функционал, заданный на Ω и достигающий там минимума

в точке y ; Ω — невыпуклое множество, не имеющее внутренних точек; конус $K_y = \{0\}$. Необходимое условие минимума в данном случае можно установить с помощью предложения 7.

Опишем конус M_y . Пусть $u = \lim u_s$, где $y + \alpha_s u_s \in \Omega$, $\alpha_s > 0$, $\alpha_s \rightarrow 0$. Пусть, далее, $E_1 = \{t \in [0, 1] | y(t) > 0\}$, $E_2 = \{t \in [0, 1] | y(t) = 0\}$.

Так как $y + \alpha_s u_s \in \Omega$, то:

1) $y + \alpha_s u_s \geq 0$, откуда $u_s(t) \geq 0$ ($t \in E_2$) и, значит, $u(t) \geq 0$ ($t \in E_2$);

2) $\|y + \alpha_s u_s\| = 1$, откуда $(y + \alpha_s u_s, y + \alpha_s u_s) = 1$. Из этого условия

следует, что $(y, u_s) = -\frac{1}{2} \alpha_s \|u_s\|^2$.

Учитывая, что $\alpha_s \rightarrow 0$, и переходя к пределу, имеем $(y, u) = 0$.

Таким образом, конус M_y состоит из элементов u таких, что $(y, u) = \int_0^1 y(t)u(t)dt = 0$; $u(t) \geq 0$; $t \in E_2$. (Отметим, что если $\mu E_2 > 0$, то

принцип Дубовицкого и Милютина в данном случае неприменим, так как конус M_y не является подпространством.)

Из предложения 7 следует, что должно выполняться соотношение

$$\min_{u \in M_y} Fy(u) = 0. \quad (7)$$

Положим

$$(Fy)' = \begin{cases} Fy, & t \in E_1, \\ 0 & t \in E_2, \end{cases} \quad (Fy)'' = \begin{cases} 0, & t \in E_1, \\ Fy, & t \in E_2. \end{cases}$$

Ясно, что $Fy = (Fy)' + (Fy)''$.

Так как $u(t) \geq 0$ ($t \in E_2$), то из (7) следует, что $(Fy)'' = 0$.

Анализируя условие (7), легко показать, что либо $(Fy)'(t) = 0$, либо $(Fy)'(t) = -\mu y(t)$, $\mu > 0$ ($t \in E_1$).

Таким образом, элемент y , на котором достигается минимум, должен удовлетворять одному из двух соотношений

$$Fy = 0, \quad Fy = -\mu y.$$

Благодарим В. Ф. Гапошкина, указавшего на ряд неточностей и погрешностей в рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Дей. Линейные нормированные пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. М. Г. Крейн. L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве. В кн. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории множеств. Харьков, 1938.
3. С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, т. 10.
4. А. Л. Гаркави. Теорема двойственности для приближения посредством элементов выпуклых множеств. Успехи матем. н., 1961, т. 16, вып. 4.
5. Л. В. Канторович. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. Докл. АН СССР, 1940, т. 28.
6. В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве. Вестн. ЛГУ, 1964, № 19.
7. А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР, 1963, т. 154.
8. В. Ф. Демьянов. Минимизация функционала в линейной системе при ограничениях на фазовые координаты. Автоматика и телемеханика, 1964, т. XXV, № 11.
9. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., Гостехиздат, 1956.
10. А. М. Рубинов. Минимизация нормы на компакте. Вестн. ЛГУ, 1965, № 1.

Поступила в редакцию
25 I 1965