ЭКОНОМИКА 1965
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том I, вып. 3

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ РАЗМЕЩЕНИЯ

А. А. КОРБУТ, В. В. МАЛИННИКОВ

(Ленинград)

Проблема размещения производительных сил является комплексной математико-экономической проблемой. При ее рассмотрении необходимо учитывать большое число не только экономических, но и внеэкономических (географических, социальных, политических и пр.) факторов. Сложность и четко проявляющийся количественный характер основных закономерностей этой проблемы требуют привлечения для ее решения современных математических методов, т. е. в первую очередь создания адекватных математических моделей. Все эти модели в той или иной форме являются моделями оптимизации (наиболее типично — минимизации суммарных затрат). При этом для многих моделей размещения в настоящее время точные решения либо не найдены, либо не могут быть реально получены из-за ограниченных возможностей имеющихся вычислительных машин. Тем не менее задачи размещения представляют весьма благодарный объект для применения математических методов, так как ввиду огромного объема капиталовложений, стоящего за любой практической задачей размещения, выдача даже приближенного решения, хотя бы незначительно улучшающего первоначальные плановые наметки, на деле приводит к большому народнохозяйственному выигрышу (см. [1]). Поэтому для отдельных типов задач размещения представляется желательной разработка специализированных приближенных методов. Ценность таких приближенных методов заключается еще и в том, что точные решения — даже для тех задач, для которых методы их нахождения известны,— вполне могут оказаться иллюзорными из-за неизбежной неточности исходных данных, и большие усилия, затрачиваемые на доводку приближенного решения до оптимума, часто не оправдываются.

Ввиду первостепенной роли, которую играет пространственный фактор в задачах размещения, подавляющее большинство моделей размещения представляют собой модификации классической транспортной задачи, хотя, разумеется, выбор оптимального варианта размещения вовсе не сводится к установлению одних лишь рациональных схем грузопотоков. В настоящей статье мы также ограничимся в основном одноотраслевыми моделями размещения, представляющими собой обобщения транспортной задачи на случай неоднородной разрывной целевой функции.

Статья является расширенным вариантом заметки одного из авторов [2].

Постановка задачи. Будем рассматривать следующую модель размещения. Даны пункты потенциального производства A_i $(i=1,\ldots,m)$ с возможными объемами производства $a_i>0$ и пункты потребления B_j $(j=1,\ldots,n)$ с объемом потребления $b_j>0$ (речь идет о производстве и потреблении некоторого однородного продукта). Предполагается, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Заданы неотрицательные матрицы $C = \| c_{ij} \|$ и $D = \| d_{ij} \|$.

Искомый план перевозок и размещения обозначим через $X = \| x_{ij} \|$; здесь под x_{ij} понимается, как обычно, грузопоток из A_i в B_i. Предполагается следующая структура затрат на установление связи между A_i и B_j:

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0 & x_{ij} = 0 \\ c_{ij}x_{ij} + d_{ij} & x_{ij} > 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Ищется план X, не выводящий за возможности пунктов производства, полностью обеспечивающий потребности всех потребителей и дающий минимум затрат (2) по всем парам A_i, B_j. Иначе говоря, требуется минимизировать величину

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij}) \tag{3}$$

при обычных условиях транспортной задачи

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i. \tag{6}$$

Структура затрат (2) является вполне оправданной экономически, особенно в тех случаях, когда поставщики A_i являются не действующими, а проектируемыми. Число d_{ij} можно интерпретировать, например, как плату за пользование транспортными средствами, не зависящую от их загрузки, либо как затраты на строительство магистрали от A_i к B_j, не зависящие от будущих грузопотоков (в дальнейшем мы будем пользоваться последней интерпретацией).

Задачу (3) — (6) естественно называть транспортной задачей с фиксированными доплатами или неоднородной транспортной задачей.

Если все $d_{ij} = 0$, то задача (3) — (6) превращается в обычную однородную транспортную задачу.

В случае, когда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{1'}$$

модель (3) — (6) является моделью размещения, так как ее решение, помимо информации о грузопотоках, дает также перечень реально вводимых в действие поставщиков A_i (множество строк i, для которых есть хоть одно $x_{ij} > 0$), уточненные плановые мощности поставщиков $\left(\text{числа } \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)$ и схему строительства магистралей (соединять нужно те пары A_i, B_j, для которых $x_{ij} > 0$).

К модели (3) — (6) сводится также ряд других реальных задач, не связанных с размещением.

Каковы же возможные подходы к задаче? Найти для (3) — (6) точные специализированные методы, являющиеся обобщением известных методов решения транспортной задачи, по-видимому, принципиально невозможно из-за разрывности целевой функции (3). Ничего не дает также сглаживание (2) посредством кусочно-линейной или гладкой функции (рис. 1), так как соответствующие функции оказываются вогнутыми. В связи с этим сглаженная целевая функция (3) будет иметь в области (4) — (6) несколько локальных экстремумов, что сильно затруднит поиск глобального минимума.

Один из подходов к точному решению задачи (3) — (6) основан на возможности ее сведения к общей частично целочисленной задаче линейного программирования. Способ такого сведения был указан, например, М. Балинским [3], см. также обзорную статью [4]. Он состоит в следующем.

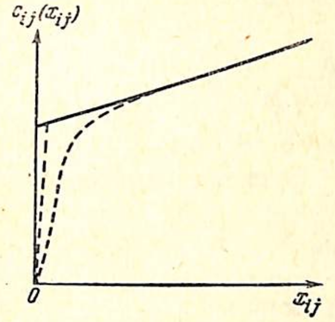

Рис. 1

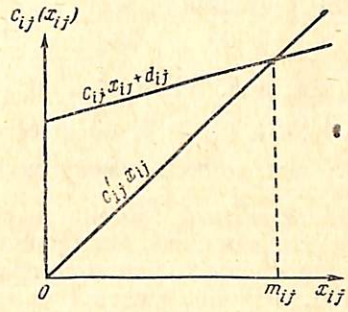

Рис. 2

Требуется найти числа x_{ij} и y_{ij}, минимизирующие линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}+d_{ij}y_{ij} \tag{7}$$

и подчиненные ограничениям (4) — (6), а также дополнительному ограничению

$$y_{ij}=\begin{cases}0\\1\end{cases}, \quad 0\leqslant x_{ij}\leqslant m_{ij}y_{ij}, \tag{8}$$

где

$$m_{ij}=\min\{a_i, b_j\}$$

(Определенные в (9) числа m_{ij} служат оценками сверху для грузопотоков, т. е. в любом допустимом плане транспортной задачи будет $x_{ij}\leqslant m_{ij}$.)

Сформулированная целочисленная задача эквивалентна задаче (3) — (6). Решение задачи (3) — (6), естественно, порождает решение целочисленной задачи. Чтобы показать, что решение целочисленной задачи $\|x_{ij}^0\|$, $\|y_{ij}^0\|$ является решением задачи (3) — (6), достаточно убедиться, что $y_{ij}^0=0$, если $x_{ij}^0=0$, и $y_{ij}^0=1$, если $x_{ij}^0>0$. Покажем справедливость, например, первого утверждения. Пусть $x_{i_0j_0}^0=0$, а $y_{i_0j_0}^0>0$; тогда, очевидно, векторы $\|x_{ij}^0\|$ и $\|y_{11}^0, \ldots, y_{i_0-1,\,j_0-1}^0, 0, y_{i_0+1,\,j_0+1}, \ldots, y_{mn}^0\|$, удовлетворяя всем ограничениям, доставляют линейной форме (7) меньшее значение, чем векторы $\|x_{ij}^0\|$ и $\|y_{ij}^0\|$, которые являются решением задачи. Следовательно, $y_{i_0j_0}^0=0$. Аналогично проверяется, что, если $x_{ij}^0>0$, то $y_{ij}=1$.

К полученной целочисленной задаче применимы общие методы целочисленного линейного программирования [4, 5]; при этом их реализация, несомненно, окажется для данной постановки существенно проще, чем для общего случая в силу простой структуры матрицы ограничений. Однако большие размеры целочисленной задачи (матрица ограничений при сведении данной задачи к общей задаче линейного программирования имеет размеры $2mn \times 2mn$), а также «неустойчивость» методов целочисленного программирования делают этот подход, по-видимому, малореальным.

Метод Балинского. В силу сказанного естественно пытаться построить для задачи (3) — (6) специализированные приближенные методы. Простой приближенный метод был предложен в 1961 г. Балинским [3] (см. также [4]). Его идея заключается в следующем. Рассмотрим задачу (7), (4) — (6), (8) без требования целочисленности y_{ij}. Легко устанавливается, что для любого оптимального решения $\|\overset{1}{x}_{ij}\|$, $\|\overset{1}{y}_{ij}\|$ этой задачи имеет место соотношение

$$\overset{1}{x}_{ij} = m_{ij}\overset{1}{y}_{ij}. \tag{10}$$

В самом деле, если $\overset{1}{y}_{ij} = 0$, то в силу (8) и $\overset{1}{x}_{ij} = 0$, т. е. (10) выполняется. Пусть $\overset{1}{y}_{ij} > 0$, но вместо (10) мы имеем $\overset{1}{x}_{ij} < m_{ij}\overset{1}{y}_{ij}$. Тогда, как и выше, мы можем уменьшить $\overset{1}{y}_{ij}$, не нарушая ограничений задачи и уменьшая значение линейной формы (7). Поэтому такая пара $\overset{1}{x}_{ij}$, $\overset{1}{y}_{ij}$ не может войти в оптимальное решение.

Отсюда следует, что при поиске оптимального решения задачи (7), (4) — (6), (8) без учета целочисленности можно выразить из (10) y_{ij} через x_{ij};

$$y_{ij} = x_{ij} / m_{ij}$$

и прийти к задаче минимизации линейной формы

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + d_{ij}\frac{x_{ij}}{m_{ij}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} + \frac{d_{ij}}{m_{ij}}\right)x_{ij} \tag{11}$$

при ограничениях (4) — (6). Точное решение $\|\overset{0}{x}_{ij}\|$ однородной транспортной задачи (11), (4) — (6) естественным образом порождает приближенное решение $\|x^*_{ij}\|$, $\|y^*_{ij}\|$ интересующей нас задачи:

$$\begin{gathered} x^*_{ij} = y^*_{ij} = 0, \quad \text{если } \overset{0}{x}_{ij} = 0, \\ x^*_{ij} = \overset{0}{x}_{ij},\ y^*_{ij} = 1, \quad \text{если } \overset{0}{x}_{ij} > 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Имеющиеся оценки отклонения приближенного решения (12) от оптимума являются весьма грубыми и практически мало полезны. Однако благодаря своей простоте метод Балинского может широко применяться для получения приемлемых приближенных решений в реальных задачах.

Можно дать также простое геометрическое истолкование метода Балинского. Попытаемся заменить на каждой магистрали (i, j) неоднородную функцию затрат $c_{ij}(x_{ij})$ (рис. 2) однородной функцией $\overset{1}{c}_{ij}x_{ij}$, значения которой не превышали бы значений $c_{ij}(x_{ij})$ для $x_{ij} \leqslant m_{ij}$. Если потребовать, чтобы прямые $\overset{1}{c}_{ij}x_{ij}$ и $c_{ij}x_{ij} + d_{ij}$ пересекались при $x_{ij} = m_{ij}$, то мы получим

$$\overset{1}{c}_{ij}m_{ij} = c_{ij}m_{ij} + d_{ij},$$

откуда

$$\overset{1}{c}_{ij} = c_{ij} - d_{ij} / m_{ij}. \tag{13}$$

Таким образом, однородная транспортная задача с коэффициентами линейной формы (13) есть попросту задача (11), (4) — (6).

Усовершенствование метода Балинского. В Ленинградском вычислительном центре АН СССР был разработан метод улучшения приближенного решения рассматриваемой задачи, полученного по методу Балинского. Идея этого метода заключается в следующем. В любом базисном плане

$\overset{1}{x}_{ij} = x^*_{ij}$ транспортной задачи с матрицей $\|\overset{1}{c}_{ij}\|$ всегда существует по крайней мере два таких x^*_{ij}, что $x^*_{ij} = m_{ij}$. По тем парам (i, j), для которых $x^*_{ij} = m_{ij}$, затраты в задачах (3)—(6) и (4)—(6), (11) совпадают и равны $c_{ij}x^*_{ij} + d_{ij}$. Для остальных пар (i, j) мы имеем $c_{ij}x^*_{ij} + d_{ij}\dfrac{x^*_{ij}}{m_{ij}} <$ $< c_{ij}(x^*_{ij})$, так как для них $\dfrac{x^*_{ij}}{m_{ij}} < 1$. Из-за несоответствия затрат на этих парах оптимальные планы обеих задач совпадать не будут. Поэтому примем, что в клетках (i, j), для которых $x^*_{ij} = m_{ij}$, структура затрат исходной задачи отражена верно и улучшения этого плана следует искать при помощи перемещений только на тех парах (i, j), для которых $x^*_{ij} < m_{ij}$. Поскольку на этих парах затраты в аппроксимирующей задаче занижены против реальных, их следует пересчитать.

Это осуществляется следующим образом. В качестве первого приближения к решению задачи (3) — (6) составляется и решается транспортная задача с целевой функцией (11) (т. е. осуществляется методом Балинского). В ее решении отмечаются те x^*_{ij}, для которых $x^*_{ij} = m_{ij}$, т. е. $x^*_{ij} = a_i$ или $x^*_{ij} = b_j$. Такие строки i и столбцы j назовем **висячими рядами**. После этого производится поочередное вычеркивание висячих рядов и пересчет чисел a_i и b_j (аналогичные действия выполняются в известном методе минимального элемента). Именно, если $x^*_{ij} = a_i$, вычеркиваем строку i и полагаем $\overset{1}{b}_j = b_j - x^*_{ij}$; если $x^*_{ij} = b_j$, вычеркиваем столбец j и полагаем $\overset{1}{a}_i = a_i - x^*_{ij}$. Для остальных i, j берем $\overset{1}{a}_i = a_i$, $\overset{1}{b}_j = b_j$. После этого находим

$$\overset{1}{m}_{ij} = \min\{\overset{1}{a}_i, \overset{1}{b}_j\}, \tag{9'}$$

вычисляем

$$\overset{2}{c}_{ij} = c_{ij} + \frac{d_{ij}}{\overset{1}{m}_{ij}} \tag{13'}$$

и решаем транспортную задачу (меньшего размера!) с исходными данными $\overset{1}{a}_i$, $\overset{1}{b}_j$, $\|\overset{2}{c}_{ij}\|$.

Мы имеем, очевидно, $\overset{2}{c}_{ij} \geqslant \overset{1}{c}_{ij}$, так как $\overset{1}{m}_{ij} \leqslant m_{ij}$ (вспомним, что начальное приближение c_{ij} давало занижение затрат против реальных на тех парах (i, j), где $x_{ij} < m_{ij}$). Для оптимального решения новой задачи снова повторяем процесс вычеркивания висячих рядов, пересчитываем $\overset{1}{a}_i$, $\overset{1}{b}_j$ $\overset{2}{c}_{ij}$ и т. д. Таким образом, предлагаемый приближенный метод проводится «циклами», на каждом из которых к вспомогательной задаче (имеющей меньшие размеры по сравнению с предыдущим циклом) применяется метод Балинского с пересчетом данных по методу минимального элемента. Этот процесс, разумеется, конечен, поскольку размеры вспомогательной задачи на каждом шаге сокращаются хотя бы на единицу.

При этом на каждом цикле в окончательный план переносят те x^*_{ij}, которые оказались в висячих рядах.

Численные эксперименты показали, что предлагаемый метод может дать снижение суммарных затрат против значения, получаемого по методу Балинского, порядка 3% и более.

Остановимся на некоторых деталях, связанных с реализацией этого метода. При переходе к каждому следующему циклу может оказаться целесообразным вычеркивать не все висячие ряды, а, скажем, один или несколько из них. Такая более тонкая «доводка» существенно увеличивает объем вычислений, но, как правило, приводит к лучшим окончательным результатам. Один из возможных способов выбора вычеркиваемого ряда указан в следующем разделе.

Однако при вычеркивании одного висячего ряда процесс может оказаться не монотонным, т. е. на шаге $k+1$ усеченной задачи (по сравнению с задачей на шаге k) мы можем получить план, который хуже, чем часть плана, полученного на шаге k, соответствующая усеченной задаче шага $k+1$.

Алгоритм модифицированного метода Балинского. Рассмотрим более подробно процесс улучшения плана, получаемого по методу Балинского. Для этого, как уже указывалось в (3) — (6), по данной задаче строится последовательность транспортных задач, причем задача 0 совпадает с задачей (4) — (6), (11).

Задача 0. Дано множество пунктов производства $I_0=(1, 2, \ldots, m)$ с объемами производства a_i^0, $i\in I_0 (a_i^0=a_i, i\in I_0)$. Дано множество пунктов потребления $J_0=\{1, 2, \ldots\ n\}$ с объемами потребления b_j^0, $j\in J_0$ $(b_j^0, j\in J_0)$. Требуется минимизировать

$$\sum_{i\in I_0}\sum_{j\in J_0} c_{ij}^0 x_{ij}, \tag{11-0}$$

где

$$c_{ij}^0=c_{ij}+\frac{d_{ij}}{m_{ij}^0}, \tag{13-0}$$

$$m_{ij}^0=\min\{a_i^0, b_j^0\} \tag{9-0}$$

при ограничениях

$$x_{ij}\geqslant 0, \tag{4-0}$$

$$\sum_{j\in J_0} x_{ij}=a_i^0, \qquad i\in I_0, \tag{5-0}$$

$$\sum_{i\in I_0} x_{ij}=b_j^0, \qquad j\in J_0. \tag{6-0}$$

Пусть $\| x_{ij}^0 \|$ оптимальное решение задачи 0, т. е. существует система чисел u_i^0, $i\in I_0$, $v_j^0, j\in J_0$, таких, что $c_{ij}^0\geqslant v_j^0-u_i^0$ для любой пары $(i, j)\in I_0\times\times J_0$ и $c_{ij}^0=v_j^0-u_i^0$ для

$$(i, j)=\{(i, j)\mid (i, j)\in I_0\times J_0, x_{ij}^0>0\}.$$

Обозначим

$$I_0=\{i\mid i\in I_0, x_{ij}^0=a_i^0\}, \qquad J_0=\{j\mid j\in J_0, x_{ij}^0=b_j^0\}.$$

Очевидно, что хотя бы одно из этих множеств не пусто. Рассмотрим $i\in I_0$. По определению I_0 найдется такой индекс $j(i)\in J_0$, что $x_{ij}^0(i)=a_i^0$.

Найдем

$$\min_{j \neq j(i)} (\overset{0}{c}_{ij} - \overset{0}{v}_j + \overset{0}{u}_i) = \overset{0}{\delta}_i. \tag{14-0}$$

Аналогично для любого $j \in \tilde{J}_0$ найдется такой индекс $i(j) \in I_0$, что $\overset{0}{x}_{i(j)j} = \overset{0}{b}_j$. Найдем

$$\min_{i \neq i(j)} (c_{ij}{}^0 - v_j{}^0 + u_i{}^0) = \Delta_j{}^0. \tag{15-0}$$

Величина $\overset{0}{\delta}_i$ $(\overset{0}{\Delta}_j)$ характеризует i-ю строку (j-й столбец). Она показывает, насколько увеличится стоимость перевозки единицы продукта, вывозимого (привозимого) из i-го пункта производства (в j-й пункт потребления), если план перевозок изменится в i-й строке (j-м столбце).

Рассмотрим

$$\max_{i \in I_0,\, j \in J_0} \{\delta_i{}^0, \Delta_j{}^0\} = \lambda^0. \tag{16-0}$$

Обозначим

$$\tilde{I}_0' = \{i \mid i \in \tilde{I}_0, \ \overset{0}{\delta}_i = \lambda^0\}, \quad \tilde{J}_0' = \{j \mid j \in \tilde{J}_0, \quad \overset{0}{\Delta}_j = \lambda^0\}.$$

Плану $\| \overset{0}{x}_{ij} \|$ в задаче (3) — (6) соответствует значение формы (3), равное

$$\sum_{i \in I_0} \sum_{j \in J_0} c_{ij}(x_{ij}{}^0) = \Phi_0.$$

Вычислим

$$\sum_{i \in I_0 \setminus \tilde{I}_0'} \sum_{j \in J_0 \setminus \tilde{J}_0'} c_{ij}(x_{ij}^{(0)}) = \tilde{\Phi}.$$

Задача 1. Дано множество пунктов производства $I_1 = I_0 \setminus \tilde{I}_0$ с объемами производства a_i, $i \in I_1$, где

$$a_i{}^1 = a_i{}^0, \quad i \notin \{i \mid x_{ij}{}^0 = b_j{}^0, \ j \in \tilde{J}_0'\},$$

$$a_i^1 = a_i^0 - \sum_{j \in \tilde{J}_0'} x_{ij}^0 i \in \{i \mid x_{ij}^0 = b_j^0, \ j \in J_0'\}.$$

Дано множество пунктов потребления $J_1 = J_0 \setminus \tilde{J}_0'$ с объемами потребления $\overset{1}{b}_j$, $j \in J_1$, где

$$b_j{}^1 = b_j{}^0, \quad j \notin \{j \mid \overset{0}{x}_{ij} = \overset{0}{a}_i, \ i \in \tilde{I}_0'\},$$

$$b_j' = b_j^0 - \sum_{i \in \tilde{I}_0} x_{ij}^0, \quad j \in \{j \mid x_{ij}^0 = a_j^0, \quad i \in \tilde{I}_0'\}.$$

Требуется минимизировать

$$\sum_{i \in I_1} \sum_{i \in J_1} c_{ij}{}^1 x_{ij}, \tag{11-1}$$

где

$$c_{ij}^1 = c_{ij} + d_{ij} / m_{ij}^1, \tag{13-1}$$

$$m_{ij}^1 = \min \{a_i^1, \ b_j^1\} \tag{9-1}$$

при ограничениях

$$x_{ij} \geqslant 0,$$

$$\sum_{i \in J_1} x_{ij} = a_i^1, \quad i \in I_1, \tag{5-1}$$

$$\sum_{i \in I_1} x_{ij} = b_j^1, \quad j \in J_1. \tag{6-1}$$

Пусть $\| x_{ij}^1 \|$ — оптимальное решение задачи 1. Вычислим

$$\sum_{i\in I_1} \sum_{j\in J_1} c_{ij}(x_{ij}^1) = \Phi_1.$$

Если $\Phi_1 \leqslant \widetilde{\Phi}_0$, переходим к задаче 2 по правилам, описанным при переходе от задачи 0 к задаче 1, используя план $\|x_{ij}^1\|$, $i \in I_1$, $j \in J_1$. Если $\Phi_1 > \widetilde{\Phi}_0$, переходим к задаче 2 по тем же правилам, используя план $\|x_{ij}^0\|$, $i \in I_1$, $j \in J_1$ и т. д.

Опишем переход от задачи k к задаче $k+1$.

Пусть $\|x_{ij}^k\|$, $i \in I_k$, $j \in J_k$ — оптимальное решение задачи k.

Вычислим

$$\sum_{i\in I_k} \sum_{j\in J_k} c_{ij}(x_{ij}^k) = \Phi_k.$$

Если $\Phi_k \leqslant \widetilde{\Phi}_{k-1}$, то находим множества

$$\widetilde{I}_k = \{i \mid i \in I_k,\ x_{ij}^k = a_i^k\}, \qquad \widetilde{J}_k = \{j \mid j \in J_k,\ x_{ij}^k = b_j^k\}.$$

Для каждого $i \in \widetilde{I}_k$ находим

$$\min_{j\neq j(i)} (c_{ij}^k - v_j^k + u_i^k) = \delta_i^k. \tag{14-k}$$

Для каждого $j \in \widetilde{J}_k$ находим

$$\min_{i\neq i(j)} (c_{ij}^k - v_j^k + u_i^k) = \Delta_j^k. \tag{15-k}$$

Рассмотрим

$$\max_{i\in I_k,\ j\in\widetilde{J}_k} \{\delta_i^k,\ \Delta_j^k\} = \lambda^k. \tag{16-k}$$

Обозначим

$$\widetilde{I}_k' = \{i \mid i \in \widetilde{I}_k,\ \delta_i^k = \lambda^k\},\ \widetilde{J}_k' = \{j \mid j \in \widetilde{J}_k,\ \Delta_j^k = \lambda^k\}.$$

Вычислим

$$\sum_{i\in I_k\setminus\widetilde{I}_k'} \sum_{j\in J_k\setminus\widetilde{J}_k'} c_{ij}(x_{ij}^k) = \widetilde{\Phi}_k$$

и переходим к задаче $k+1$.

Задача $k+1$. Дано множество пунктов производства $I_{k+1} = I_k \setminus \widetilde{I}_k$ с объемами производства

$$a_i^{k+1} = a_i^k, \quad i \notin \{i \mid x_{ij}^k = b_j^k,\ j \in \widetilde{J}_k'\},$$

$$a_i^{k+1} = a_i^k - \sum_{i\in\widetilde{J}_k'} x_{ij}^k, \quad i \in \{i \mid x_{ij}^k = b_j^k, \quad j \in \widetilde{J}_k'\}.$$

Дано множество пунктов потребления $J_{k+1} = J_k \setminus \widetilde{J}_k'$ с объемами потребления

$$b_j^{k+1} = b_j^k, \quad j \notin \{j \mid x_{ij}^k = a_i^k,\ i \in \widetilde{I}_k'\},$$

$$b_j^{k+1} = b_j^k - \sum_{j\in\widetilde{I}_k'} x_{ij}^k, \quad j \in \{j \mid x_{ij}^k = a_i^k, \quad i \in \widetilde{I}_k'\}.$$

Требуется минимизировать

$$\sum_{i\in I_{k+1}} \sum_{j\in J_{k+1}} c_{ij}^{k+1} x_{ij}, \qquad (11\text{-}(k+1))$$

где

$$c_{ij}^{k+1} = c_{ij} + d_{ij}/m_{ij}^{k+1}, \qquad (13\text{-}(k+1))$$

$$m_{ij}^{k+1} = \min\{a_i^{k+1},\ b_j^{k+1}\} \qquad (9\text{-}(k+1))$$

при ограничениях

$$x_{ij} \geqslant 0, \qquad (4\text{-}(k+1))$$

$$\sum_{j\in J_{k+1}} x_{ij} = a_i^{k+1}, \quad i \in I_{k+1}, \qquad (5\text{-}(k+1))$$

$$\sum_{i\in I_{k+1}} x_{ij} = b_j^{k+1}, \quad j \in J_{k+1}. \qquad (6\text{-}(k+1))$$

Если $\Phi_k \leqslant \Phi_{k-1}$, то переходим к задаче $k+1$ по известным уже правилам, используя план $\| \overset{k}{x_{ij}} \|$, $j \in I_k$, $j \in J_k$. Если $\Phi_k > \widetilde{\Phi}_{k-1}$, то переходим к задаче $k+1$, используя план

$$\|x_{ij}^{k-1}\|, \quad i \in I_k, \quad j \in J_k.$$

За приближенное решение задачи (3) — (6), (11) возьмем $X = \| \bar{x}_{ij} \|$

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij}^0, & \text{если } i \in \widetilde{I}_0' \text{ или } j \in \widetilde{J}_0', \\ x_{ij}^1, & \text{если } i \in \widetilde{I}_1^0 \text{ или } j \in \widetilde{J}_1', \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{ij}^k, & \text{если } i \in \widetilde{I}_k' \text{ или } j \in \widetilde{J}_k'. \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Рассмотрим реализацию изложенного алгоритма на примере.

Пример

	b_j: 40	60	30	80	70
120	11 70	10 30	6 400	7 340	10 110
a_i 90	3 500	9 240	8 90	12 120	12 170
70	7 140	9 100	11 60	7 130	10 240

В левом верхнем углу каждой клетки стоит c_{ij}, в правом — d_{ij}.

Задача 0

a_i^0 \ b_j^0	40	60	30	80	70	u_i^0
120	12.75	10.50 50	19.33	11.25	11.57 70	0
90	15.50	13.00 10	11.00 30	13.50 50	14.43	—2.50
70	10.50 40	10.67	13.00	8.86 30	13.43	2.14
v_j^0	12.64	10.50	8.50	11.00	11.57	

В левом углу клетки (i, j) стоит $\overset{0}{c}_{ij}$, в центре — $\overset{0}{x}_{ij}$, $\|\overset{0}{x}_{ij}\|$ — оптимальный план задачи 0. План $\|\overset{0}{x}_{ij}\|$ получен по методу Балинского, и ему соответствует значение формы (3), равное 3480. Имеем

$$\widetilde{I}_0' = \Lambda, \quad \widetilde{J}_0' = \{3\}, \quad \lambda^0 = 6{,}64, \quad \widetilde{\Phi}_0 = 3150.$$

Задача 1

a_i^1 \ b_j^1	40	60	80	70	u_i^1
120	12.75 40	10.50	11.25 10	11.57 70	0
60	15.50	13.00 60	14.00	14.83	—2.50
70	10.50	10.67	8.86 70	13.43	2.39
v_j^1	12.75	10.50	11.25	11.57	

В левом углу клетки (i, j) стоит $\overset{1}{c}_{ij}$, в центре — $\overset{1}{x}_{ij}$, $\|\overset{1}{x}_{ij}\|$ — оптимальный план задачи 1. Получаем $\Phi_1 = 3130 < \widetilde{\Phi}_0$, $\widetilde{I}_1' = \lambda$, $\widetilde{J}_1' = \{5\}$, $\lambda^1 = 0{,}76$, $\widetilde{\Phi}_1 = 2340$.

Задача 2

a_i^2 \ b_j^2	40	60	80	u_i^2
50	12.75 40	10.60 10	13.80	0
60	15.50	13.00 50	14.00 10	—2.40
70	10.50	10.67	8.86 70	3.74
v_j^2	12.75	10.60	11.60	

Здесь $\Phi_2 = 2190 < \widetilde{\Phi}_1$, $I_2' = \{3\}$, $J_2' = \Lambda$, $\lambda^2 = 1{,}49$, $\widetilde{\Phi}_2 = 1570$.

Задача 3

a_i^3 \ b_j^3	40	60	10	u_i^3
50	12.75 40	10.60 10	41.00	0
60	15.50	13.00 50	24.00 10	—2.40
v_j^3	12.75	10.60	21.60	

$$\Phi_3 = 1570 \leqslant \widetilde{\Phi}_2,\ I_3' = \Lambda,\ J_3' = \{4\},\ \lambda^3 = 19{,}40,\ \widetilde{\Phi}_3 = 1330.$$

Задача 4

a_i^4 \ b_j^4	40	60	u_i^4
50	12.75	10.60 50	0
50	15.50 40	13.80 10	—3.20
v_j^4	12.40	10.60	

$$\Phi_4 = 1480 > \widetilde{\Phi}_3, \quad I_4' = \Lambda, \quad J_4^1 = \{1\}, \quad \lambda^4 = 0{,}35.$$

За приближенное решение исходной задачи примем план $x_{23} = 30$, $x_{15} = 70$, $x_{34} = 70$, $x_{24} = 10$, $x_{11} = 40$, $x_{12} = 10$, $x_{22} = 50$.

Значение формы (3), соответствующее этому плану, равно 3330 (метод Балинского дает значение 3480).

Условия рассмотренного примера взяты из работы Р. А. Поляка [6].

Предлагаемая им методика приводит в данном примере к тому же значению суммарных затрат.

Как уже отмечалось, при реализации этого процесса для задач больших размеров можно при переходе от шага k к шагу $k+1$ ($k = 0,1 \ldots$) вычеркивать в оптимальном решении задачи k все висячие ряды. Это существенно уменьшает объем вычислений, но может привести к плану, которому отвечает большее значение формы (3).

Дополнительные замечания. Как основной вариант метода Балинского, так и описанная здесь его модификация первоначально предназначались для решения невырожденных и сбалансированных задач: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Между тем для задач размещения характерна значительная несбалансированность («открытость»): $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \gg \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Ясно, что при наличии фиксированных доплат вырожденность задачи оказывается только выгодной: чем более вырожденной является задача, тем меньшее число ненулевых x_{ij} будет фигурировать в окончательном плане, и, следовательно, в целевую функцию (3) войдет меньшее число слагаемых d_{ij}. То же справедливо для несбалансированных задач, так как с ростом разности $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ количество ненулевых x_{ij} в оптимальном плане убывает.

Опыт показывает, что при значительной несбалансированности обычной транспортной задачи (без фиксированных доплат) ее целесообразно решать не стандартными методами, а методом минимального элемента: как правило, сразу получается либо оптимальный, либо весьма близкий к нему план. При осуществлении этого процесса легко построить попутно и соответствующую систему потенциалов, что упрощает проверку оптимальности полученного плана.

Если данная однородная транспортная задача является аппроксимирующей для неоднородной задачи размещения (на одном из этапов описанного процесса), то ее целесообразно решать методом минимального элемента в сочетании с предложенным Куном [7] приемом, искусственно усиливающим вырожденность задачи. Этот алгоритм заключается в следующем.

1. Найти $c_{i_0 j_0} = \min\limits_{ij} c_{ij}$.

2. Задавшись некоторым $\Delta > 0$, сравнить $|a_{i_0} - b_{j_0}|$ и Δ. Если $|a_{i_0} - b_{j_0}| \geqslant \Delta$, положить $x_{i_0 j_0} = \max\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$ и вычеркнуть строку i_0 и столбец j_0.

3. Если $|a_{i_0} - b_{j_0}| > \Delta$, найти $x_{i_0 j_0} = \min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$. Если этот минимум есть a_{i_0}, вычеркнуть из матрицы строку i_0 и положить $b_{j_0}' = b_{j_0} - x_{i_0 j_0}$. Если минимум есть b_{j_0}, вычеркнуть столбец j_0 и положить $a_{i_0} = a_{i_0} - x_{i_0 j_0}$.

4. Повторять процесс над суженной матрицей до тех пор, пока не будут вычеркнуты все столбцы (напомним, что на последнем шаге этого процесса

в невычеркнутых строках i будут стоять недоиспользуемые мощности $a_{i1} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$).

«Шаг вырождения» Δ здесь представляет собой максимальную величину, на которую допустимо изменять величины a_i и b_j, для создания дополнительной вырожденности. Можно дать лишь самые примитивные рекомендации по ее выбору (прямая пропорциональность запасам и потребностям, обратная пропорциональность ценности единицы груза и т. п.). В ходе вычислений Δ целесообразно варьировать.

Из сказанного выше не совсем ясно, что следует понимать под «значительной» несбалансированностью задачи. Затрудняясь пока дать точный ответ на этот вопрос (степень влияния разности $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ на количество ненулевых x_{ij} в оптимальном плане связана также и со структурой матрицы $\| c_{ij} \|$), мы предоставляем его практическое решение опыту и интуиции читателя.

Использование описанного приема решения вспомогательных задач на каждой итерации позволяет довольно быстро решать вручную задачи значительных размеров.

Обобщение метода Балинского на общую задачу линейного программирования с разрывной целевой функцией. Идея метода Балинского может быть использована также для приближенного решения общей задачи линейного программирования с неоднородной разрывной целевой функцией.

Эта задача заключается в минимизации

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j) \tag{17}$$

при ограничениях

$$x_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \tag{18}$$

где

$$c_j(x_j) = \begin{cases} c_j x_j + d_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Предположим, что для переменных x_j заданы (или найдены) их верхние границы k_j. Числа k_j могут быть определены или из существа задачи, или из вида ограничений (18). Например, если все $a_{ij} \geqslant 0$, то

$$k_j = \min_{i \mid a_{ij} > 0} \frac{b_i}{}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования, состоящую в минимизации линейной формы

$$\sum_{j=1} \left(c_j + \frac{d_j}{k_j} \right) x_j \tag{20}$$

при ограничениях (18).

Пусть вектор $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ является оптимальным решением задачи (17) — (19), т. е.

$$\min \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j/k_j)x_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j/k_j)x_j^* = \Phi_0.$$

Вектор x^* примем за приближенное решение задачи (17) — (18). Значение формы (17) при этом будет равно $\Phi_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^*)$. Пусть вектор $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ доставляет глобальный минимум форме (17), т. е.

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^0) = \Phi.$$

Очевидно, что $\Phi \leqslant \Phi_1$, т. е. число Φ_1 является оценкой сверху для минимума формы (17). Покажем, что число Φ_0 является оценкой снизу для минимума формы (17).

Очевидно, что при любом допустимом векторе $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j/k_j)x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j)$$

справедливы следующие неравенства:

$$\Phi_0 = \min \sum_{j=1} (c_j + d_j/k_j)x_j \leqslant \sum_{j=1} (c_j + d_j/k_j)x_j^0 \leqslant \sum_{j=1} c_j(x_j^0) = \Phi.$$

Нахождение локального минимума. Трудность решения задач линейного программирования с разрывной целевой функцией заключается в том, что целевая функция на многограннике допустимых решений может иметь несколько локальных минимумов. Нетрудно видеть, что все локальные минимумы достигаются на вершинах многогранника в случае как транспортной задачи, так и общей задачи линейного программирования. Это позволяет находить локальный минимум целевой функции методами линейного программирования.

Рассмотрим алгоритм нахождения локального минимума в транспортной задаче, предложенный в иной терминологии Р. А. Поляком [6]. Для простоты изложения будем предполагать, что в (1) стоит знак равенства и что задача невырожденная.

Сформулируем задачу (3) — (6) в терминах теории графов [8]. Дан полный простой граф $\Gamma_0 = (Z, Y, \Gamma)$, т. е. $Z = \{z_i\}$,

$$Y = \{y_j\},\ \Gamma(z_i) = Y, \Gamma(y_j) = \Lambda,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Вершина z_i соответствует i-му пункту производства, она соединена со всеми вершинами y_j, $j = 1, \ldots, n$, которые соответствуют пунктам потребления.

На вершинах графа задана функция f, такая, что $f(z_i) = a_i$, $f(y_j) = b_j$. Каждой дуге (i, j) сопоставлены числа c_{ij} и d_{ij}. Затраты при использовании дуги (i, j) равны $c_{ij}x_{ij} + d_{ij}$. Требуется найти план перевозок $\| x_{ij} \|$, удовлетворяющий (4) — (6) и минимизирующий общие расходы.

Рассмотрим некоторый базисный план $\| x_{ij} \|$. С этим планом связан частичный граф $\Gamma_1 = (Z, Y, \Gamma')$, который является деревом. Здесь

$$\Gamma'(z_i) = \{y_j | x_{ij} > 0\},\ i = 1, \ldots, m;\ \Gamma'(y_j) = \Lambda,\ j = 1, \ldots, n.$$

Возьмем дугу $(i_0, j_0) \in \Gamma_0$, $(i_0, j_0) \notin \Gamma_1$. Эта дуга образует цикл с некоторыми дугами из Γ_1. Число дуг в цикле четное. Обходя цикл в направлении ориентации дуги (i_0, j_0), пометим знаком плюс дугу (i_0, j_0), знаком минус — следующую и т. д. Обозначим через $\delta_{i,j} = \min\limits_{(i,j)\in U^-} x_{ij}$, где U^- — множество дуг, помеченных знаком минус (аналогично определяется U^+).

Вычислим величину

$$\delta_{i_0j_0} = \delta_{i_1j_1}\Big(\sum_{(i,j)\in U^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in U^-} c_{ij}\Big) + d_{i_0j_0} - d_{i_1j_1}.$$

Если $\delta_{i_0j_0} < 0$, то строим новый план: $x_{i_0j_0} = \delta_{i_1j_1}$, $x_{ij}' = x_{ij} + \delta_{i_1j_1}$, если $(i, j) \in U^+$, $x_{ij}' = x_{ij} - \delta_{i_1j_1}$, если $(i, j) \in U^-$ и $x_{ij}' = x_{ij}$, если $(i, j) \notin U^+ \cup U^-$.

Очевидно, что значение целевой функции (3) при плане $\| x_{ij}' \|$ меньше, чем при плане $\| x_{ij} \|$. Если при некотором плане $\| x_{ij}^0 \|$ для всех дуг $(i_0, j_0) \notin \Gamma_1$ мы будем иметь $\delta_{i_0j_0} \geqslant 0$, то план $\| x_{ij}^0 \|$ доставляет локальный минимум функции (3).

Подчеркнем, что этот процесс, являющийся аналогом метода потенциалов, дает лишь л о к а л ь н ы й, а не глобальный минимум.

Для общей задачи (17), (18) с неоднородной целевой функцией (19) также можно указать метод нахождения локального минимума, являющийся непосредственным обобщением симплекс-метода. Опишем его. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый базисный план рассматриваемой задачи, A_0 — вектор-столбец с компонентами $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, A_j — вектор-столбец с компонентами $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. С планом $(x_1, \ldots, x_n)$ связана система m линейно независимых векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и значение целевой функции, равное $z_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(x_j)$. Каждый небазисный вектор A_j, $j = m + 1, \ldots, n$ является линейной комбинацией базисных: $A_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{ij} A_i$, вектор A_0 равен $A_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i A_i$.

Найдем

$$\theta_j = \min_{i|\lambda_{ij}>0} \frac{x_i}{\lambda_{ij}} = \frac{x_{i_0}}{\lambda_{i_0j}}.$$

Обозначим $z_j = \theta_j \sum\limits_{i=1} \lambda_{ij} c_i + d_{i_0}$.

Если $z_j > \theta_j c_j + d_j$, то вместо вектора A_{i_0} вводим в базис вектор A_j и строим план: $x_j' = \theta_j$, $x_i' = x_i - \theta_j \lambda_{ij}$. С новым планом связано значение целевой функции, равное

$$z' = \sum_{i=1} c_i(x_i') + c_j(x_j') = \sum_{i=1} c_i(x_i - \theta_j\lambda_{ij}) + c_j(\theta_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i) - \sum_{i=1}^{m} c_j\theta_j\lambda_{ij} + c_j\theta_j + d_j - d_{i_0} = z_{i_0} - (z_j - (c_j\theta_j + d_j)) < z_0.$$

Если все $z_j \leqslant \theta_j c_j + d_j$, то план $x = (x_1, \ldots, x_n)$ доставляет целевой функции локальный минимум, т. е. ни на одной соседней вершине многогранника значение функции (17) не меньше.

Другие постановки задач размещения. Укажем прежде всего одно непосредственное обобщение описанной выше неоднородной транспортной задачи. Пусть в условиях этой задачи с данными a_i, b_j, $\| c_{ij} \|$, $\| d_{ij} \|$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, $j \in J = \{1, \ldots n\}$ определены, кроме того, разбиения множеств индексов $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_p$, $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_q$ и задана матрица $\| e_{\alpha\beta} \|$, $\alpha = 1, \ldots, p$, $\beta = 1, \ldots, q$.

Введем величины

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{i \in I_\alpha} \sum_{j \in J_\beta} c_{ij}(x_{ij}), \tag{21}$$

где функции $c_{ij}(x_{ij})$ определены согласно (2).

Пусть

$$E_{\alpha\beta}(X) = \begin{cases} C_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} & C_{\alpha\beta} > 0 \\ 0 & C_{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

В качестве целевой функции задачи рассмотрим

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{\beta=1}^{q} E_{\alpha\beta}(X). \tag{23}$$

Требуется найти $X = \| x_{ij} \|$, удовлетворяющие условиям (4) — (6) и минимизирующие функцию (23). В подобных задачах величины $e_{\alpha\beta}$ естественно назвать фиксированными доплатами второго ранга. Можно, разумеется, дать сходные формулировки и для задач с доплатами трех и более рангов. При $p = m$, $q = n$ поставленная задача сводится к задаче (3) — (6) с $d_{ij}' = d_{ij} + e_{\alpha\beta}$.

Доплаты второго ранга легко интерпретировать, например, следующим образом. Пусть разбиение множеств I и J отвечает естественным разбиениям пунктов производства и пунктов потребления по географическим районам. Тогда под $e_{\alpha\beta}$ естественно понимать затраты на сооружение магистрали от районов производства α к районам потребления β, а под d_{ij} — сумму затрат на строительство въездов из пунктов i на магистраль (α, β) и на строительство выездов с нее к пунктам j (т. е. $d_{ij} = d_{i\alpha} + d_{\beta j}$). При этом магистраль (α, β) строится или нет в зависимости от того, предусмотрено ли в плане установление связи хотя бы одного пункта i из района α хотя бы с одним из пунктов j из района β; если такая связь имеется, то затраты $e_{\alpha\beta}$ производятся один раз независимо от числа связей между α и β.

К этой модели легко сводится, например, модель размещения, в которой требуется минимизировать

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^*(x_{ij}),$$

где

$$c_{ij}^*(x_{ij}) = \begin{cases} c_{ij}x_{ij} + d_i & \text{при} \quad \sum\limits_{j=1} x_{ij} > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 \end{cases}$$

при условиях (4) — (6). Здесь фиксированные доплаты d_i отвечают единовременным затратам на организацию производства в пункте A_i, не зависящим от объема его выпуска $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

Указанное сведение выполняем, полагая в модели (23), (4) — (6)

$$d_{ij} = 0,\ e_{\alpha\beta} = d_i,\ p = m,\ q = 1.$$

Обобщение изложенного подхода на модель с фиксированными доплатами двух рангов, несомненно, представило бы большой интерес.

Отметим, что фиксированные доплаты могут быть естественно учтены в рамках многоэтапных моделей размещения, рассматривавшихся В. А. Машем [9].

Аналогичная модель, учитывающая также зависимость затрат на производство от его объема, рассматривалась И. В. Гирсановым и Б. Т. Поляком [10].

По поводу некоторых других математических моделей размещения отсылаем читателя к обзорным статьям Л. Е. Минца и Ю. Ю. Финкельштейна [11] и А. Г. Аганбегяна [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение математики при размещении производительных сил. М., Изд-во «Наука», 1964.
2. А. А. Корбут. Неоднородные задачи размещения (типа транспортной). Сб. [1].
3. Balinski M. L. Fixed-cost transportation problems. Naval Res. Logist, Quart., 1961, v. 8, No. 1.
4. А. А. Корбут. Целочисленные задачи линейного программирования. В сб. Экономико-математические методы, вып. 2. М., Изд-во «Наука», 1965.
5. G. B. Dantzig. Linear programming and extensions. Princeton, Princeton Univ. Press, 1963.
6. Р. А. Поляк. О нахождении экстремума в одной задаче типа транспортной. Материалы к конференции по опыту и перспективам применения математических методов и ЭВМ в планировании. Новосибирск, 1962. (Ротапринт).
7. H. W. Kuhn, W. J. Baumol. An approximative algorithm for the fixed-charges transportation problems. Navel Res. Logist. Quart., 1962, v. 9, No. 1.
8. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., Изд. иностр. лит., 1962.
9. В. А. Маш. К математическим методам оптимального размещения предприятий в многоэтапных системах производства и потребления. Вопр. экономики, 1962, № 10.
10. И. В. Гирсанов, Б. Т. Поляк. Математические методы решения задачи о размещении. В сб. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством. М., Изд-во МГУ, 1963.
11. Л. Е. Минц, Ю. Ю. Финкельштейн. Применение математических методов и электронно-вычислительных машин для решения задач по размещению отдельных отраслей промышленного производства. В сб. Планирование и экономико-математические методы. М., Изд-во «Наука», 1964.
12. А. Г. Аганбегян. Экономико-математическое моделирование и решение отраслевых задач. В сб. [1].

Поступила в редакцию
23 XI 1964