ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1965
том I, вып. 3

ОБОБЩЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Б. В. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

(Москва)

В данной статье рассматривается решение задачи линейного программирования в случае, когда любые свободные члены и коэффициенты при неизвестных в уравнениях и функционале могут быть заданными аналитическими функциями от одного параметра, изменяющегося в некотором конечном промежутке. При этом применяется идея, впервые предложенная Гассом и Саати для решения задачи линейного программирования, в которой коэффициенты при неизвестных в функционале или свободные члены являются линейными функциями одного и того же параметра [1, 2]. Дальнейшие обобщения имеются для случая, когда коэффициенты при одном из неизвестных в уравнениях являются линейными функциями одного параметра [3], и для случая, когда коэффициенты при неизвестных в функционале являются полиномами одного параметра. В [4] рассматривается более общая постановка, а именно, допускается, что коэффициенты при неизвестных в уравнениях, функционале и свободные члены являются линейными функциями одного и того же параметра. В указанной статье нет подробного анализа всех ситуаций, которые могут возникать в ходе решения. В нашей статье рассматривается более общий случай, когда зависимость от одного параметра задается любыми аналитическими функциями. При этом проводится анализ ситуаций, которые могут возникать в ходе решения.

Математически излагаемая задача формулируется следующим образом. Требуется определить для всех значений параметра λ, содержащихся в промежутке $[\lambda_1, \lambda_2]$, $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, ..., $x_n(\lambda) \geqslant 0$, максимизирующие выражение

$$C(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(\lambda) x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\lambda) x_j = \varphi_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Здесь $f_{ij}(\lambda)$, $\varphi_i(\lambda)$ и $\psi_j(\lambda)$ — заданные аналитические функции.

Вот сравнительно простой пример подобной задачи. Пусть рассматривается производственный процесс, в котором производится n видов продукции и при этом используются m факторов. Пусть качество продукции первого вида характеризуется значением некоторого параметра λ, причем от значения этого параметра зависят нормы расхода факторов на производство единицы продукции и цена единицы продукции этого вида. Если обозначить через a_{ij} количество i-го фактора, затрачиваемое на производство единицы продукции j-го вида, а через c_j цену единицы этой продукции и предположить, что мы стремимся максимизировать стоимость произведенной продукции, то получим задачу

$$\max\left[c_1(\lambda)x_1+\sum_{j=2}^{n}c_jx_j\right],\qquad \sum_{j=2}^{n}a_{ij}x_j+a_{i1}(\lambda)x_1\leqslant b_i\qquad(i=1,2,\ldots,m),$$
$$x_j\geqslant 0.$$

Здесь b_i — количество ресурсов i-го фактора. Если предположить, что и продукция некоторых видов рассматривается как факторы и что нормы затрат этих факторов зависят от качества продукции первого вида, то значительно большая группа a_{ij} и c_j будет зависеть от параметра λ.

Ниже будет предложена вычислительная процедура для решения сформулированной задачи. При этом будет доказана конечность предлагаемой процедуры. Это доказательство будет опираться на две леммы.

Лемма 1. *Любой минор матрицы*

$$A=\left\|\begin{matrix} f_{11}(\lambda), & f_{12}(\lambda),\ldots, f_{1n}(\lambda), & \varphi_1(\lambda)\\ f_{21}(\lambda), & f_{22}(\lambda),\ldots, f_{2n}(\lambda), & \varphi_2(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{m1}(\lambda), & f_{m2}(\lambda),\ldots, f_{mn}(\lambda), & \varphi_m(\lambda)\end{matrix}\right\|,$$

не обращающийся тождественно в нуль, имеет в промежутке $[\lambda_1,\lambda_2]$ *не более конечного числа нулей.*

Доказательство. Пусть $\Delta(\lambda)$ — произвольный минор матрицы A и $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$. Предположим противное, т. е. предположим, что $\Delta(\lambda)$ имеет бесконечное число нулей. Так как $\Delta(\lambda)$ получается только с помощью действий умножения и сложения из элементов матрицы, являющихся аналитическими функциями от λ, то и $\Delta(\lambda)$ является аналитической функцией. Из предположения, что $\Delta(\lambda)$ имеет бесконечное число нулей, следует на основании известной теоремы единственности аналитических функций, что $\Delta(\lambda)$ равен тождественно нулю. Но это противоречит условию. Следовательно, наше предположение, что $\Delta(\lambda)$ имеет бесконечное число нулей, неверно.

Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — произвольные m индексов из совокупности $1, 2, \ldots, n$, для которой определитель

$$\left|\begin{matrix} f_{i_1i_1}(\lambda), & f_{i_1i_2}(\lambda), & \ldots, & f_{i_1i_m}(\lambda)\\ f_{i_2i_1}(\lambda), & f_{i_2i_2}(\lambda), & \ldots, & f_{i_2i_m}(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{i_mi_1}(\lambda), & f_{i_mi_2}(\lambda), & \ldots, & f_{i_mi_m}(\lambda)\end{matrix}\right| \tag{3}$$

не равен тождественно нулю. В таком случае можно разрешить относительно $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ уравнения (2). Запишем это решение в виде

$$x_{i_\nu}+\sum_{j\neq i_1,i_2,\ldots,i_m} z_{i_\nu j}(\lambda)x_j=z_{i_\nu 0}(\lambda)\qquad(\nu=1,2,\ldots,m). \tag{4}$$

Здесь $z_{i\nu j}$ и $z_{i\nu 0}$ суть дроби, знаменателем которых является определитель (3), а числители этих дробей получаются соответственно заменой в указанном определителе надлежащих столбцов столбцами $f_{ij}(\lambda)$ или $\varphi_i(\lambda)$.

Выражение (4) имеет смысл для всех значений λ, в которых (3) не обращается в нуль. Следовательно, по лемме 1 выражение (4) теряет смысл не более чем для конечного числа значений λ. О таких значениях λ естественно говорить, что это значения с особенностями по отношению к совокупности неизвестных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$. Число таких особых значений не более чем конечно.

Функции $z_{i\nu j}(\lambda)$ и $z_{i\nu 0}(\lambda)$ определены для всех неособых значений λ. На основании леммы 1 каждая из этих функций имеет не более конечного числа нулей, если она не равна тождественно нулю. Таким образом, мы получили еще одну лемму.

Лемма 2. *Для любого набора индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ из совокупности $1, 2, \ldots, n$, для которых определитель (3) не равен тождественно нулю, имеется не более конечного числа особых значений λ и не более конечного числа значений λ, в которых обращается в нуль хотя бы одна из функций $z_{i\nu j}(\lambda)$, $z_{i\nu \rho}(\lambda)$, не равная тождественно нулю.*

Для решения задачи (1), (2) придется сначала решить ее при значении $\lambda = \lambda_1$. Очевидно, что это решение можно найти обычными методами линейного программирования. Для определенности будем предполагать, что мы пользуемся симплексным и двойственным симплексным методами. При $\lambda = \lambda_1$ возможны три случая: а) существует конечный максимум функционала; б) нет возможных планов; в) максимум функционала бесконечен.

Рассмотрим в отдельности каждый из указанных случаев.

а) Случай существования конечного максимума функционала. Для упрощения записи предположим, что этот максимум доставляется опорным планом, в котором основными неизвестными являются $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Решим уравнения (2) относительно этих неизвестных и подставим их значения в (1). Находим

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} z_{ij}(\lambda) x_j = z_{i0}(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

$$C(\lambda) + \sum_{j=m+1}^{n} z_{0j}(\lambda) x_j = z_{00}(\lambda), \tag{6}$$

где $z_{ij}(\lambda)$, $z_{i0}(\lambda)$, $z_{0j}(\lambda)$ — определенные функции λ, не зависящие от x. При $\lambda = \lambda_1$ выполняются условия возможности плана и его оптимальности:

$$z_{i0}(\lambda_1) \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

$$z_{0j}(\lambda_1) \geqslant 0 \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n). \tag{8}$$

Заменим в (7) и (8) λ_1 на λ. При некоторых значениях λ будут выполняться все соотношения, а при других значениях некоторые из соотношений выполняться не будут. Из непрерывности естественно ожидать существование правой окрестности точки λ_1, для которой выполняются условия (7) и (8).

Итак, поставим вопрос, для каких значений выполняются соотношения (7) и (8), т. е. для каких значений λ выполняются условия

$$z_{i0}(\lambda) \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7'}$$

$$z_{0j}(\lambda) \geqslant 0 \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n). \tag{8'}$$

Будем искать такое λ^1, чтобы для всех $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^1]$ выполнялись условия (7') и (8') или, что то же самое, чтобы для всех $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^1]$ планы

$$x_i(\lambda) = z_{i0}(\lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad x_i = 0 \quad (i = m+1, \ldots, n)$$

являлись оптимальными, а для значений λ из правой окрестности λ^1 планы не являлись оптимальными. Что касается $\lambda = \lambda^1$, то, как увидим ниже, при $\lambda = \lambda^1$ этот план тоже является оптимальным, если все функции $z_{i0}(\lambda)$ и $z_{0j}(\lambda)$ при $\lambda = \lambda^1$ определены.

Причинами того, что для $\lambda > \lambda^1$, но близких к λ^1, эти планы не являются оптимальными, могут быть:

какое-либо из выражений (7') или (8'), положительное при $\lambda < \lambda^1$, становится отрицательным для $\lambda > \lambda^1$, но близким к λ^1 (λ^1 является корнем нечетной кратности указанного выражения);

при $\lambda = \lambda^1$, по крайней мере, хотя бы одна из функций $z_{i0}(\lambda)$ или $z_{0j}(\lambda)$ не определена. Это является следствием того, что определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в уравнениях (2), при $\lambda = \lambda^1$ обращается в нуль. Заметим, что при этом возможны два случая:

1) все или некоторые из функций $z_{i0}(\lambda)$ и $z_{ij}(\lambda)$ при $\lambda \to \lambda^1$ стремятся к бесконечности (λ^1 является полюсом указанных функций);

2) все упомянутые функции имеют конечные пределы в точке λ^1, так что если доопределить в точке λ^1 эти функции надлежащим образом, то они станут непрерывными в этой точке.

Практически второй из указанных случаев будет, по-видимому, очень редким. В связи с этим, если при $\lambda = \lambda^1$ упомянутый выше определитель обращается в нуль, то мы будем оперировать с этой точкой как с точкой, в которой нарушаются условия (7') или (8'). Легко видеть из последующего изложения, что такой способ обращения с этой точкой к недоразумениям не приведет.

Таким образом, для отыскания λ^1 приходится находить нули нечетной кратности функций $z_{i0}(\lambda)$ и $z_{0j}(\lambda)$ и нули определителя, содержащиеся в промежутке $[\lambda_1, \lambda_2]$, и среди них выбирать наименьший. При этом если наименьшим из них является какой-либо нуль функций $z_{i0}(\lambda)$, $z_{0j}(\lambda)$, то базис, образованный неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_m$, является оптимальным для всех $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^1]$, включая и λ^1, а если наименьшим является нуль определителя, то базис дает оптимальный план для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^1]$, а для $\lambda = \lambda^1$ план может не иметь смысла.

Предположим, что λ^1 нами найдено. В дальнейшем мы будем говорить, что имеем дело с невырожденным случаем, если λ^1 является нулем нечетной кратности только для одной из вышеупомянутых функций или только нулем определителя. В противном случае будем говорить, что мы имеем дело со случаем вырождения. Для упрощения выкладок ограничимся изложением только невырожденного случая.

Возможны три ситуации, в которых λ^1 является соответственно:

1) нулем нечетной кратности для $z_{i_1 0}(\lambda)$ $(1 \leqslant i_1 \leqslant m)$;

2) нулем нечетной кратности функций $z_{0j_1}(\lambda)$ $(m+1 \leqslant j_1 \leqslant n)$;

3) нулем определителя, составленного из коэффициентов при основных неизвестных.

В первой ситуации для $\lambda > \lambda^1$, близких к λ^1, x_{i_1} становится отрицательным в имеющемся базисе, хотя условия оптимальности соблюдаются. Следует попытаться вывести x_{i_1} из базиса, используя двойственный симплексный метод. Как известно [1], чтобы определить, какое из неизвестных следует ввести в базис, не нарушая выполнения условий оптимальности, нужно найти

$$\min\left\{\frac{z_{0j}(\lambda^1)}{-z_{i_1 j}(\lambda^1)}\right\} \quad \text{по} \quad j,\ z_{i_1 j}(\lambda^1) < 0. \tag{9}$$

Если имеются такие j, для которых $z_{i_1 j}(\lambda^1) < 0$ и минимум в (9) достигается при $j = j_1$, то в число основных неизвестных следует ввести x_{j_1}. Тем самым найдем план, который тоже оптимален для $\lambda = \lambda^1$. По отношению к ранее найденному плану он имеет то преимущество, что обычно при том же базисе получаются оптимальные планы для $\lambda > \lambda^1$, близких к λ^1. После этого следует повторять действия, аналогичные предыдущему (для $\lambda = \lambda^1$).

Если нет таких j, для которых $z_{i_1 j}(\lambda^1) < 0$, то непосредственное применение двойственного симплексного метода для $\lambda = \lambda^1$ невозможно. Как же обстоит дело с планом для $\lambda > \lambda^1$, близких к λ^1?

Если все $z_{i_1 j}(\lambda)$, не равные тождественно нулю, положительны при $\lambda = \lambda^1$, то ясно, что в окрестности λ^1 нельзя вывести x_{i_1} из базиса, т. е. в этой окрестности нет возможных планов (в двойственной задаче не существует конечный минимум). Сложнее обстоит дело, когда среди $z_{i_1 j}(\lambda^1)$ нет отрицательных, но некоторые из функций, не равные тождественно нулю, обращаются в нуль при $\lambda = \lambda^1$. Тогда, если в правой окрестности точки λ^1 ни одно из $z_{i_1 j}(\lambda)$ не становится отрицательным, то в окрестности нет возможных планов, а если имеются отрицательные $z_{ij}(\lambda)$, то в этой окрестности имеются возможные планы. В зависимости от быстроты изменения функций $z_{i_1 j_1}(\lambda)$ (j_1 — номер, при котором достигается минимум выражения (9) при замене λ^1 на $\lambda > \lambda^1$, достаточно близких к λ^1) и $z_{i_1 0}(\lambda)$ в правой окрестности λ^1 могут появиться случаи, в которых при $\lambda \to \lambda^1 + 0$ максимум функционала имеет конечный или бесконечный пределы. Значения основных неизвестных в оптимальных планах могут также иметь конечные или бесконечные пределы.

Пусть, например, для $1^1/_2 \leqslant \lambda < 2$ оптимальный план характеризуется уравнениями

$$x_1 + 0 \cdot x_3 + 2\lambda x_4 + (4 - \lambda^2) x_5 = 2 - \lambda,$$
$$x_2 + 2\lambda x_3 - \lambda x_4 - 3x_5 = 3 - \lambda,$$
$$C + (3 - \sqrt{\lambda}) x_3 + 2x_4 - (3 - 2\lambda) x_5 = (2 - \lambda)\lambda^2 - (3 - \lambda) e^{\lambda}.$$

Для $\lambda > 2$, очевидно, этот план не является возможным. Здесь $\lambda^1 = 2$, x_1 желательно вывести из базиса. Однако, коэффициенты при неосновных неизвестных в выражении для x_1 неотрицательны при $\lambda = 2$. Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и решим задачу для $\lambda = 2 + \varepsilon$. Коэффициенты в строках, соответствующих x_1 и x_2 при $x_5 < 0$, а коэффициенты при неосновных неизвестных в строке C положительны. Для $\lambda = 2 + \varepsilon$ получаем оптимальный план в виде

$$x_2 = 1 - \varepsilon + 3 / (4 + \varepsilon), \quad x_5 = 1 / (4 + \varepsilon), \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

причем $C = -\varepsilon(2 + \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon) e^{2+\varepsilon} + (1 + 2\varepsilon) / (4 + \varepsilon)$.

Устремив ε к нулю, получаем план для $\lambda = 2 + 0$

$$x_5 = 1/4, \quad x_2 = 13/4, \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

тоже оптимальный, с конечным значением функционала.

Если в указанном примере заменить коэффициент при x_5 в первой строке на $(2 - \lambda)^3 (2 + \lambda)$, то для $\lambda = 2 + \varepsilon$ получается оптимальный план

$$x_2 = 1 - \varepsilon + 3 / \varepsilon^2 (2 + \varepsilon), \quad x_5 = 1 / \varepsilon^2 (2 + \varepsilon), \quad x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

причем $C = -\varepsilon(2 + \varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon) e^{2+\varepsilon} + (1 + 2\varepsilon) / \varepsilon^2 (2 + \varepsilon)$.

В этом плане значения неизвестных и функционала неограниченно возрастают при $\lambda \to \lambda^1 + 0$. Если в том же примере заменить коэффициент при x_5 в строке C нулем, то функционал в оптимальном плане стремится к конечному пределу при $\lambda \to 2 + 0$, хотя неизвестные x_2 и x_5 неограниченно возрастают.

Как же поступить в случае невозможности непосредственного вывода x_{i_1} из базиса при $\lambda = \lambda^1$? Нам кажется, наиболее целесообразным прибегнуть к малому сдвигу, т. е. рассмотрению вместо значения λ^1 значения $\lambda^1 + \varepsilon$. При этом придется ввести искусственное неизвестное $\eta(\lambda^1 + \varepsilon)$ и решить задачу максимизации выражения

$$-\eta + C(\lambda^1 + \varepsilon)$$

при условиях

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} z_{ij}(\lambda^1 + \varepsilon)x_j = z_{i0}(\lambda^1 + \varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq i_1),$$

$$\eta - \sum_{j=m+1}^{n} z_{i_1 j}(\lambda^1 + \varepsilon)x_j - x_{i_1} = -z_{i_1 0}(\lambda^1 + \varepsilon), \qquad x_j \geqslant 0,$$

$$(j = 1, \ldots, n) \qquad \eta \geqslant 0.$$

Здесь имеется базисный план, но искусственное неизвестное η входит в базис. Решая задачу, мы придем к одной из следующих ситуаций:

найден оптимальный план, причем η не входит в число основных неизвестных. Мы пришли к случаю а), где роль λ_1 играет $\lambda^1 + \varepsilon$;

найден конечный максимум, но η входит в число основных неизвестных. Это означает, что нет возможных планов для $\lambda = \lambda^1 + \varepsilon$. Мы пришли к случаю б), где роль λ_1 играет $\lambda^1 + \varepsilon$;

отсутствует конечный максимум. Ситуация аналогична случаю в), но роль λ_1 играет $\lambda^1 + \varepsilon$*.

Рассмотрим теперь вторую ситуацию. Пусть при $\lambda > \lambda^1$, близких к λ^1, нарушается условие оптимальности плана (8′) для $j = j_1$ $(m + 1 \leqslant j_1 \leqslant n)$, если основными неизвестными считать $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Следует попытаться ввести в число основных неизвестных x_{j_1}, используя симплексный метод. Чтобы определить, какое из неизвестных следует вывести из базиса, не нарушая возможности плана, следует найти

$$\min \{z_{i0}(\lambda^1) / z_{ij_1}(\lambda^1)\} \text{ по } i, z_{ij_1}(\lambda^1) > 0.$$

Если такие i имеются, то соответствующим изменением базиса найдем новый план, который тоже оптимален для $\lambda = \lambda^1$. В этом случае мы возвращаемся к начальной ситуации с заменой λ_1 на λ^1. Если таких i нет, то непосредственный ввод $x_{j_1}(\lambda^1)$ в базис невозможен. При этом, если все $z_{ij_1}(\lambda^1)$, не равные тождественно нулю, отрицательны, то в правой окрестности λ^1 нет конечных максимумов функционала. Если некоторые из таких $z_{ij_1}(\lambda)$ обращаются в нуль при $\lambda = \lambda^1$, то важно их поведение в правой окрестности точки λ^1. В случае, если некоторые из $z_{ij_1}(\lambda)$ становятся отрицательными в этой окрестности, то имеются конечные максимумы функционала, в противном случае их нет. В этом случае прибегаем к сдвигу, т. е. замене λ^1 на $\lambda^1 + \varepsilon$. Ясно что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ план

$$x_i = z_{i0}(\lambda^1 + \varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad x_i = 0$$
$$(i = m + 1, m + 2, \ldots, n)$$

является возможным для $\lambda = \lambda^1 + \varepsilon$. Применяя обычную симплексную процедуру, мы придем к одному из следующих двух случаев:

* При желании можно найти решение параметрической задачи и для промежутка $(\lambda^1, \lambda^1 + \varepsilon)$, так как способ позволяет передвигаться не только слева направо, но и справа налево, т. е. уменьшая значения λ.

найден план, доставляющий максимум при $\lambda = \lambda^1 + \varepsilon$. Тогда повторяем при $\lambda = \lambda^1 + \varepsilon$ те же действия, которые мы производили для $\lambda = \lambda_1$;

нет конечного максимума при $\lambda = \lambda^1 + \varepsilon$. Положение аналогично случаю в) и мы его рассматриваем ниже для $\lambda = \lambda_1$.

В случае, когда λ^1 является нулем определителя, составленного из коэффициентов при основных неизвестных, приходится начинать с самого начала решение задачи о максимизации функционала при $\lambda = \lambda^1$. В результате приходим к одному из трех указанных выше случаев.

б) Случай, когда для $\lambda = \lambda_1$ нет возможных планов. Отсутствие возможных планов обнаруживается обычно с помощью искусственного базиса. При этом базисе удовлетворяются условия возможности и оптимальности плана, но в базисе содержатся искусственные неизвестные. Нам нужно найти такое $\lambda^1 \in [\lambda_1, \lambda_2]$ (если оно имеется), что для $\lambda < \lambda^1$ возможных планов нет, а для $\lambda = \lambda^1$ планы имеются.

Пусть отсутствие возможных планов обнаружено при помощи базиса $x_1, x_2, \ldots, x_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_m$, где $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_m$ — искусственные неизвестные, и целевой функции $C = \varepsilon_{k+1} + \cdots + \varepsilon_m$ (минимизируемой).

При этом

$$x_i(\lambda_1) = z_{i0}(\lambda_1) \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad \varepsilon_i(\lambda_1) = z_{i0}(\lambda_1) \quad (i = k+1, \ldots, m),$$
$$z_{i0}(\lambda_1) > 0, \quad z_{0j}(\lambda_1) \geqslant 0, \quad z_{00}(\lambda_1) > 0.$$

Решив неравенства

$$z_{i0}(\lambda) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad z_{0j}(\lambda) \geqslant 0 \quad (j = k+1, \ldots, n),$$

найдем наибольшее $\bar{\lambda}$ такое, что для $\lambda \in [\lambda_1, \bar{\lambda}]$ не нарушаются последние неравенства, а в правой окрестности $\bar{\lambda}$ нарушается хотя бы одно из них. Поступая аналогично предыдущему, мы придем к ситуациям:

для $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$, близких к $\bar{\lambda}$, найден оптимальный план первоначальной задачи. Мы пришли к случаю а), рассмотренному выше;

для $\lambda = \bar{\lambda}$ не существует возможных планов. Эта ситуация такая же, как и вначале для $\lambda = \lambda_1$. Повторяем потому те же действия;

для $\lambda = \bar{\lambda}$ нет конечного максимума. Этот случай выше назван случаем в) и мы его рассмотрим для $\lambda = \lambda_1$.

в) Случай отсутствия конечного максимума для $\lambda = \lambda_1$. В этом случае нами найден базис, при котором

$$z_{i0}(\lambda_1) > 0, \quad z_{0j_1}(\lambda_1) < 0, \quad z_{ij_1}(\lambda_1) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

для всех i.

Решаем неравенства

$$z_{ij_1}(\lambda) \leqslant 0, \quad z_{i0}(\lambda) \geqslant 0, \quad z_{0j_1}(\lambda) \leqslant 0$$

и определяем $\bar{\lambda}$ так, что для $\lambda \in [\lambda, \bar{\lambda}]$ соблюдаются соотношения, указанные выше, а для $\lambda > \bar{\lambda}$, но близких к $\bar{\lambda}$ нарушается хотя бы одно из них. Мы будем предполагать, что нарушается только одно из условий.

Если для $i = i_1$ произошло нарушение соотношения $z_{ij_1}(\lambda) \leqslant 0$ при $\lambda > \bar{\lambda}$, то мы должны ввести в базис x_{j_1}. Однако для этой цели придется использовать сдвиг — перейти к $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$.

Если произошло нарушение условия для $z_{i_10}(\lambda)$, то следует, используя искусственный базис и сдвиг, искать новый план. При этом для точки $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$ мы можем прийти к одному из случаев а), б) или в), описанных выше.

Если при $\lambda > \bar{\lambda}$ нарушается условие $z_{0j_1}(\lambda) \leqslant 0$, то имеется возможный план и следует для $\lambda = \bar{\lambda}$ проверить, оптимален ли имеющийся план.

Иначе говоря, используя имеющийся план, решать задачу максимизации. Таким образом, мы оказываемся в ситуации, аналогичной начальной (поиск оптимального плана для фиксированного значения λ).

Для каждого базиса функции $z_{i0}(\lambda)$ и $z_{0j}(\lambda)$ вида (7′) и (8′), на основании леммы 1, имеют не более конечного числа нулей. Определитель, составленный из коэффициентов при основных неизвестных, по лемме 1 также имеет не более конечного числа нулей, т. е. количество особых зна-

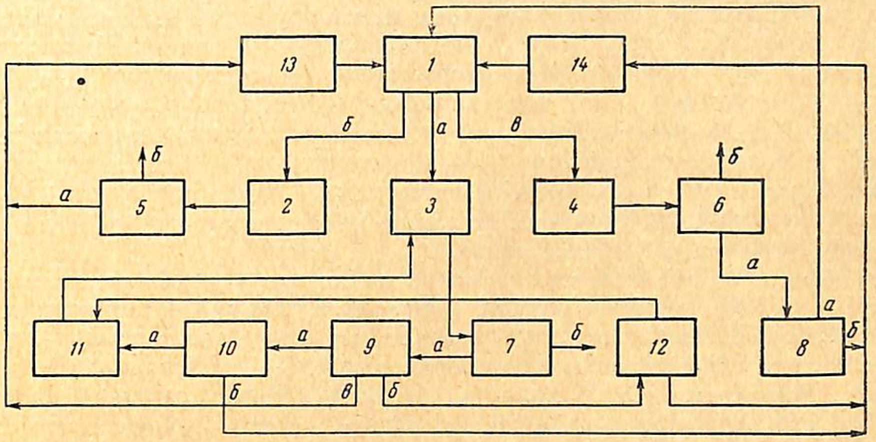

Рис. 1. Укрупненная блок-схема хода вычислительного процесса:

1 — Решение задачи линейного программирования при $\lambda = \lambda^{(k)} (\lambda^{(0)} = \lambda_1)$. Возможные исходы: *а* — имеется конечный максимум; *б* — нет возможных планов; *в* — функционал не ограничен сверху. *2* — Нахождение $\lambda^{(k+1)}$ минимального значения λ, для которого существует возможный план. *3* — Нахождение $\lambda^{(k+1)}$, для которого базис оптимален. *4* — Нахождение критического значения $\lambda^{(k+1)}$ по формулам (10). *5* — Проверка выполнения условия $\lambda^{(k+1)} \leqslant \lambda_2$. Возможные исходы: *а* — соотношение выполняется; *б* — соотношение не выполняется. Решение закончено. *6* — Проверка выполнения условия $\lambda^{(k+1)} \leqslant \lambda_2$. Возможные исходы: *а* — соотношение выполняется; *б* — соотношение не выполняется. Решение закончено. *7* — Проверка выполнения условия $\lambda^{(k+1)} \leqslant \lambda_2$. Возможные исходы: *а* — соотношение выполняется; *б* — соотношение не выполняется. Решение закончено. *8* — Проверка причины критичности $\bar{\lambda}$. Возможные исходы: *а* — $Z_{0j_1}(\bar{\lambda}) = 0$; *б* — $Z_{ij_1}(\bar{\lambda}) = 0$ или $Z_{i_10}(\bar{\lambda}) = 0$. *9* — Причины неоптимальности базиса при $\lambda > \lambda^{(k+1)}$. Возможные исходы: *а* — $x_{i_1}(\lambda^{(k+1)}) = 0$; *б* — $Z_{0j_1}\lambda^{(k+1)}) = 0$; *в*) $\Delta(\lambda^{(k+1)}) = 0$. *10* — x_{i_1} следует вывести из базиса. Ищем вектор, подлежащий введению в базис. Возможные исходы: *а* — вектор находится; *б* — вектор не находится. *11* — Замена $\lambda^{(k)}$ на $\lambda^{(k+1)}$. *12* — x_{j_1} следует ввести в базис. Ищем вектор, подлежащий выводу из базиса. Возможные исходы: *а* — вектор найден; *б* — вектор не находится. *13* — Замена $\lambda^{(k)}$ на $\lambda^{(k+1)}$. *14* — Замена $\lambda^{(k)}$ на $\lambda^{(k+1)} + \varepsilon$

чений λ конечно. В связи с этим функции $z_{i0}(\lambda)$ и $z_{0j}(\lambda)$ могут быть неотрицательными только на конечном числе промежутков. Это значит, что каждый базис может поставлять оптимальное решение только на конечном числе промежутков. Так как число базисов конечно, то мы тем самым доказали **теорему:** *предложенная процедура обеспечивает решение задачи за конечное число шагов.*

Сделаем несколько замечаний.

1. В практических задачах часто выдвигается требование ограниченности неизвестных и сверху. В таких случаях не будут появляться неограниченные значения функционала.

2. Процедура может быть использована и для случая, когда λ в (1), (2) рассматривается не как параметр, а как неизвестное, значение которого также нужно выбирать. В этом случае задача относительно всей совокупности неизвестных не является линейной, а в ряде случаев не является даже задачей выпуклого программирования. Применяя изложенный способ, мы промежуток $[\lambda_1, \lambda_2]$ разобьем на конечное число частич-

ных промежутков, в каждом из которых найдено выражение максимума функционала, если λ рассматривать как параметр, причем это выражение одинаковое для всех значений λ в частичном промежутке. Остается только на каждом из отрезков найти наибольшее значение упомянутого максимума функционала и среди этих наибольших значений на отдельных отрезках выбрать наибольшее.

3. При нахождении критических значений λ приходится сопоставлять наименьшие в заданном промежутке нули некоторой совокупности функций. Однако, точное определение всех нулей функций и даже наименьших нулей не требуется. Достаточно определить небольшой промежуток, содержащий наименьший (из содержащихся в промежутке $[\lambda_1\lambda_2]$, из нулей одной функции, а для следующей проверять только, не лежит ли ее наименьший нуль левее наименьшего нуля первой функции, и если это не так, то даже приближенно этот нуль определять не нужно. Аналогичным образом поступаем и с остальными функциями. Только после такой грубой селекции функций мы уточняем истинное положение нужного нуля и какой функции этот нуль принадлежит.

Наконец, заметим еще, что несмотря на то, что в тексте рассматривался только невырожденный случай, доказанная теорема о конечности вычислительной процедуры остается верной и для вырожденного случая, если внести соответствующую поправку в ней. Действительно, пусть, например, оказалось, что λ^1 является нулем нечетной кратности функции $z_{i_10}(\lambda)$ и $z_{i_20}(\lambda)$. Тогда вывод неизвестного x_{i_1} или неизвестного x_{i_2} из базиса не даст нужных результатов. В этом случае нужно применить малый сдвиг по λ, т. е. принять $\lambda = \lambda^1 + \varepsilon$ и искать оптимальный план для этого значения λ. Аналогичный сдвиг нужен и при других случаях появления вырождения.

На стр. 449 приводится укрупненная блок-схема примерного хода вычислительной процедуры. Некоторые детали мы опускаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., Изд-во «Советское радио», 1961.
2. S.-L. Gass. Linear programming. N. Y. M. C. Graw-Hill, 1958.
3. В. К. Карабегов. Об одной параметрической задаче линейного программирования. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 3.
4. Thomas Saaty. Coefficient perturbation of a constrained extremum. Oper. Res., 1959, v. 7, No. 3.

Поступила в редакцию
7 X 1964