

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. Радио», 1961.
2. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963.
3. С. Гас. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961.
4. Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб. статей. Под ред. Г. У. Куна и А. В. Таккера. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. К. Берг. Теория графов и ее применение. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Р. К. Прим. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения. Кибернетический сб., 1961, № 2.

Поступила в редакцию
42 IV 1965

ОПТИМАЛЬНОЕ ЗАКРЕПЛЕНИЕ УГОЛЬНЫХ ШАХТ ЗА ОБОГАТИТЕЛЬНЫМИ ФАБРИКАМИ

Г. П. КУЛИШ, Л. Ф. ЛУЧИНА, В. И. ХИЖНЯК

(Донецк)

Значительная часть углей, добываемых на шахтах Донбасса, — сырье для получения кокса. Выжиг кокса обычно производится из смеси углей нескольких марок. Для обеспечения необходимого качества кокса эта смесь должна обладать определенными качественными характеристиками: содержанием золы и серы, выходом летучих веществ и толщиной пластического слоя. Поскольку ресурсы природно-чистых углей с малой зольностью и небольшим содержанием серы ограничены, приходится в основном использовать для коксования угли с повышенной зольностью. В связи с этим возникает необходимость предварительного механического обогащения высокозольных углей на обогатительных фабриках, к числу которых относятся и обогатительные центры коксохимзаводов. Обычно в состав шихты, из которой получают кокс, вводятся угли следующих марок: жирные, газовые, коксовые, отошенно-спекающиеся и иногда тощие. Эти угли не взаимозаменяемы, обладают различными свойствами, и даже угли одной и той же марки, но добываемые на разных шахтах, значительно отличаются друг от друга по содержанию золы, серы, летучих веществ и пластометрическим данным. Все шахты, поставляющие уголь на коксование, разбиваются на группы по маркам добываемых ими углей. На индивидуальные, групповые и центральные обогатительные фабрики поступают в основном угли одной марки, иногда двух, тогда как на углеобогатительные цехи коксохимзаводов поступает смесь углей нескольких марок.

Задача оптимального распределения коксующихся углей, добываемых на шахтах Донбасса, между обогатительными фабриками и углеобогатительными цехами коксохимзаводов состоит в следующем: необходимо осуществить загрузку всех фабрик требующимся по плану количеством угля определенного марочного состава и, поскольку выход летучих веществ и толщина пластического слоя определяются марочным составом угля, необходимо обеспечить запланированные качественные показатели по содержанию золы и серы в смеси углей, поступающих на каждую обогатительную фабрику. Так как на затраты по транспортировке угля от шахт к обогатительным фабрикам приходится значительная доля всех расходов по обогащению, цель работы состоит в выборе такого варианта завоза углей, при котором транспортные расходы оказались бы наименьшими.

Прежде чем записать математическую постановку этой задачи, введем обозначения: i — номер шахты; j — номер обогатительной фабрики; k — номер марки угля; i_k — номер 1-й шахты из группы шахт, поставляющих уголь k -й марки; P_{ik} — количество угля k -й марки, выдаваемое i -й шахтой на коксование; Q_{jk} — потребность j -й фабрики в угле k -й марки; a_{ik} — зольность угля i -й шахты; s_{ik} — содержание серы в угле i -й шахты; A_j — плановая зольность смеси углей по j -й фабрике; S_j — плановое содержание серы в смеси углей по j -й фабрике; c_{ij} — расстояние по железной дороге от i -й шахты до j -й фабрики; x_{ijk} — величина поставки угля k -й марки с i -й шахты на j -ю фабрику.

С учетом введенных обозначений задача в общем виде записывается так: минимизировать функцию

$$L = \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

при следующих ограничениях, наложенных на неизвестные x_{ijk} :

$$\sum_{j=1}^m x_{ijk} \leq P_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (2)$$

$$\sum_{i=i_h}^{i_{h+1}-1} x_{ijk} = Q_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n a_{ik} x_{ijk} &\leq A_j \\ \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n s_{ik} x_{ijk} &\leq S_j \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (5)$$

где n — общее количество шахт; m — общее количество фабрик; l — количество марок угля.

В такой постановке задача по оптимальному закреплению шахт за обогащательными фабриками является общей задачей линейного программирования. При небольшом числе фабрик и шахт эту задачу можно решать симплекс-методом, поскольку симплекс-таблица в этом случае будет невелика.

Но задача по распределению углей между обогащательными фабриками была поставлена для случая, когда $n = 174$, $m = 33$ и $l = 5$. Значит, математическая постановка этой задачи содержит 379 уравнений и неравенств с 2718 неизвестными. Ясно, что в этом случае применение симплекс-метода уже неэффективно. Пришлось обратиться к обобщенному методу градиентного спуска в пространстве потенциалов, который разработан в Институте кибернетики АН УССР и позволяет решать на ЭВМ распределительные задачи большой размерности.

В Институте кибернетики АН УССР была составлена программа для решения по этому методу задачи по оптимальному распределению заказов на различные виды проката между прокатными станами с учетом ограничения по горячему времени станов. Задача же по оптимальному прикреплению шахт к обогащательным фабрикам в отличие от указанной выше содержит не одно, а два, иногда и больше ограничений, отличающих ее от чисто транспортной. Поэтому пришлось составить программу для решения на ЭВМ распределительных задач с большим числом ограничений. Эта работа была выполнена в Отделении экономики промышленности Донецкого совнархоза. Перейдем к изложению сущности обобщенного метода градиентного спуска в пространстве потенциалов. Из теории линейного программирования известно, что задаче, определенной условиями (1) — (5), можно поставить в соответствие двойственную. Запишем ее.

Максимизировать функцию

$$L = \sum_j \sum_k Q_{jk} \lambda_{jk} - \sum_i P_{ik} a_{ik} - \sum_j A_j Q_j - \sum_j S_j \xi_j \quad (6)$$

при условиях:

$$\lambda_{jk} - u_{ik} - a_{ik} \theta_j - s_{ik} \xi_j \leq c_{ij}, \quad (7)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0, \quad u_{ik} \geq 0, \quad \theta_j \geq 0, \quad \xi_j \geq 0, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

где λ_{jk} , u_{ik} , θ_j , ξ_j — новые неизвестные двойственной задачи, которые называются разрешающими множителями или потенциалами. Ясно, что неравенство (7) будет выполняться при

$$\lambda_{jk} = \min_i (c_{ij} + u_{ik} + a_{ik} \theta_j + s_{ik} \xi_j). \quad (9)$$

В этом случае линейная форма (6) будет функцией от u_{ik} , θ_j и ξ_j . Для ее максимизации и применяем метод градиентного спуска. Алгоритм его в общих чертах состоит в следующем.

Начальные значения потенциалов выбираем равными нулю, т. е.

$$u_{ik}^0 = 0, \quad \theta_j^0 = 0, \quad \xi_j^0 = 0.$$

Тогда из формулы (9) видно, что первое распределение мы производим по наименьшим расстояниям. Для каждого фиксированного j находим i , для которого равенство (9) выполнено, т. е. за каждой фабрикой закрепляем одну или несколько шахт, номера которых соответствуют минимальному λ_{jk} . Кроме того, выбираем определенным образом ε — окрестность каждого минимального λ_{jk} с тем, чтобы в загрузке j -й фабрики участвовали и те шахты, для которых λ_{jk} лежат в ε -окрестности минимального λ_{jk} . Потребность обогатительной фабрики в угле k -й марки удовлетворяем полностью поставками с шахт, набранных таким образом. Поступаем так до тех пор, пока не переберем все фабрики (т. е. все j). Получим первое распределение, т. е. определим величины $\bar{x}_{ijk}$.

Эти величины подставляем в выражения (2) и (4) и находим разности между правыми и левыми частями неравенств:

$$P_{ik} - \sum_{j=1}^m \bar{x}_{ijk} = \Delta P_{ik},$$

$$A_j - \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n a_{ik} \bar{x}_{ijk} = \Delta A_j,$$

$$S_j - \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n s_{ik} \bar{x}_{ijk} = \Delta S_j,$$

Затем определяем новые значения потенциалов:

$$u_i' = u_i^0 - h_1 \Delta P_{ik},$$

$$\theta_j' = \theta_j^0 - h_2 \Delta A_j,$$

$$\xi_j' = \xi_j^0 - h_3 \Delta S_j,$$

где h_1, h_2, h_3 — шаги изменения потенциалов, которые выбираются заранее и уменьшаются через определенное количество итераций.

Если значение потенциалов становится отрицательным, то такие потенциалы полагаем равными нулю.

Изменением потенциалов заканчивается одна итерация.

На второй итерации получаем новый план распределения с учетом новых значений потенциалов, полученных в конце первой итерации. По этой же методике производится распределение углей между обогатительными фабриками на всех последующих итерациях.

Итерационный процесс считается законченным после выполнения определенного числа итераций (в среднем около 600), которое зависит от скорости сходимости процесса.

По обобщенному методу градиентного спуска задача указанных размеров была решена на ЭВМ М-20 в течение 2,5 часа. Полученное в результате решения распределение коксующихся углей между обогатительными фабриками дает возможность снизить общий тоннокилометраж на 873 750 000 т/км. Пробег 1 т угля по железной дороге по сравнению с существующим снизился на 12,5 км.

Поступила в редакцию
8 VII 1965

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. Е. ЛАРЧЕНКО

(Москва)

Решение общей задачи линейного программирования

$$\tilde{x}P_1 + \dots + \tilde{x}_{n-m}P_{n-m} + \tilde{x}_{n-m+1}P_{n-m+1} + \dots + \tilde{x}_nP_n = P_0, \quad (1)$$

$$\tilde{X} \geq 0, \quad (2)$$

$$\text{с } \tilde{X} \rightarrow \min \quad (3)$$

связано с системой линейных уравнений

$$BX = P_0, \quad (4)$$

где B — базис оптимального плана; X — вектор-столбец, составленный из коэффициентов разложения вектора P_0 в базисе B .

Пусть в качестве базиса начального опорного плана принят единичный базис $(P_{n-m+1}, \dots, P_n)$. Тогда в итоговой симплексной таблице на месте матрицы $(P_{n-m+1}, \dots, P_n)$ получим матрицу B^{-1} . Числа в столбце матрицы B^{-1} , расположенном на месте вектора P_{n-m+i} ($i = 1, \dots, m$), показывают, насколько изменятся переменные оптимального плана, если ограничение, содержащее переменную x_{n-m+i} , ослабить на единицу. Показатель в индексной строке соответствующего столбца указывает, насколько изменится при этом величина функции цели.

Таким образом, мы располагаем средством, позволяющим оценивать влияние на переменные оптимального плана и на величину функции цели возможных колебаний в значениях свободных членов уравнений (1). Но нам не известно, как будут вести себя переменные оптимального плана в случае, когда меняются их коэффициенты, т. е. элементы матрицы B^* . Вопросу учета всех упомянутых влияний на переменные оптимального плана посвящена настоящая статья.

Для простоты обозначений, но без ограничения общности положим, что в базис оптимального плана вошли первые m векторов исходной системы, т. е.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу поправок к элементам B через R :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & \dots & r_{mm} \end{pmatrix},$$

а столбец поправок к элементам P_0 через R_0 : $R_0 = (r_{10}, \dots, r_{m0})^T$. Будем отыскивать поправки $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)^T$ к переменным оптимального плана $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_m)^T$, где $\tilde{x}_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Учитывая (4), получим

$$B\Delta X = R_0 - R\tilde{X} - R\Delta X.$$

Левые части уравнений (5) имеют ту же матрицу коэффициентов, что и уравнения (4). Вектор $\tilde{X}$ становится известным после решения задачи, а R и R_0 предполагаются заданными. Член $R\Delta X$ в нулевом приближении можно не учитывать. Тогда

$$\Delta X^{(0)} = B^{-1}P_0^{(0)}, \quad (6)$$

где $P_0^{(0)} = R_0 - R\tilde{X}$. Соответствующее изменение функционала равно

$$\Delta c^{(0)} = c\Delta X^{(0)}.$$

Если исходная задача решалась методом обратной матрицы, то $\Delta X^{(0)}$ и $\Delta c^{(0)}$ получают в последней симплексной таблице, используя непосредственно (6) и (7). При реализации обычного алгоритма метода последовательного улучшения плана для получения $\Delta X^{(0)}$ и $\Delta c^{(0)}$ нужно присоединить к исходной симплексной таблице дополнительный столбец P_0' с показателем «нуль» в индексной строке и проделать над ним те же действия, что и над всеми столбцами исходной матрицы. Зная $\Delta X^{(0)}$, при необходимости можно вычислить $R\Delta X^{(0)}$ и затем

$$P_0^{(1)} = R_0 - R\tilde{X} - R\Delta X^{(0)} = P_0^{(0)} - R\Delta X^{(0)}$$

Таким образом, получим более точно элементы столбца свободных членов в выражении (5) и, умножив этот столбец на B^{-1} , найдем $\Delta X^{(1)}$ и $\Delta c^{(1)}$. Поправки $\Delta X^{(1)}$ можно, в свою очередь, использовать для получения $\Delta X^{(2)}$ и т. д.

Перепишем (5) так:

$$\Delta X = -B^{-1}R\Delta X + B^{-1}(R_0 - R\tilde{X}). \quad (8)$$

* Ясно, что колебание (в пределах известной устойчивости оптимального плана) коэффициентов при переменных, получивших в оптимальном плане нулевое значение, не изменит окончательного решения.

Для сходимости итерационного процесса (8) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $-B^{-1}R$ были по модулю меньше единицы. Отсюда следует, что итерационный процесс (8) будет сходящимся, если хотя бы одна из норм матрицы $-B^{-1}R$ меньше единицы.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	B	c	P ₀	P ₁	P ₄	P ₆	P ₀ ⁽⁰⁾	P ₀ ⁽¹⁾	P ₀ ⁽²⁾	P ₀ ⁽³⁾	P ₀ ⁽⁰⁾	P ₀ ⁽¹⁾	P ₀ ⁽²⁾	P ₀ ⁽³⁾
1	P ₂	1	4	0,4	0,1	0	-1,6	-1,12	-1,264	-1,221	0,06	0,042	0,047	0,046
2	P ₃	-3	5	0,2	0,3	0	-0,8	-0,56	-0,632	-0,610	0,04	0,028	0,032	0,031
3	P ₆	0	11	1	-0,5	1	-4	-2,80	-3,160	-3,052	0	0	0	0
4			-11	-0,2	-0,8	0	0,8	0,56	0,632	0,610				

Для поправок $\Delta w = (\Delta w_1, \dots, \Delta w_m)^T$ к переменным $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m)^T$ задачи двойственной задаче (1)–(3), можно, используя $\tilde{w}B = c$, аналогично вывести соотношение $\Delta wB = -\tilde{w}R - \Delta wR$.

Последовательные приближения вычисляются по формуле

$$\Delta w^{(k)} = P_0^{(k)} B^{-1}, \quad (9)$$

где $P_0^{(k)} = -\tilde{w}R - \Delta w^{(k-1)}R$.

Выше приведена итоговая симплексная таблица (графы 1–7 таблицы), полученная при решении методом обратной матрицы следующей задачи*: минимизировать $x_2 - 3x_3 + 2x_5$ при условиях:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + 2\tilde{x}_5 &= 7, \\ -2\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 &= 12, \\ -4\tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 + 8\tilde{x}_5 + \tilde{x}_6 &= 10, \\ \tilde{x}_j &\geq 0 \text{ для всех } j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Решение этой задачи дает

$$B = (P_2 P_3 P_6) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0 \\ 1 & -0,5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Изменим первую координату векторов P_2 , P_3 и P_6 на $+0,5$, т. е.

$$R = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С точностью до третьего десятичного знака значения неизвестных, удовлетворяющих изменившимся условиям и приводящих к минимуму функции цели, следующие:

$$x_2 = 2,769, \quad x_3 = 4,384, \quad x_6 = 7,922.$$

Для определения ΔX были сделаны три итерации (см. графы 8–11 таблицы). На последней итерации получены следующие значения неизвестных:

$$x_2^{(3)} = 2,779, \quad x_3^{(3)} = 4,390, \quad x_6^{(3)} = 7,948,$$

которые, будучи подставлены в выражение для функции цели, изменяют ее величину на 0,610.

В графах 12–15 табл. 1 показано последовательное нахождение поправок Δw к переменным двойственной задачи. Переменные w , найденные с помощью поправок на третьей итерации, совпадают с точностью до трех знаков после запятой с истинным значением этих переменных:

$$w_1 = -0,154, \quad w_2 = -0,769, \quad w_3 = 0.$$

* Задача заимствована из книги С. Гасса «Линейное программирование», М., Физматгиз, 1964, стр. 85.

В случае необходимости итерационный процесс можно было бы продолжить и получить более близкое приближение к искомым величинам.

Заметим, что в случаях, подобных рассмотренному выше, когда меняются параметры лишь одного из ограничений, поправки ΔX можно получить значительно проще, используя взаимную пропорциональность столбцов $P_0^{(k+1)}$ и $P_0^{(k)}$; $\Delta X^{(k+1)}$ и $\Delta X^{(k)}$, т. е. $P_0^{(k+1)} = qP_0^{(k)}$; $\Delta X^{(k+1)} = q\Delta X^{(k)}$.

Имеются две возможности применения предлагаемой методики отыскания поправок:

1) когда более точные и надежные исходные данные стали доступны уже после того, как задача была решена.

2) когда необходимо оценить влияние неустраняемой погрешности исходных данных на точность определения искомым величин.

Первый случай встречается в практике довольно часто, причем иногда к моменту, когда поступает дополнительная информация об исходных данных, уже нет под руками материалов, относящихся к решению задачи (перфокарт, перфолент или других носителей информации, если она решалась вручную). Но если сохранилась матрица B^{-1} , то этого достаточно, чтобы вычислить ΔX , пользуясь непосредственно соотношением (6). Поэтому после решения любой задачи симплексным методом полезно выписывать не только столбец результатов $\tilde{X}$, но также и матрицу B^{-1} , тем более, что информация, заключенная в ней, может оказать помощь при экономико-математическом анализе решения.

Вторая возможность применения описанной методики представляется нам не менее важной. Нередки еще случаи, когда, имея весьма приближенные исходные данные с одной-двумя верными цифрами, вычисляют неизвестные с семью-восемью цифрами, создавая этим иллюзию, будто точность получения неизвестных зависит лишь от количества удержанных при вычислениях знаков. Между тем из теории вычислений с приближенными числами известно, что результат, вообще говоря, нельзя получить точнее, чем исходные данные.

Численно оценить влияние погрешностей исходных данных на переменные помогает предлагаемая методика. Если о коэффициентах при переменных известно лишь, что это числа округленные, то можно положить их ошибку равной $\pm 0,5$ единицы последнего знака. Тогда элемент Δx_i столбца ΔX примерно будет характеризовать предельную ошибку переменной $\tilde{x}_i$, вызванную округлением коэффициентов при переменных.

Уточненные значения переменных, найденные с применением методики, будут допустимыми, если

$$\Delta X \geq -\tilde{X}, \quad (10)$$

и оптимальными, если

$$(\tilde{w} + \Delta w)A_0 \leq c, \quad (11)$$

где A_0 — изменившаяся матрица условий задачи (1) — (3). Одновременное выполнение (10) и (11) является условием применимости методики. Для нашего примера выполнение условия (9) очевидно, а также

$$(\tilde{w} + \Delta w)A_0 = (-0,154; 1; -3; -0,769; -0,308; 0) \leq c = (0; 1; -3; 0; 2; 0).$$

Следовательно, план $\tilde{X} + \Delta X$ есть оптимальный план измененной задачи (1) — (3).

Поступила в редакцию
2 XII 1965

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ВНУТРИХОЗЯЙСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОРОСИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. А. КАРДАШ, В. Г. ПРЯЖИНСКАЯ
(Новосибирск)

Обычно планирование в сельском хозяйстве ведется в расчете на средненормальные для данного района погодные условия. Все отклонения от них, случающиеся особенно часто в зонах неустойчивого увлажнения, делают планово-экономические расчеты практически малоприменимыми.

Учет случайных факторов особенно существен в расчетах по орошаемому земледелию. В приведенной ниже модели, построенной на основе линейного программирования [1], предлагается использовать при оптимальном перспективном планирова-