

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНОГО КОМПЛЕКСА

В. И. ДАНИЛОВ-ДАНИЛЬЯН

(Москва)

В статье построена модель текущего оптимального планирования производственно-транспортного комплекса и на основе экономико-математического анализа модели предложен итеративный алгоритм расчетов, соответствующий общей концепции итеративных методов оптимального планирования, изложенной в [1]. С нашей точки зрения, данная модель вполне согласуется с общими представлениями, изложенными в [2].

Более простую модель производственно-транспортного комплекса изучал В. А. Волконский [3], о чем подробнее сказано в конце раздела 2 данной статьи. Необходимо отметить работу В. Г. Медницкого [4], где, в частности, предложен метод решения транспортной задачи, основанный на тех же исходных положениях, что и алгоритм в разделе 4 настоящей работы. Наш подход к исследованию проблемы оптимизации производственно-транспортного комплекса в тех или иных отношениях имеет сходство с исследованиями А. Л. Лурье [5], В. А. Маша [6], Е. П. Нестерова [7] и Ю. А. Олейника [8].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим систему предприятий, использующих общие сырьевые базы и поставляющих готовую продукцию общей сети потребителей. Возможности каждого из поставщиков сырья и возможности реализации продукции каждым из потребителей предполагаются известными. Соответственно для каждого поставщика сырья имеются линейные ограничения по максимальному допустимому вывозу каждого вида сырья, для каждого потребителя — по максимальному допустимому ввозу каждого вида продукции. Предполагается, что с точки зрения потребителей различные виды готовой продукции неважнозаменимы, так же как неважнозаменимы различные виды сырья с точки зрения его поставщиков.

Допускается обмен полуфабрикатами между предприятиями. Объем потребления сырья, производства продукции и взаимных поставок полуфабрикатов неизвестен и подлежит определению. Естественно, что для каждого предприятия должны выполняться балансовые ограничения (типа «производство» + «ввоз» $\geq$ «вывоз» + «потребление») по всем видам сырья, полуфабрикатов и готовой продукции.

Как обычно, планы предприятий должны удовлетворять некоторым внутренним ограничениям (возможно, нелинейным), прежде всего по мощности имеющегося оборудования. Поскольку объектом исследования являются связи внутри комплекса и его внешние связи, вопросы, связанные с построением моделей предприятий, не рассматриваются.

В качестве критерия оптимальности комплекса рассматривается максимизация прибыли. Прибыль вычисляется как разность между доходом

от сбыта готовой продукции и всевозможными затратами, которые удобно разделить на три группы: 1) затраты на приобретение сырья на сырьевых базах; 2) затраты на транспортировку сырья, полуфабрикатов и готовой продукции; 3) прочие затраты, которые характеризуются тем, что не подчиняются ограничениям для комплекса в целом и непосредственно не зависят от связей в системе, планируемых комплексом. Затраты на заработную плату — смотря по обстоятельствам — следует отнести либо к первой, либо к третьей группе. Цены, по которым предприятия комплекса закупают сырье и продают готовую продукцию, и зависимости транспортных затрат комплекса от объема и вида перевозок считаются заданными.

2. МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНОГО КОМПЛЕКСА

Введем необходимые обозначения.

L — множество номеров предприятий; M — множество номеров сырьевых баз; N — множество номеров потребителей готовой продукции.

Необходимо $L \cap M = L \cap N = M \cap N = \Lambda$, где Λ — пустое множество. Это требование относится лишь к способу нумерации предприятий, сырьевых баз и потребителей готовой продукции и вовсе не исключает возможности географического совмещения пунктов, где расположены предприятия, с пунктами, где расположены сырьевые базы или потребители готовой продукции (или этих последних друг с другом).

g, h — номер предприятия, сырьевой базы или потребителя готовой продукции ($g, h \in L \cup M \cup N$).

U — множество номеров видов сырья; V — множество номеров видов полуфабрикатов; W — множество номеров видов готовой продукции.

Допускается $U \cap V \neq \Lambda$, $V \cap W \neq \Lambda$ и $U \cap W \neq \Lambda$. Таким образом, для большей общности предполагается, что некоторые виды сырья, поступающие извне, могут также производиться и предприятиями комплекса; кроме того, некоторые виды готовой продукции вместе с тем могут использоваться в качестве полуфабрикатов для производства других видов готовой продукции; наконец, некоторые виды сырья без переработки могут использоваться как готовая продукция, — в этом случае предприятия выполняют лишь транзитные функции. Однако поскольку рассматриваемый комплекс включает только предприятия, прямые связи между сырьевыми базами и потребителями готовой продукции, возможные в этом случае, нас не интересуют.

j — номер вида продукции (т. е. вида сырья, полуфабриката или готовой продукции; $j \in U \cup V \cup W$);

J^h — множество номеров видов сырья, имеющегося на базе h (при $h \in M$, $J^h \subset U$); множество номеров видов продукции, отпускаемой с предприятия h (при $h \in L$, $J^h \subset U \cup V \cup W$);

J_h — множество номеров видов сырья и полуфабрикатов, используемых предприятием h (при $h \in L$, $J_h \subset U \cup V$); множество номеров видов готовой продукции, потребляемой в пункте h (при $h \in N$, $J_h \subset W$);

B_j^h — запас на плановый период сырья вида j на базе h (при $h \in M$, $j \in J^h$); потребность на плановый период в готовой продукции вида j в пункте потребления h (при $h \in N$, $j \in J_h$);

x^h — производственный план предприятия ($h \in L$; x^h — вектор размерности l^h).

Компоненты производственного плана удобно интерпретировать как интенсивности выполнения технологических операций, возможных на различном оборудовании, имеющемся на предприятии (ср. [9]). Не вдаваясь в подробности построения модели предприятия, для простоты и

определенности будем в дальнейшем придерживаться этой интерпретации.

a^h — множество допустимых производственных планов предприятия h ; в линейном случае $a^h = \{x^h | x^h \geq 0, \bar{a}^h x^h \leq T^h\}$, где $\bar{a}^h$ — некоторая матрица, T^h — l^h -мерный вектор;

$b_j^h(x^h)$ — выпуск (при $b_j^h(x^h) < 0$ — потребление) продукции вида j ($j \in J^h \cup J_h$) предприятием h при реализации плана x^h ; в линейном случае $b_j^h(x^h) = (\beta_j^h, x^h)$, где β^h — l^h -мерный вектор;

y_j^{gh} — объем поставок продукции вида j из пункта g в пункт h ($g \in L \cup M, h \in L \cup N, j \in J^g \cap J_h$);

$c^h(x^h)$ — затраты третьей группы предприятия h при реализации плана x^h ; в линейном случае $c^h(x^h) = (\gamma^h, x^h)$, где γ^h — l^h -мерный вектор;

$c_j^h(y)$ — доход от реализации количества y продукции вида j в пункте потребления h (при $h \in N, j \in J_h$); затраты на приобретение сырья вида j на базе h (при $h \in M, j \in J^h$).

$c_j^{gh}(y)$ — затраты предприятий комплекса на транспортировку продукции вида j в количестве y из пункта g в пункт h .

Наконец,

$$C_j^{gh}(y) = \begin{cases} -c_j^{gh}(y) - c_j^g(y), & \text{если } g \in M, h \in L; \\ -c_j^{gh}(y), & \text{если } g, h \in L; \\ -c_j^{gh}(y) + c_j^h(y), & \text{если } g \in L, h \in N; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В линейном случае $C_j^{gh}(y) = \Gamma_j^{gh} y_j^{gh}$, $c_j^{gh}(y) = \gamma_j^{gh} y$, $c_j^g(y) = \gamma_j^g y$.

Если значения индексов величины выходят за пределы множеств, указанных при ее определении, эта величина принимается равной нулю (например, если $j \notin J^g \cap J_h$, то $y_j^{gh} = 0$).

В этих обозначениях модель производственно-транспортного комплекса может быть записана в виде следующей задачи математического программирования:

$$x^h \in a^h, h \in L; \quad (1)$$

$$y_j^{gh} \geq 0, g \in L \cup M, h \in L \cup N, j \in J^g \cap J_h; \quad (2)$$

$$\sum_{h \in L} y_j^{gh} \leq B_j^g, g \in M, j \in J^g; \quad (3)$$

$$\sum_{g \in L} y_j^{gh} \leq B_j^h, h \in N, j \in J_h; \quad (4)$$

$$\sum_{g \in L \cup N} y_j^{hg} - b_j^h(x^h) - \sum_{g \in L \cup M} y_j^{gh} \leq 0, h \in L, j \in J^h \cup J_h; \quad (5)$$

$$\sum_{g \in L \cup M} \sum_{h \in L \cup N} \sum_{j \in J^g \cap J_h} C_j^{gh}(y_j^{gh}) - \sum_{h \in L} c^h(x^h) \rightarrow \max. \quad (6)$$

Подробное изучение локальных ограничений (1) на производственные возможности предприятий не входит в наши цели (см. [9]). Неравенства (3) отражают возможности сырьевых баз, неравенства (4) — возможности реализации готовой продукции. Неравенства (5) суть связующие балансовые ограничения по вывозу, производству (при $b_j^h(x^h) > 0$), потреблению (при $b_j^h(x^h) < 0$) и ввозу всех видов продук-

ции для каждого предприятия. Эти ограничения в свою очередь можно разделить на три группы: по использованию сырья (при $g \in M$), производству и использованию полуфабрикатов (при $g, h \in L$) и производству готовой продукции (при $g \in N$). Обозначим через X_j^h правую часть неравенства (5), взятую с обратным знаком:

$$X_j^h = - \sum_{g \in L \cup N} y_j^{hg} + b_j^h(x^h) + \sum_{g \in L \cup M} y_j^{gh};$$

ясно, что X_j^h — остаток продукции вида j на предприятии h , не пошедший в производство и не перевезенный другим предприятиям (при $j \in V$) или потребителям готовой продукции (при $j \in W$) в случае $X_j^h \geq 0$, и недостаток продукции вида j на предприятии h , не покрытый собственным производством или ввозом с сырьевых баз или других предприятий в случае $X_j^h < 0$.

Отметим, что если потребности предприятий в сырье зафиксировать (при $j \in U$ для всех h $b_j^h(x^h) = \text{const}$), то ограничения (3) совместно с ограничениями (5) по балансу использования сырья (при $g \in M$) образуют систему ограничений многопродуктовой транспортной задачи на сети «сырьевые базы — предприятия». Аналогично, если зафиксировать выпуск готовой продукции предприятиями (при $j \in W$ для всех h $b_j^h(x^h) = \text{const}$), то ограничения (4) совместно с ограничениями (5) по балансу выпуска готовой продукции (при $h \in N$) образуют систему ограничений многопродуктовой транспортной задачи на сети «предприятия — потребители готовой продукции». Наконец, фиксирование потребностей предприятий комплекса в полуфабрикатах и их возможностей по поставке полуфабрикатов (при $j \in V$ для всех h $b_j^h(x^h) = \text{const}$) превращает ограничения (5) при $g, h \in L$ в ограничения многопродуктовой транспортной задачи на симметричной сети «предприятия — предприятия».

В. А. Волконский [3] изучал модель производства и транспортировки продуктов нефтепереработки, эквивалентную в наших обозначениях (1), (2), (4), (5) при $j \in W$, $M = V = \Lambda$ и более простом критерии, и предложил итеративный алгоритм оптимизации модели. На каждой итерации этого алгоритма решается многопродуктовая транспортная задача по данным производственных планов предприятий, вычисленных на предыдущей итерации, и потенциалы пунктов, где расположены предприятия, используются (по терминологии, принятой в [1]) в качестве управляющих переменных при вычислении новых производственных планов. Ниже описан алгоритм решения задачи (1) — (6), каждая итерация которого существенно менее трудоемка, чем в алгоритме [3] (конечно, это еще не означает, что алгоритм в целом является менее трудоемким).

3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОГО СЛУЧАЯ

Рассмотрим подробно случай, когда модель комплекса является линейной. Пусть переменные векторы q^h ($h \in L$) и скаляры r_j^g ($g \in M, j \in J_g^g$), r_j^h ($h \in N, j \in J_h$) и p_j^h ($h \in L, j \in J^h \cup J_h$) соответствуют ограничениям (1), (3) — (5). Тогда двойственная задача может быть записана следующим образом (штрихом обозначено транспонирование):

$$q^h, r_j^h, p_j^h \geq 0; \quad (7)$$

$$r_j^g + r_j^h + p_j^g - p_j^h \geq \Gamma_j^{gh}; \quad (8)$$

$$q^h(\bar{a}^h)' - \sum_{j \in J^h \cup J_h} p_j^h \beta_j^h \geq -\gamma^h; \quad (9)$$

$$\sum_{h \in L} (q^h, T^h) + \sum_{h \in M} \sum_{j \in J^h} r_j^h B_j^h + \sum_{h \in N} \sum_{j \in J_h} r_j^h B_j^h \rightarrow \min. \quad (10)$$

Оценка r_j^g — потенциал сырьевой базы g по сырью вида j (при $g \in M$), r_j^h — потенциал потребителя h по готовой продукции вида j (при $h \in N$), p_j^h — оценка продукции вида j на предприятии h ($h \in L$), наконец, q^h — вектор локальных оценок для предприятия h ($h \in L$).

Ограничение (8) целесообразно рассмотреть отдельно для случаев транспортировки сырья, готовой продукции и полуфабрикатов. В случае транспортировки сырья, т. е. при $g \in M$, $h \in L$, оно принимает вид:

$$r_j^g \geq \Gamma_j^{gh} + p_j^h. \quad (11)$$

Из теоремы равновесия для двойственных задач линейного программирования следует, что в случае использования соответствующей перевозки в оптимальном плане ($y_j^{gh} > 0$) соотношение (11) должно выполняться как равенство. Отсюда, используя $r_j^g \geq 0$ и $\Gamma_j^{gh} = -\gamma_j^g - \gamma_j^{gh}$ ($g \in M$, $h \in L$), находим, что в оптимальном решении должно быть:

$$p_j^h \geq \gamma_j^g + \gamma_j^{gh}, \quad (12)$$

т. е. в оптимальном плане поставка сырья вида j предприятию h с базы g производится только в том случае, когда оценка этого вида сырья на предприятии не меньше удельного расхода (внешняя цена плюс удельные транспортные затраты). Это позволяет интерпретировать оценку p_j^h сырья вида j на предприятии h как максимальную величину удельного расхода, при которой еще рентабельно приобретение сырья вида j предприятием h .

Аналогично в случае транспортировки готовой продукции, т. е. при $g \in L$, $h \in N$, из (8) имеем:

$$r_j^h \geq \Gamma_j^{gh} - p_j^g. \quad (13)$$

Поскольку при $y_j^{gh} > 0$ в оптимальном плане это соотношение должно выполняться как равенство и $r_j^h \geq 0$, $\Gamma_j^{gh} = \gamma_j^h - \gamma_j^{gh}$ ($g \in L$, $h \in N$), постольку

$$p_j^g \leq \gamma_j^h - \gamma_j^{gh}, \quad (14)$$

т. е. в оптимальном плане поставка готовой продукции вида j потребителю h с предприятия g осуществляется только тогда, когда оценка этого вида продукции на предприятии не больше удельного дохода (внешняя цена минус удельные транспортные затраты). Соответственно можно интерпретировать оценку p_j^g готовой продукции вида j на предприятии g как минимальную величину удельного дохода, при которой рентабельна реализация готовой продукции вида j предприятием g .

Наконец, в случае обмена полуфабрикатами, т. е. при $g, h \in L$, (8) дает

$$0 \geq \Gamma_j^{gh} + p_j^h - p_j^g, \quad (15)$$

по теореме равновесия и в силу $\Gamma_j^{gh} = -\gamma_j^{gh}$ ($g, h \in L$) в оптимальном плане при $y_j^{gh} > 0$ должно быть

$$p_j^h - p_j^g = \gamma_j^{gh}, \quad (16)$$

т. е. в оптимальном плане перевозка полуфабриката вида j от предприятия g предприятию h производится только тогда, когда удельные транспортные расходы равны приросту оценки этого полуфабриката на предприятии h относительно предприятия g .

Будем называть неравенство

$$p_j^h - p_j^g \geq \gamma_j^{gh} \quad (16')$$

условием рентабельности перевозки полуфабриката. Для перевозок любого допустимого плана, как следует из (15), это условие может быть выполнено только как равенство. Условие рентабельности имеет форму, свидетельствующую о том, что соответствующее плановое решение должно приниматься на уровне управления комплексом. Иными словами, планирующий орган комплекса в целом, имея информацию о потребностях предприятий в полуфабрикатах и возможностях предприятий комплекса по производству этих полуфабрикатов, составляет план перевозок.

Представляет интерес исследование возможности прямых связей между предприятиями комплекса по обмену полуфабрикатами. Если осуществляется перевозка полуфабриката j с предприятия g на предприятие h , то транспортные расходы комплекса по этой перевозке следует распределить между предприятиями — участниками операции. Пусть k ($0 \leq k \leq 1$) — доля транспортных расходов, которые несет предприятие-отправитель, тогда $(1 - k)$ — доля получателя. Кроме того, должна быть установлена цена p на полуфабрикат в этой операции. Тогда для рентабельности операции с точки зрения отправителя необходимо выполнение неравенства, аналогичного (14):

$$p_j^g \leq p - k\gamma_j^{gh}. \quad (17)$$

Соответственно с точки зрения получателя должно быть выполнено неравенство, аналогичное (12):

$$p_j^h \geq p + (1 - k)\gamma_j^{gh}. \quad (18)$$

Имеет место следующее утверждение: *операция по перевозке полуфабрикатов рентабельна для комплекса тогда и только тогда, когда она рентабельна для каждого из участников.*

В самом деле, пусть выполнены одновременно неравенства (17) и (18). Тогда

$$p \geq p_j^g + k\gamma_j^{gh}; \quad p \leq p_j^h - (1 - k)\gamma_j^{gh}.$$

Ясно, что для существования p необходимо и достаточно

$$p_j^g + k\gamma_j^{gh} \leq p_j^h - (1 - k)\gamma_j^{gh},$$

откуда

$$p_j^h - p_j^g \geq \gamma_j^{gh},$$

что и требовалось.

Наоборот, если выполнено неравенство (16'), легко найти такие p и k (например, $k = 1/2$, $p = 1/2(p_j^h + p_j^g)$), при которых будут одновременно выполнены неравенства (17) и (18).

Подобно оценкам сырья и готовой продукции оценка p_j^h ($j \in V$) полуфабриката j на предприятии h может быть интерпретирована как максимальная величина удельного расхода, при которой для предприятия целесообразно приобретение этого полуфабриката, и одновременно как минимальная величина удельного дохода, при которой целесообразна реализация этого полуфабриката.

4. ИТЕРАТИВНЫЙ ПРОЦЕСС ОПТИМИЗАЦИИ

Имея в виду пока только линейный случай, выпишем локальные задачи, на которые распадается транспортный блок.

1. Транспортировка сырья.

$$y_j^{gh} \geq 0, \quad g \in M, \quad h \in L, \quad j \in J^g \cap J_h; \quad (2')$$

$$\sum_{h \in L} y_j^{gh} \leq B_j^g; \quad (3')$$

$$\sum_{h \in L} (\Gamma_j^{gh} + p_j^h) y_j^{gh} \rightarrow \max. \quad (19)$$

Ясно, что задачи транспортировки с каждой базы каждого вида имеющегося на ней сырья независимы. Пусть $\max (\Gamma_j^{gh} + p_j^h) = c^*$ для некоторых $g \in M$, $j \in J^g$ реализуется (в частности) при $h = h^*$. Тогда в случае $c^* < 0$ нет рентабельных перевозок сырья вида j с базы g и $y_j^{gh} = 0$ при всех h . Если же $c^* \geq 0$, то $y_j^{gh^*} = B_j^g$, $y_j^{gh} = 0$ при $h \neq h^*$, т. е. весь запас сырья вида j с базы g перевозится на предприятие h^* (ясно, что $c^* \geq 0$ эквивалентно выполнению условия рентабельности (12) для перевозки сырья вида j с базы g на предприятие h^*).

2. Транспортировка полуфабрикатов.

$$y_j^{gh} \geq 0, \quad g, h \in L, \quad j \in J^g \cap J_h; \quad (2')$$

$$\sum_{g \in L} \sum_{h \in L} (\Gamma_j^{gh} - p_j^g + p_j^h) y_j^{gh} \rightarrow \max. \quad (20)$$

В такой форме задача неразрешима (критерий неограничен), если существуют $g, h \in L, j \in J^g \cap J_h$ такие, что $\Gamma_j^{gh} + p_j^h - p_j^g > 0$, что вовсе не исключено, так как в итеративном процессе могут встречаться и недопустимые значения оценок. Поэтому необходимо дополнить задачу ограничениями на объем либо вывоза, либо ввоза каждого полуфабриката для каждого предприятия. Для определенности выберем первый вариант: фиксирование допустимого объема вывоза Z_j^g полуфабриката j с предприятия g . Из дальнейшего изложения будет ясна корректность этого допущения; определение величин Z_j^g также описано ниже. Затем целесообразно в соответствии с этим допущением разложить задачу определения плана транспортировки полуфабрикатов на независимые блоки для отдельных предприятий-поставщиков.

Имеем для каждого $g \in L, j \in J^g$:

$$y_j^{gh} \geq 0, \quad h \in L, \quad j \in J^g \cap J_h; \quad (2')$$

$$\sum_{h \in L} y_j^{gh} \leq Z_j^g; \quad (21)$$

$$\sum_{h \in L} (\Gamma_j^{gh} - p_j^g + p_j^h) y_j^{gh} \rightarrow \max. \quad (22)$$

В таком виде задача совершенно аналогична задаче об определении плана транспортировки сырья; $c^* = \max_h (\Gamma_j^{gh} - p_j^g + p_j^h)$, и при $c^* \geq 0$ следует положить $y_j^{gh^*} = Z_j^g$, $y_j^{gh} = 0$ при $h \neq h^*$. Неравенство $c^* \geq 0$ эквивалентно выполнению условия рентабельности (16') для перевозки полуфабриката j с предприятия g на предприятие h . При оптимальных значениях оценок критерий (20) обращается в нуль в силу теоремы равновесия.

3. Транспортировка готовой продукции.

$$y_j^{gh} \geq 0, \quad g \in L, \quad h \in N, \quad j \in J^g \cap J_h; \quad (2')$$

$$\sum_{g \in L} y_j^{gh} \leq B_j^h; \quad (4')$$

$$(\Gamma_j^{gh} - p_j^g) y_j^{gh} \rightarrow \max. \quad (23)$$

$$g \in L$$

Так же как и при перевозках сырья, задачи транспортировки каждому потребителю каждого вида нужной ему готовой продукции независимы. Пусть для некоторых h, j $\max_g (\Gamma_j^{gh} - p_j^g) = c^*$ реализуется (в частности) при $g = g^*$. Тогда в случае $c^* < 0$ нет рентабельных перевозок готовой продукции вида j потребителю h . Если же $c^* \geq 0$, то $y_j^{\xi^*h} = B_j^n$, $y_j^{gh} = 0$ при $g \neq g^*$, т. е. вся потребность пункта h в готовой продукции вида j удовлетворяется предприятием g^* (ясно, что $c^* \geq 0$ эквивалентно выполнению условия рентабельности (14) для перевозки готовой продукции вида j с предприятия g^* потребителю h).

Оптимизация производственного блока распадается на локальные задачи оптимизации для каждого предприятия. Не вдаваясь в подробности, ограничимся лишь самой общей формой:

$$x^h \geq 0, \quad \bar{a}^h x^h \leq T^h, \quad h \in L; \quad (1')$$

$$\sum_{h \in L} \left(x^h, \sum_{j \in J^h \cup J_h} p_j^h \beta_j^h - \gamma^h \right) \rightarrow \max. \quad (24)$$

Как всегда при использовании оценок элиминированных ограничений в качестве управляющих переменных [1], критерий (24), полученный редукцией глобального критерия на локальный объект, является максимизацией прибыли в этих оценках.

В качестве ключевых ограничений в итеративном процессе [1] будут использованы ограничения (3) по возможностям сырьевых баз, ограничения (4) по возможностям реализации готовой продукции в пунктах потребления, ограничения (21) по допустимому объему вывоза полуфабрикатов с предприятий, а также некоторые из ограничений производственного блока [9].

Номер итерации будем писать в скобках после обозначения переменной величины. Пусть $p_j^h(t-1)$ ($h \in L, j \in J^h \cup J_h$) — значения управляющих переменных, $\bar{x}^h(t-1)$ и $\bar{y}_j^{gh}(t-1)$ — усредненные планы производства и перевозок, $Z_j^h(t-1)$ — значения величин, задающих допустимый объем вывоза полуфабриката вида j с предприятия h , вычисленные на итерации $t-1$. Тогда, в полном соответствии с [1], отдельная итерация алгоритма состоит из следующих этапов:

1) Решение всех локальных производственных задач (1'), (24) при $p_j^h = p_j^h(t-1)$ — определяют векторы $x^h(t)$, $h \in L$; решение всех локальных задач транспортировки при $p_j^h = p_j^h(t-1)$, в том числе: а) задач (2'), (3'), (19) по транспортировке сырья для каждой сырьевой базы и каждого вида сырья — определяют величины $y_j^{gh}(t)$, $g \in M$, $h \in L, j \in J^g \cap J_h$; б) задач (2'), (21), (22) по транспортировке полуфабрикатов для каждого предприятия-отправителя $g \in L$ и каждого вида полуфабрикатов — определяют величины $y_j^{gh}(t)$, $h \in L, j \in J^g \cap J_h$; в) задач (2'), (4'), (23) по транспортировке готовой продукции для каждого потребителя $h \in N$ и каждого вида готовой продукции — определяют величины $y_j^{gh}(t)$, $g \in L, j \in J^g \cap J_h$.

2) Вычисление усредненных планов производства $\bar{x}^h(t)$ и перевозок $\bar{y}_j^{gh}(t)$ по усредненным планам $\bar{x}^h(t-1)$, $\bar{y}_j^{gh}(t-1)$ и текущим планам

$x^h(t)$, $y_j^{gh}(t)$ при помощи каких-либо формул усреднения, например

$$\bar{x}^h(t) = \frac{t-1}{t} \bar{x}^h(t-1) + \frac{1}{t} x^h(t).$$

3) Вычисление управляющих переменных $p_j^h(t)$, $h \in L$, $j \in J^h \cup J_h$ путем изменения их предшествующих значений $p_j^h(t-1)$ на основании анализа усредненных планов $\bar{x}^h(t)$, $\bar{y}_j^{gh}(t)$ и текущих планов $x^h(t)$, $y_j^{gh}(t)$ по формуле (ср. [4]):

$$p_j^h(t) = \begin{cases} (1 + \varphi) p_j^h(t-1), & \text{если } \bar{X}_j^h(t) < 0 \text{ и } X_j^h(t) < 0; \\ (1 - \psi) p_j^h(t-1), & \text{если } \bar{X}_j^h(t) \geq 0 \text{ и } X_j^h(t) \geq 0; \\ p_j^h(t-1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (25)$$

Здесь $\varphi > 0$ и $0 \leq \psi \leq 1$ — параметры итеративного процесса [1, 10]. Формулы для пересчета управляющих переменных могут быть усложнены введением наименьшего допустимого положительного значения для $p_j^h(t)$ при помощи еще одного параметра процесса [10].

4) Вычисление величин $Z_j^h(t)$, $h \in L$, $j \in J^h \cap V$ производится по формуле:

$$Z_j^h(t) = (1 + \kappa) \bar{Y}_j^h(t-1), \quad (26)$$

где

$$\bar{Y}_j^h(t) = \sum_{g \in L} \bar{y}_j^{hg}(t).$$

Таким образом, допустимый для текущего плана итерации t объем вывоза полуфабриката j с предприятия g определяется через объем вывоза этого полуфабриката в усредненном плане, накопленном к данной итерации. Параметр итеративного процесса κ — медленно убывающая положительная функция номера итерации t .

За начальные значения $x^h(0)$, $y_j^{gh}(0)$ и $p_j^h(0)$ целесообразно принимать планы, реализованные комплексом в предшествующий плановый период или полученные экспертным путем. Эти планы можно усреднять с относительно большим весом, если условиться, что процесс начинается с итерации, имеющей достаточно большой номер t_0 ($t_0 \gg 0$).

Управляющие переменные p_j^h , значения которых предопределяют результаты всех локальных оптимизаций на каждой итерации, пересчитываются только в зависимости от выполнения или невыполнения связующих балансовых ограничений (5). Поясним на нескольких примерах динамику изменения управляющих переменных в ходе итеративного процесса.

1. Пусть начальное значение оценки p_j^g конечной продукции вида j на предприятии g сильно занижено, так что на начальных итерациях планируется чрезмерно большой вывоз этой продукции с предприятия g . Это сразу приведет к невыполнению соответствующего балансового ограничения из группы (5) для усредненных и текущих планов, а именно: $\bar{X}_j^g(t) < 0$, $X_j^g(t) < 0$, и, следовательно, росту значения оценки $p_j^g(t)$ согласно формуле (25). Этот рост может иметь двоякие последствия. Во-первых, в силу (14) транспортировка продукции вида j с предприятия g в некоторые пункты потребления может стать нерентабельной, что приведет к сокращению вывоза («уменьшение спроса»). Во-вторых, вследствие повышения оценки p_j^g может увеличиться выпуск продукции вида j на предприятии g («увеличение предложения»). Так или иначе,

наступит уменьшение невязки соответствующего балансового ограничения как для текущих, так, следовательно, и для усредненных планов. Как только оценка $p_j^g(t)$ достигнет такого значения, что для текущих планов станет $X_j^g \geq 0$, рост оценки прекратится.

2. Продолжая предыдущий пример, допустим, что выпуск продукции вида j может быть рентабелен для предприятия g лишь при исключительно высоких значениях p_j^g , таких, что вывоз этой продукции в любой пункт потребления нерентабелен. Тогда постепенный рост оценки p_j^g приведет к прекращению планирования вывоза, начиная с некоторого момента t_1 , и для текущих планов при $t > t_1$ будет $X_j^g(t) = 0$. В силу (25) это остановит дальнейший рост оценки. Таким образом, начиная с t_1 не будет планироваться ни производство продукции вида j на предприятии g , ни ее транспортировка с этого предприятия. Однако для усредненных планов останется $\bar{X}_j^g < 0$, но эта «задолженность» будет все время сокращаться в силу постепенного уменьшения веса итераций, на которых она образовалась, и наступит момент t_2 , начиная с которого будет $\bar{X}_j^g(t) < \varepsilon$, где ε — допустимая погрешность.

3. Пусть на некоторой итерации t_1 оказалось $y_j^{gh}(t_1) > 0$ ($g \in M$, $h \in L$, $j \in J^g \cap J_h$), т. е. в текущий план включена перевозка сырья вида j с базы g на предприятие h . В соответствии с характером локальных оптимизаций в случае транспортировки сырья должно быть $y_j^{gh}(t_1) = B_j^g$. Однако количество B_j^g сырья вида j может оказаться значительно превосходящим потребность в нем предприятия h на плановый период, и на предприятии образуется большой «запас» этого сырья, так что будет не только $X_j^{gh}(t_1) > 0$, но и $\bar{X}_j^{gh}(t_1) > 0$. В соответствии с (25), p_j^h начнет уменьшаться, и в некоторый момент t_2 перевозка сырья вида j на предприятие h станет нерентабельной. Начиная с t_2 будет выполняться неравенство $X_j^{gh}(t) < 0$ (так как предприятие будет расходовать сырье), но по-прежнему останется $\bar{X}_j^{gh}(t) > 0$ (поскольку имеется «запас»), и уменьшение оценки p_j^h прекратится. Наконец, в момент t_3 «запас» будет исчерпан, и неравенства $X_j^{gh}(t) < 0$ и $\bar{X}_j^{gh}(t) < 0$ будут выполнены одновременно — в силу (25) начнется рост оценки p_j^h и т. д.

4. Рассмотрим последовательность перевозок y_j^{gh} , планируемых на различных итерациях, сырья вида j с базы g различным предприятиям $h \in L$ ($j \in J^g \cap J_h$). Если база g находится относительно недалеко от предприятия h_0 , потребности которого в сырье вида j превосходят возможности базы, то, как правило, будет $y_j^{gh_0}(t) = B_j^g$. Допустим, однако, что база обслуживает несколько предприятий h_i ($i = 1, 2, \dots, \bar{i}$). Так как в силу (2), (3), (19) объем перевозки в текущем плане каждой итерации равен B_j^g , то, как видно из предыдущего примера, значения оценок p_j^h будут колебаться и на различных итерациях неравенство $y_j^{gh}(t) > 0$ будет иметь место для различных h . Распределение запаса B_j^g сырья вида j на базе между предприятиями h_i ($i = 1, 2, \dots, \bar{i}$) будет происходить в соответствии с частотами выполнения неравенства $y_j^{gh_i}(t) > 0$ для различных i .

5. Продолжая предыдущий пример, допустим, что потребности предприятий комплекса в сырье вида j не могут быть удовлетворены полностью и начальные значения оценок $p_j^h(0)$ занижены. Тогда на начальных итерациях производственное потребление сырья вида j будет превышать его ввоз, что приведет к $\bar{X}_j^h(t) < 0$ и $X_j^h(t) < 0$ и, следовательно, к росту оценок p_j^h . Это может вызвать сокращение потребления сырья вида j : некоторые предприятия ($h \in \bar{L}_j$) заменят его другим сырьем (если это возможно и рентабельно) или прекратят выпуск продукции, для производства которой необходимо сырье вида j . На этих предприятиях станет $X_j^h(t) \geq 0$ ($h \in \bar{L}_j$), и рост оценок p_j^h ($h \in \bar{L}_j$) прекратится. Однако эти

оценки не будут и уменьшаться в силу «задолженности» по сырью вида j в усредненных планах: $\bar{X}_j^h(t) < 0$ ($h \in \bar{L}_j$). Из числа возможных потребителей сырья вида j в множество $\bar{L}_j$ не войдут предприятия, для которых потребление сырья вида j рентабельно даже при относительно высоких оценках p_j^h ($h \in \bar{L}_j$). Потребность таких предприятий в сырье j будет уже соответствовать возможностям сырьевых баз, и с некоторого момента t_1 (этот момент соответствует завершению формирования множеств L_j и $\bar{L}_j$) для всех $h \in L$ наступит $X_j^h(t) \geq 0$ и прекратится рост оценок p_j^h . Однако в соответствии с примером 4 возможны некоторые колебания значений этих оценок при $h \in L_j$.

Из формулировки локальной задачи (2), (3), (19) о транспортировке сырья и примера 4 видно, что на некоторых итерациях оценки p_j^h ($h \in L$, $j \in U \cap J_h$) могут принять такие значения, что транспортировка сырья вида j с некоторой базы g окажется нерентабельной для всех предприятий. При таких t будет $y_j^{gh} = 0$ для всех h . Вследствие этого в окончательном плане запас B_j^g сырья вида j на базе g будет использован не полностью, причем коэффициент использования тем меньше, чем большее число итераций характеризуется отсутствием рентабельных перевозок сырья вида j с базы g . Такая ситуация может возникнуть тогда, когда ограничения по возможностям сырьевых баз фактически являются жесткими. Конечно, это снижает возможности оптимизации в итеративном процессе.

Имеется специальный вычислительный прием, позволяющий подавить отрицательные эффекты такого рода и ускоряющий сходимость итеративного процесса. А именно, при отсутствии на текущей итерации рентабельных перевозок сырья вида j с базы g соответствующая доля запаса этого сырья на базе (уменьшающаяся по мере увеличения числа выполненных итераций) резервируется с целью возможного использования на будущих итерациях. Для формального описания этого приема введем величины $\bar{B}_j^g$ — «резерв» сырья вида j на базе g . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{B}_j^g(0) &= 0 && \text{для всех } g \in M, \quad j \in J^g; \\ \bar{B}_j^g(t) &= \begin{cases} \bar{B}_j^g(t-1) + B_j^g, & \text{если } y_j^{gh}(t) = 0 \text{ для всех } h \in L; \\ (1-\delta) \bar{B}_j^g(t-1), & \text{если } y_j^{gh}(t) > 0 \text{ для некоторого } h \in L. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Соответственно в локальной задаче о транспортировке сырья неравенство (3) необходимо заменить следующим:

$$\sum_{h \in L} y_j^{gh}(t) \leq B_j^g + \delta \bar{B}_j^g(t-1). \quad (28)$$

Здесь δ — допустимая доля использования накопленного резерва на отдельной итерации — параметр итеративного процесса ($0 < \delta \leq 1$). Совершенно аналогичный прием должен быть использован при решении локальных задач о транспортировке готовой продукции. В то же время использование такого приема при решении задач о транспортировке полуфабрикатов, по-видимому, не имеет смысла.

Сходимость описанного алгоритма для линейного случая можно предполагать на основании вычислительных экспериментов и по аналогии с методом Брауна и градиентными методами (см. [1]).

Обсудим возможность применения алгоритма к задаче, содержащей нелинейности. Сначала остановимся на «узко технологических» вопросах выполнимости вычислений, которые необходимы на каждой итерации, и их трудоемкости. Если транспортные издержки или внешние цены на сырье

нелинейно зависят от объема поставок, заменим критерий (19) на следующий:

$$\sum_{h \in L} (C_j^{gh}(y_j^{gh}) + p_j^h y_j^{gh}) \rightarrow \max. \quad (29)$$

Потребуем, чтобы при ограничениях (2'), (3') критерий (29) достигал оптимального значения в точке с не более чем одной отличной от нуля координатой (так же, как линейный критерий (19)). Такое же требование наложим и на аналогичным образом модифицированные критерии (22) и (23). Ясно, что в таком случае введение нелинейностей в критерии задач транспортировки практически не увеличивает трудоемкости оптимизации транспортного блока на отдельно взятой итерации. Поскольку удельные транспортные издержки имеют тенденцию к снижению при увеличении интенсивности перевозок, а внешние цены в задачах текущего планирования могут, как правило, лишь незначительно изменяться в зависимости от объема поставок, сформулированное требование, вероятно, будет выполнено для многих практических задач.

Для многих практических случаев локальные оптимизации в производственном блоке (для отдельных предприятий), подобно оптимизациям транспортного блока, сводятся к перебору относительно небольшого числа производственных способов и определению наиболее рентабельного из них [9, 10]. Поэтому, если на нелинейную модификацию критерия (24) для предприятия

$$-c^h(x^h) + \sum_{j \in J^h \cup J_h} p_j^h b_j^h(x^h) \rightarrow \max \quad (30)$$

наложить аналогичное требование, трудоемкость локальных оптимизаций в производственном блоке практически не возрастет. В то же время и здесь это требование достаточно часто, по-видимому, не является ограничительным, так как при текущем планировании удельное потребление ресурсов и удельный выпуск продукции незначительно зависят от интенсивности использования производственного способа и обычно имеют тенденцию к снижению при росте интенсивности.

Поскольку в алгоритме используется усреднение текущих планов, полученных на различных итерациях, область допустимых планов должна быть выпуклой.

Конечно, специфика нелинейности модели в таком алгоритме учитывается грубо, лишь непосредственно в критериях локальных оптимизаций, при проверке балансовых ограничений (5) и аналогичных им ограничений в моделях предприятий. Для более точного учета специфика нелинейности необходимо использование теории двойственности и ее экономической интерпретации для нелинейных задач, однако современное состояние этой теории позволяет использовать ее лишь в некоторых простейших случаях. Соответствующим подбором параметров итеративного процесса можно и в нелинейных случаях добиться его стабильности, но неясно, когда сходимость метода будет сходимость к оптимуму. Однако, учитывая колоссальную трудоемкость алгоритмов нелинейного программирования, часто делающую их не пригодными для решения задач большой размерности, описанный итеративный метод может оказаться полезным для приближенных расчетов и по нелинейным моделям.

В рассмотренной модели производственно-транспортного комплекса из различных возможных форм записи каждого ограничения для определенности мы выбирали какую-либо одну конкретную форму. Например, мы предполагали, что при производстве готовой продукции должно быть выполнено ограничение в форме (4), в то время как в некоторых случаях

следовало бы рассмотреть противоположное неравенство или уравнение. Однако это не повлекло бы никаких существенных изменений ни при анализе модели, ни при построении вычислительного алгоритма (лишь соответствующие двойственные переменные изменили бы знак или стали свободными).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Данилов-Данильян. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. В сб. алгоритмов и программ для решения на ЭЦВМ. М., «Статистика», 1967.
2. А. И. Каценелинбойген, Ю. В. Овсиенко, Е. Ю. Фаерман. Методологические вопросы оптимального планирования социалистической экономики. М., Изд. ЦЭМИ АН СССР, 1966.
3. В. А. Волконский. Модель текущего отраслевого планирования и аппроксимация производственных возможностей нефтеперерабатывающего завода. Бюл. научн. информ. Математические методы в экономике и планировании. Вып. 3. М., ЦЭМИ АН СССР, 1965 (ротапринт).
4. В. Г. Медницкий. О методе распределения плановых заданий в отрасли. В сб. Модели и алгоритмы оптимального планирования. М., ЦЭМИ АН СССР, 1966 (ротапринт).
5. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
6. В. А. Маш. О некоторых усложненных вариантах транспортной и распределительной задач линейного программирования. В сб. Экономика-математические методы. Вып. II. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. М., «Наука», 1965.
7. Е. П. Нестеров. Транспортные задачи линейного программирования. М., Изд-во МПС, 1962.
8. Ю. А. Олейник. Решение транспортной задачи на электронно-вычислительной машине методом приближения условно-оптимальными планами. Тр. научн. совещ. о применении математических методов в экономических исследованиях и планировании. Т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1961.
9. В. И. Данилов-Данильян. Модель и итеративный алгоритм оптимизации дискретного производства. Материалы I Всес. конф. по применению экономика-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным предприятием. М., ЦЭМИ АН СССР, 1965 (ротапринт).
10. В. И. Данилов-Данильян. Итеративный алгоритм оптимизации загрузки оборудования для производства с использованием полуфабрикатов. В Сб. алгоритмов и программ для решения на ЭЦВМ. М., «Статистика», 1967.

Поступила в редакцию
2 IX 1966

К ВОПРОСАМ РЕДУКЦИИ ТРУДА

И. А. МАШИНСКИЙ

(Москва)

Вопросы редукции труда долгое время широко дискутируются. Прежде всего, вызывает споры вопрос о том, при всех ли экономических расчетах и сопоставлениях нужно учитывать степень сложности труда.

По этому вопросу имеются следующие точки зрения. Первая сводится к тому, что расчет и сопоставление затрат передупцированного труда неправомерно. Сторонники ее ссылаются на общеизвестное положение, что сравнивать можно лишь соизмеримые величины. Между тем, час, день, месяц или год труда работников различной квалификации как по затратам на их подготовку, так и по результатам труда не равнозначны. На основании этого, делается вывод, что даже при измерении производительности труда и для различных балансовых расчетов нужно обязательно учитывать сложность труда.

Вторая точка зрения заключается в том, что наряду с величиной простого труда при отдельных расчетах и сопоставлениях нужно учитывать величины передупцированного труда. Так, для измерения производительности труда следует оперировать затратами передупцированного труда. В этом отношении прав М. Катель, который доказывает, что «редуцирование затраченного на производство рабочего времени при измерении производительности труда представляется неправильным» [1]. Думается, что также неправильно оперировать при оценке трудовых ресурсов и в ряде балансовых расчетов затратами простого труда. Нужно знать затраты не только абстрактного, но и конкретного труда.

Другой, пожалуй наиболее дискуссионный вопрос, — как оценить степень сложности труда.

Имеется много различных предложений о методах приведения сложного труда к простому. Первую попытку классифицировать эти предложения сделал Б. Н. Михалевский [2]. Такая классификация позволяет более полно и верно разобраться в различных предложениях. Все предложения о путях редукции сводятся либо к оценке затрат на подготовку квалифицированного работника, либо учету эффективности — отдачи труда. В первом случае предлагаются различные пути определения прямых или полных затрат труда, необходимых для подготовки квалифицированных работников; во втором — предложения сводятся к тому, как учесть степень сложности выполняемой работы, исходя из эффективности или отдачи труда.

Рассмотрим наиболее интересные предложения об оценке степени сложности труда и его редукции по затратам на подготовку квалифицированных кадров.

М. И. Туган-Барановский писал: «При учете трудовой стоимости продукта придется приводить к общей единице общественного труда трудовые процессы различного рода. Придется определять, сколько часов среднего общественно необходимого рабочего времени заключается в часе труда квалифицированного рабочего. Для этого требуется, в свою очередь, учесть труд квалифицированного рабочего, потраченный им для приготовления к