Используя не слишком строгую терминологию, можно сказать, что так как дисперсия есть мера неопределенности, то из математической модели коллективной оценки вытекает следующее. Неопределенность коллективного мнения в общем случае выше, чем средняя неопределенность мнения отдельного эксперта.

Наибольшее распространение метод экспертных оценок в настоящее время находит в сетевом планировании, где таким способом определяется длительность выполнения каждой операции, входящей в сетевой план. Практика расчета индетерминированных сетей по оценкам одного эксперта показывает, что получающаяся при таком расчете дисперсия продолжительности критического пути получается слишком заниженной (даже при применении формулы $D = (b - a)^2 / 25$, не говоря уже о формуле $D = (b - a)^2 / 36$). Использование моделей коллективной оценки устраняет этот недостаток и, кроме того, уменьшает влияние субъективных ошибок.

Итак, метод экспертных оценок позволяет выразить нечеткую, интуитивную информацию специалистов-экспертов в теоретико-вероятностных терминах. При этом понятие «вероятность» в данном аспекте имеет смысл меры ожидаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М., Гостехиздат, 1955.
2. Д. И. Голенко. Теоретико-вероятностные вопросы сетевого планирования во времени. В сб. Вычислительные системы, вып. 11. Изд. Сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1964.

Поступила в редакцию
6 X 1965

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 3

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Х. ЮТТЛЕР

(ГДР)

Постановка задачи. Существуют некоторые методы математического программирования, позволяющие выбирать из многочисленных допустимых годовых производственных программ такой вектор производства, который приводит к минимуму или к максимуму определенной величины в зависимости от заданной цели. До сих пор на практике приходилось довольствоваться методом линейного программирования, так как, несмотря на приближенный его характер, он представляет собой значительный шаг вперед по сравнению с применяющимися ненаучными методами решения подобных задач.

Модель линейного программирования для рассматриваемой здесь задачи будет использована в следующей форме. Пусть требуется определить производственную программу, оптимальную относительно заданной цели

$$C^T X \to \text{ext} \tag{1}$$

при условиях:

$$AX = b, \tag{2}$$

$$X \geqslant 0. \tag{3}$$

Искомый оптимальный вектор производства обозначается через X, вектор коэффициентов целевой функции — через C. Условия, которые следует учесть в годовой производственной программе, даны системой уравнений (2). Как известно, условия задачи, которые встречаются обычно в форме неравенств, приводятся к указанной выше форме равенств. Итак, строкам матрицы A соответствуют все виды затрат (группы машин, виды материалов и т. д.), интересующие нас в задаче.

В этой системе могут естественно содержаться ограничения объема производства. На размер матрицы влияют, с одной стороны, производственные условия и, с другой стороны, технические возможности действующей ЭВМ. Последние часто приводят к необходимости значительно сокращать размер системы условий.

Соответствующие отдельным строкам матрицы A компоненты вектора b указывают ограничения видов затрат или объемов производства, которые установлены для подлежащей расчету годовой производственной программы. Неравенства (3) представляют собой обыкновенные условия неотрицательности.

Одна из проблем, еще не выясненная в рамках практического применения названной модели, состоит в том, что не установлен единый критерий оптимальности для социалистического промышленного предприятия.

Некоторыми критериями оптимальности, предложенными до сих пор и используемыми в практических расчетах, занимались Хейде и Мартенс [1]. Они констатировали, что еще не найден общепризнанный и теоретически убедительно обоснованный критерий. Эти авторы обстоятельно описывают критерий «максимальной прибыли», «максимальной рентабельности», «максимального количества продукции», «максимального коэффициента использования производства», «максимального объема выпуска» и «максимальной производительности труда» и исследуют преимущества и недостатки использования отдельных критериев.

В общем, рекомендуется в настоящий момент проводить различные вычисления оптимальных вариантов и комбинировать из получающихся решений производственную программу, которая в определенной мере удовлетворит различным критериям. Естественно, при этом нельзя ожидать, что все оптимальные векторы производства (оптимальные относительно различных критериев) получатся идентичными. Метод программирования также не может привести к оптимуму, одновременно удовлетворяющему различным критериям оптимальности.

Названные авторы писали в этой статье, что можно построить различные программы, соответствующие различным критериям оптимальности. Затем выбрать единственно оптимальную программу производства. При этом, конечно, возможны субъективные ошибочные оценки.

Возникает вопрос о том, в каком отношении выбранная программа производства является оптимальной. Понятие оптимальности следовало бы применять только в связи с точно определенной постановкой цели и при указании дополнительных условий, которые нужно учесть.

Габр и Борак [2] высказали предложения, позволяющие одновременно учесть различные критерии. Согласно этим предложениям выбирается ведущая целевая функция, на основе которой проводится оптимизация. Другие представляющие интерес целевые функции рассматриваются как дополнительные условия и при отдельных шагах вычислений по симплексному методу преобразовываются как все остальные условия. Симплексный метод позволяет определять при каждом единичном шаге, какие значения принимают эти другие величины. В этом случае выбор окончательной производственной программы может проводиться путем определения одного из субоптимальных допустимых векторов решений, при котором другие принятые во внимание критерии имеют приемлемые значения. Практически метод сводится к получению для отдельных критериев оптимальных векторов производства, а также, по мере надобности, субоптимальных решений, причем во всех случаях используются все принадлежащие целевым функциям величины. Результаты могут заноситься в таблицу, которая используется при выборе окончательной производственной программы.

Рассматриваемой проблемой занимались также в ПНР. Радзиковский [3] описал два метода, позволяющие учитывать различные критерии оптимальности для построения оптимальной производственной программы.

Первый метод предусматривает оптимизацию на первом шаге в соответствии с различными критерями. К примеру, благодаря этому получилось три максимальных значения:

$$\max_X C_1^T X, \quad \max_X C_2^T X, \quad \max C_3^T X.$$

(Пусть даны три задачи максимизации в форме (1)—(3)). Затем сравниваются полученные максимальные значения с контрольными цифрами D_1, D_2 и D_3, установленными государственными органами для этих оптимальных величин, и вычисляются:

$$a_1 = \max_X C_1^T X - D_1, \quad a_2 = \max_X C_2^T X - D_2, \quad a_3 = \max_X C_3^T X - D_3.$$

На практике можно предполагать в задачах максимизации, что все

a_i $(i = 1, 2, 3)$ больше нуля. После выбора из числа рассмотренных критериев оптимальности «главного» $C_H{}^T X$ в качестве последнего шага проводится оптимизация $C_H{}^T X \to \text{ext}$ при условиях (2) и (3) и дополнительных условиях

$$D_1 \leqslant C_1{}^T X \leqslant \max_X C_1{}^T X, \quad D_2 \leqslant C_2{}^T X \leqslant \max_X C_2{}^T X, \quad D_3 \leqslant C_3{}^T X \leqslant \max_X C_3{}^T X.$$

Утверждается, что полученное решение дает в итоге оптимум относительно главного критерия и наилучшим образом учитывает остальные критерии. Однако следует отметить, что благодаря дополнительным условиям проводимая в заключение задача оптимизации, возможно, не имеет допустимых решений. Даже если все дополнительные условия являются совместными, при предложенном методе различные критерии все же не учитываются должным образом. Оптимизация по «дополнительным критериям» практически приводит только к тому, что проверяется допустимость контрольных цифр D_1, D_2 и D_3, установленных государственным органом.

Второй метод предусматривает «целевую суперфункцию», которая образуется путем комбинации коэффициентов отдельных целевых функций, соответствующих различным критериям оптимальности. В результате получается целевая функция, которая не поддается экономическому истолкованию. Некоторые формальные недостатки не позволяют рекомендовать этот метод для практического применения.

В настоящей статье предлагается нахождение оптимальной производственной программы (оптимальной в определенном отношении) путем сочетания полученных для отдельных критериев оптимальных векторов производства. Такое предложение * основывается на одной из теоретико-игровых моделей.

Формулировка задачи. Пусть дана задача в форме (1) — (3). Полагаем, что целевая функция (1) учитывает s различных критериев и что нельзя заранее оценить их значимости. Могут возразить, что такой случай едва ли встречается на практике и что в общем-то возможна оценка важности и значения различных критериев. Однако в настоящее время такая оценка все-таки обусловливается субъективными суждениями, которые должны учитывать противоположные или по меньшей мере сильно различающиеся мнения. Если бы одно из этих мнений было бесспорно правильно, тогда едва ли имела бы смысл описанная здесь задача. Если бы можно было назвать теоретически убедительно обоснованный критерий, тогда устарели бы и стали ненужными все представленные здесь соображения.

Сформулированная здесь задача еще не может быть удовлетворительно решена при современном уровне знаний; вместе с тем она дает возможность использовать теоретико-игровой подход.

Итак, s критериев имеются в форме s линейных целевых функций:

$$C_i{}^T X = C_{i1} X_1 + C_{i2} X_2 + \ldots + C_{in} X_n, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Пусть среди целевых функций $C_i{}^T X$ имеется $r \leqslant s$, которые максимизируются, и $s - r$, которые минимизируются. Отдельные оптимизации проводятся при условиях (2) и (3). Наличие этих условий не ограничивает общности последующих рассуждений.

После нахождения s оптимальных решений получается s оптимальных векторов производства, каждый из которых соответствует одному из s

---

* В общих чертах это предложение было уже изложено автором на конференции «Математика и кибернетика в экономике», Берлин, 1964 [4].

критериев, т. е. все задачи оптимизации полагаются разрешимыми. Векторы производства обозначим X_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Все оптимальные значения целевых функций являются положительными. Эта предпосылка осуществляется для всех известных в практике критериев, обусловливающих определение оптимальных годовых производственных программ.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы прежде всего найти выпуклую линейную комбинацию X_0 указанных s оптимальных производственных программ, которая наилучшим образом учитывала бы заданные критерии:

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_s X_s \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$$
$$\text{и } \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{5}$$

Намечается комбинированная производственная программа как «оптимальная компромиссная программа относительно заданных критериев оптимальности», которая удовлетворяет этому требованию.

Построение теоретико-игровой модели и ее решение. В качестве одной из первых задач следует установить «меру», которая укажет отклонения единичного оптимального вектора производства от оптимальных значений остальных целевых функций. Скалярная характеристика выбирается по формуле:

$$g_{kl} = (|C_l^T X_l - C_l^T X_k|)/C_l^T X_l, \qquad k, l = 1, 2, \ldots, s. \tag{6}$$

Значение g_{kl} характеризует «качество» вектора производства X_k относительно критерия $C_l^T X \to \text{ext}$ и представляет собой модуль отклонения относительно целевой функции $C_l^T X \to \text{ext}$, если осуществляется производственная программа X_k вместо X_l. Такое отклонение, естественно, является наименьшим, т. е. равным нулю, когда выбирается соответственно критерию $C_l^T X$ оптимальный вектор производства X_l. Формула (6) для оценки скалярной характеристики g_{kl} рекомендуется по следующим причинам:

1) g_{kl} является безразмерной величиной. Поэтому устраняются трудности, которые могут возникнуть при наличии различных единиц измерения, зависящих от критериев. Эту трудность, разумеется, можно обойти, проводя перед отдельными оптимизациями нормирование для коэффициентов всех целевых функций:

$$c_{ij} \to \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{i1}^2 + \ldots + c_{in}^2}} \qquad i = 1, 2, \ldots, s; \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отношения коэффициентов между собой сохраняются, поэтому в обоих случаях получается одна и та же оптимальная производственная программа. Невыгодным в случае нормирования является, однако, то, что оптимальные значения целевых функций также становятся безразмерными и утрачивается их наглядность;

2) так как в числителе дроби g_{kl} берется абсолютное значение разности между оптимальным значением $C_l^T X_l$ и субоптимальным значением $C_l^T X_k$ относительно постановки цели (критерия) $C_l^T X \to \text{ext!}$, то можно одновременно учесть требования минимума и максимума различных критериев оптимальности;

3) представление частного для меры отклонения единичного оптимального вектора производства от оптимальных значений остальных целевых функций в виде (6) с самого начала устраняет расхождения, которые могут появиться в связи с различием в порядках величин всевозможных оптимальных значений.

В зависимости от обстоятельств можно использовать также и другие «меры» для оценки отклонений. Если, к примеру, в основе лежит только критерий максимизации, то можно при соответствующих предпосылках предположить:

$$g_{kl} = C_l^T X_k / C_l^T X_l, \quad k, l = 1, 2, \ldots, s. \tag{6'}$$

(6) и (6′) являются совершенно эквивалентными относительно решений игровой модели, так как в них g_{kl} отличаются только константой.

Если применяются g_{kl}, построенные принципиально иначе, чем в (6) или (6′), то нужно будет исследовать, относительно какого требования данная компромиссная программа будет оптимальной.

С помощью введенных в (6) обозначений можно построить следующую квадратную матрицу $G^* = (-g_{kl})$:

$X_k \backslash C_l^T X$	$C_1^T X!$	$C_2^T X!$	$\ldots$	$C_r^T X!$	$C_{r+1}^T X!$	$\ldots$	$C_s^T X!$
X_1	$-g_{11}$	$-g_{12}$	$\ldots$	$-g_{1r}$	$-g_{1,r+1}$	$\ldots$	$-g_{1s}$
X_2	$-g_{21}$	$-g_{22}$	$\ldots$	$-g_{2r}$	$-g_{2,r+1}$	$\ldots$	$-g_{2s}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
X_r	$-g_{r1}$	$-g_{r2}$	$\ldots$	$-g_{rr}$	$-g_{r,r+1}$	$\ldots$	$-g_{rs}$
X_{r+1}	$-g_{r+1,1}$	$-g_{r+1,2}$	$\ldots$	$-g_{r+1,r}$	$-g_{r+1,r+1}$	$\ldots$	$-g_{r1,s}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
X_s	$-g_{s1}$	$-g_{s2}$	$\ldots$	$-g_{sr}$	$-g_{s,r+1}$	$\ldots$	$-g_{ss}$

Строкам матрицы G^* соответствуют s оптимальных векторов производства X_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$, столбцам — s целевых функций $C_l^T X \to \text{ext}!$ $(l = 1, 2, \ldots, s)$. Для $C_l^T X \to \text{ext}!$ принято сокращенное написание $C_l^T X!$

В матрице G^* везде на главной диагонали лежат элементы, равные нулю. Остальные элементы матрицы вообще являются меньшими нуля; в отдельных случаях матрица может содержать больше нулей, например, тогда, когда для различных целевых функций получаются одни и те же оптимальные векторы производства.

Эта матрица G^* рассматривается теперь как матрица платежей матричной игры (X, Z, G^*), которая однозначно определена множеством стратегий $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_s\}$ 1-го игрока, множеством стратегий $Z = \{C_1^T X!, C_2^T X!, \ldots, C_s^T X!\}$ 2-го игрока и названной матрицей платежей G^*. Первоначально не важно, кто определенно является 1-м игроком и 2-м игроком. Партию этой игры можно теперь представить себе так, что 1-й игрок решается на вариант производства к примеру X_p, в то время как 2-й игрок независимо от выбора стратегии 1-м игроком устанавливает, например, целевую функцию $C_q^T X$. Так как все элементы матрицы G^* не положительны, 1-й игрок впоследствии должен выплачивать 2-му игроку величину g_{pq}.

Эта выплата происходит, разумеется, только как мысленный эксперимент; ведь элементы из G^* выражают лишь оценки качества принятого решения X_k относительно критерия $C_l^T X!$. Однако мы сохраняем понятие выплаты в рамках такой матричной игры; в этом случае совершенно ясно, что 1-й игрок будет стараться при выборе фактической производственной программы сделать минимальной потерю (все g_{kl} не положительны), которую следует ожидать по отношению ко всем возможным критериям. Но это является как раз искомым требованием для оптимальной компромиссной программы, которая должна получаться благодаря выпуклой линейной комбинации s данных производственных программ.

Следовательно, под «оптимальной компромиссной программой» следует понимать ту годовую производственную программу, при которой максимальное отклонение по отношению ко всем критериям, принятым во внимание, является минимальным. Благодаря этому получается оптимальная производственная программа, найденная с помощью оптимальной стратегии 1-го игрока в игровой ситуации, определенной (X, Z, G^*).

Из структуры матрицы G^* следует, что она не обладает седловой точкой, потому что

$$\max_k \min_l (-g_{kl}) < \min_l \max_k (-g_{kl}) = 0 \tag{7}$$

(случай, когда все X_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ одинаковы, должен, разумеется, исключаться. В этом случае G^* была бы идентична нулевой матрице; задача была бы тривиальной).

Отсутствие седловой точки означает, что оптимальные стратегии игроков должны быть даны в форме смешанных оптимальных стратегий. Теорема о минимаксе для матричных игр означает, что такие смешанные оптимальные стратегии существуют для обоих игроков.

С помощью известного алгоритма можно найти решение игры (X, Z, G^*); пусть оно задано U_0, W_0 и v. Пусть U_0 — смешанная оптимальная стратегия 1-го игрока, W_0 — смешанная оптимальная стратегия 2-го игрока, v — цена игры. U_0 и W_0 являются двумя векторами, имеющими по s компонент, для которых справедливо:

$$\sum_{k=1}^{s} u_{0k} = 1, \quad u_{0k} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, s, \tag{8}$$

$$\sum_{l=1}^{s} w_{0l} = 1, \quad w_{0l} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad l = 1, \ldots, s. \tag{9}$$

В теории матричных игр смешанная стратегия интерпретируется как случайный выбор среди чистых стратегий; частота использования чистых стратегий обусловлена соответствующими компонентами смешанной стратегии. Однако в представленном случае оптимальная смешанная стратегия 1-го игрока может быть получена еще другим методом.

Компоненты u_{0k} $(k = 1, 2, \ldots, s)$ могут рассматриваться как значения λ_i для выпуклой линейной комбинации (5), которую следует образовать из s оптимальных векторов производства

$$X_0 = u_{01} X_1 + u_{02} X_2 + \ldots + u_{0s} X_s, \tag{10}$$

так как данное множество всех допустимых производственных программ является выпуклым благодаря условиям (2) и (3), X_0 представляет собой также допустимую производственную программу. X_0 есть искомая оптимальная компромиссная программа.

Возможность получения смешанных стратегий 1-го игрока при этом методе обусловлена тем, что стратегии этого игрока, т. е. допустимые, непосредственно выполнимые производственные программы, не ограничиваются s оптимальными производственными программами, а даны благодаря всем выпуклым линейным комбинациям

$$X' = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots + \mu_s X_s \tag{11}$$

при $$\sum_{i=1}^{s} \mu_i = 1 \text{ и } \mu_i \geqslant 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Однако для описания ситуации игры достачно ввести только s оптимальных векторов производства X_k в качестве чистых стратегий 1-го игрока и определить выпуклые линейные комбинации из (11), при которых μ_i не равно единице, как смешанные стратегии этого игрока.

Цена v игры (X, Z, G^*) приводит тогда к выражению, в котором величина максимального отклонения по отношению ко всем s критериям оптимальности может уменьшаться благодаря использованию оптимальной компромиссной программы X_0.

К интерпретации теоретико-игровой модели. С 1-м игроком можно отождествить одно лицо или коллектив, который на промышленном предприятии является ответственным за установление производственной программы. Под 2-м игроком следует понимать стоящую над 1-м игроком организацию, задача которой контролировать, учтены ли в разработанных годовых производственных программах контрольные цифры, утвержденные для этого периода. Контрольные цифры учитываются через различные критерии оптимальности. Ответственный за разработку производственной программы учитывает эти критерии наилучшим образом, если он из комбинаций s оптимальных векторов производства выбирает те, для которых максимальное отклонение по отношению ко всем значениям контрольных цифр будет минимальным. Такая комбинация непосредственно получается в том случае, когда за основу берут модель игры с нулевой суммой.

Матричная игра (игра с нулевой суммой) служит вообще в качестве модели для антагонистических конфликтных ситуаций между двумя участниками, интересы которых прямо противоположны. В этом случае решение игры дает в форме оптимальных стратегий рациональные методы поведения противников, участвующих в такой ситуации.

Ясно, что в описанном случае имеется неантагонистическая ситуация. Однако и здесь имеет смысл положить в основу модель матричной игры, чтобы провести целенаправленное комбинирование заданных оптимальных решений, при котором в качестве результата максимальное отклонение по отношению ко всем максимальным и минимальным значениям целевых функций становится минимальным. Матрица платежей и 2-й игрок служат только в рамках мысленного эксперимента определению комбинации, подходящей для 1-го игрока. Не имеет никакого конкретного значения оптимальная смешанная стратегия 2-го игрока, получающаяся автоматически решением матричной игры.

Более широкая возможность интерпретации составленной игровой модели заключается в понимании этой игры как «игры против природы». Предполагаемый 2-й игрок характеризуется своими стратегиями, которые выражают в различных целевых функциях «ситуацию окружающей среды», существующую из-за незнания однозначного, обоснованного критерия оптимальности. В этом случае оптимальное поведение 1-го игрока состоит в том, чтобы определить минимакс-решение в смысле теории матричной игры. При «игре против природы» существуют в противоположность к антагонистической модели игры еще другие возможности решения, которые здесь, однако, не рассматриваются.

Наконец, следует сослаться еще на то, что тот же результат можно получить, не прибегая к использованию теории игр.

На основе связи линейного программирования и игры с нулевой суммой может быть сформулирована задача оптимизации:

$$v \to \max! \tag{12}$$

при условиях

$$\begin{aligned} -u_{01}g_{11} - u_{02}g_{21} - \ldots - u_{0s}g_{s1} &\geqslant v, \\ -u_{01}g_{12} - u_{02}g_{22} - \ldots - u_{0s}g_{s2} &\geqslant v, \\ &\vdots \\ -u_{01}g_{1s} - u_{02}g_{2s} - \ldots - u_{0s}g_{ss} &\geqslant v, \end{aligned} \tag{13}$$

$$u_{01} + u_{02} + \ldots + u_{0s} = 1, \tag{14}$$

$$u_{0i} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{15}$$

где g_{kl} $(k = 1, \ldots, s;\ l = 1, \ldots, s)$ являются элементами матрицы G^*. Переменными величинами являются v и $u_{0i}(i = 1, \ldots, s)$ — значение и компоненты искомой оптимальной стратегии приведенной в соответствие игры *.

Для (12), (13) и (14) теперь не обязательно использовать понятия «оптимальная стратегия», «цена игры». Искомыми являются здесь просто такие значения u_{0i} для выпуклой линейной комбинации X_k, которые позволяют получить максимальное значение правой стороны в (13). Это идентично требованию для «оптимальной компромиссной программе» минимизировать максимальное отклонение по отношению ко всем отдельным критериям (контрольным цифрам). Следует все же предпочесть применение понятия, основанного на теории игр, так как в этом случае получается наглядная интерпретация критерия оптимальной компромиссной программы. Одновременно этот подход может быть использован для разрешения подобных ситуаций (например, в случае параметрической линейной оптимизации).

Числовой пример. В основе числового примера лежат исследования, которые проводились в порядке эксперимента в Инженерно-экономическом институте машиностроения в Дрездене. Для машиностроительного предприятия ГДР были получены оптимальные годовые производственные программы относительно нескольких критериев. Числовой материал (оптимальные значения целевых функций, оптимальные векторы производства), полученный при этом, был использован для отыскания «оптимальной компромиссной программы». Это вычисление было проведено независимо от названного эксперимента в Институте обработки данных (г. Дрезден).

Чтобы сократить объем вычислительных операций на решение получающейся игры, из семи критериев оптимальности экспериментально было выбрано пять:

$C_1{}^TX!$ — максимальное использование фонда времени;
$C_2{}^TX!$ — максимальное использование фонда времени с учетом использования высокопроизводительных машин;
$C_3{}^TX!$ — максимальная производственная прибыль;
$C_4{}^TX!$ — максимальное накопление;
$C_5{}^TX!$ — максимальная выручка в валюте.

Пять соответствующих им векторов производства обозначены $X_k(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. С помощью (5) вычислена следующая матрица $G^* = (-g_{kl})$:

X_k \ $C_l^T X$	$C_1^T X!$	$C_2^T \ldots$	$^T X!$	$C_4^T X!$	$C_5^T X!$
X_1	0	—0,03	—0,16	—0,08	—0,48
X_2	—0,02	0	—0,01	—0,01	—0,36
X_3	—0,05	—0,01	0	—0,01	—0,26
X_4	—0,01	—0,01	—0,01	0	—0,32
X_5	—0,16	—0,14	—0,17	—0,12	0

* Эта задача может быть преобразована в задачу линейного программирования.

На основании анализа матрицы G^* легко видеть сравнительно хорошее совпадение оптимальных значений целевых функций, соответствующих первым четырем критериям оптимальности.

При допущении, что все критерии равным образом важны, все-таки нельзя рекомендовать осуществление одного из четырех оптимальных векторов производства x_1, x_2, x_3 или x_4, потому что при этих производственных программах получаются отклонения относительно максимальной выручки в валюте от 26 до 48%.

Самыми благоприятными являются соотношения при производственной программе x_5. Здесь отклонения относительно других критериев оптимальности лежат между 12 и 17%.

Очевидно, что эти значения следует улучшить с помощью оптимальной компромиссной программы, если смириться с отклонением против максимального значения для выручки в валюте. Притом это отклонение является менее существенным чем те, которые получились бы для этого критерия оптимальности при оптимальных производственных программах X_1, X_2, X_3 и X_4.

В качестве решения соответствующей матричной игры были получены следующие оптимальные смешанные стратегии:

$$U_0^T = (\;0;\;\; 0;\;\; 0{,}12;\;\; 0{,}25;\;\; 0{,}63),$$
$$W_0^T = (0{,}53;\;\; 0;\;\; 0{,}15;\;\; 0;\;\; 0{,}32).$$

Вместе с компонентами оптимальной смешанной стратегии вычисляется вектор производства оптимальной компромиссной программы:

$$X_0 = 0{,}12X_3 + 0{,}25X_4 + 0{,}63X_5.$$

Цена игры $v = -0{,}11$. Это означает, что максимальное отклонение по отношению ко всем критериям оптимальности может уменьшиться на 11%, если применить производственную программу X_0. Хотя оптимальная стратегия 2-го игрока W_0 не имеет конкретного значения, можно заимствовать компоненты этой стратегии, чтобы для оптимальной компромиссной программы X_0 отклонения по отношению ко второму и четвертому критериям оптимальности были меньшими, чем 11%. Они составляют 9 или 7%. Могут еще получиться незначительные изменения, если округлить компоненты вектора X_0 с недостатком или с избытком.

Заключение. Представленным здесь рассуждением не решается первоначальная проблема — определение теоретически убедительно обоснованного единого критерия оптимальности. Полученную «оптимальную компромиссную программу» следует рассматривать только как приближенное решение, которое может служить основой при дальнейшей разработке подлежащей выполнению производственной программы. Всякое применение математических методов служит созданию наилучшего базиса для принимаемых решений; однако само решение будет всегда диктоваться людьми, а не математической моделью.

То, что предложенная оптимальная компромиссная программа может быть только приближенным решением, связано с тем, что в этом случае также возможны субъективные ошибочные оценки, ибо установка s критериев оптимальности является в некоторой мере произвольной. Другая причина приближенного характера решения состоит в том, что оптимальная компромиссная программа образует оптимальную комбинацию только относительно возможных комбинаций s оптимальных векторов производства. Эти полученные из (11) выпуклые линейные комбинации образуют в общем собственное подмножество допустимых программ, построенных на основе (2) и (3). Поэтому возможно существование других допустимых производственных программ, при которых максимальное отклонение по отношению ко всем критериям оптимальности является меньшим, чем в случае «оптимальной компромиссной программы».

В дальнейшем нужно предусмотреть расширение модели в смысле построения многогранной модели игры, которой было бы охвачено в конце концов все множество допустимых (2) и (3) решений. Такое расширение, естественно, имеет смысл только в том случае, если одновременно найдены возможности, которые позволяют вновь сократить это множество таким образом, чтобы принимались во внимание лишь те точки решения, которые, по всей вероятности, будут влиять на оптимальную смешанную стратегию. Эта постановка задачи должна быть предметом дальнейших исследований.

Если только принимается во внимание небольшое число критериев, расширение может произойти на основе взаимосвязи субоптимальных решений, соответствующих различным критериям. Эти субоптимальные решения будут все равно получены при вычислениях симплекс-методом. Матрица G^* в этом случае не является квадратной, однако она по-прежнему не обладает седловой точкой. Может случиться, что в качестве оптимальной стратегии 1-го игрока получится чистая стратегия, т. е. одно из этих субоптимальных решений. Дальнейшая возможность расширения опирается на взаимосвязь имеющихся многократных решений, соответствующих единичным оптимизациям. Здесь матрица G^* также не является квадратной.

При практическом проведении вычислений следует оценивать, нужно ли сокращать объем вычислительных операций. На практике при оптимизации производственных программ имеется едва ли более четырех или пяти критериев, которые одновременно нужно учесть, поэтому названные возможности расширения (учет субоптимальных векторов решений или многократных решений) не могут привести к значительному увеличению объема вычислительных операций.

Этот вывод, безусловно, может использоваться, тогда численное решение матричной игры может проводиться, например, симплекс-методом. При четырех или пяти критериях могут использоваться, таким образом, еще многие субоптимальные решения.

Использовать возможности расширения следует только в том случае, если для других критериев также имеются различные субоптимальные решения подходящих численных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Heyde, O. Martens. Methodische Probleme dez Zielfunktionen bei der Ermittlung Optimaler Produktionsprogramm mit Hilfe der linearen Optimierung, Wirtschaftswissenschaft, 1964, 12, № 6, 898—908.
2. O. Habr, O. Borak. Erfahrungen mit der Anwendung von mathematischen Methoden bei der Lösung von komplizierten ökonomischen Problemen in der Industriepraxis, Materialien der Internationalen Konferenz in Warschau vom 9.— 14.7.1962, Sektion I, Thema 9.
3. O. Radzikowski. Methoden zur Einbeziehung mehr als einer Zielfunktion bei der Optimierungsrechnung. Mitteilung des Instituts für Elektrotechnik (Miedzylesie bei Warschau). Vortragsmanuskript für die mehrseitige Institutskonferenz 1965 in Oberbärenburg, DDR.
4. H. Jüttler. Über spieltheoretische Entscheidungssituationen. Konferenzprotokoll der Konferenz über «Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie», Teil I. Akademie-Verlag Berlin, 1964.

Поступила в редакцию
24 V 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА

Б. Г. ПИТТЕЛЬ

(Ленинград)

Рассмотрим следующую модель обмена. Пусть имеется m предпринимателей $A_1, A_2, \ldots, A_m$, владеющих продуктами $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Будем считать, что предприниматель A_i владеет этими продуктами в количествах $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in}$. Вступая в обменные соглашения, предприниматель A_i в итоге будет иметь продуктов в некоторых количествах $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$. Предположим, что количество ассортиментного набора y_i предприниматель A_i оценивает значением функционала:

$$f_i(y_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_{ij}, \quad \alpha_{ij} \geqslant 0 \tag{1}$$

Ясно, что все возможные для предпринимателя A_i ассортиментные наборы y_i должны удовлетворять бюджетному ограничению

$$\sum_j y_{ij} p_j \leqslant \sum_j \beta_{ij} p_j, \quad y_{ij} \geqslant 0, \tag{2}$$

если цены на продукты равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Определение. *Вектор $\bar{p} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n)$ называется равновесным вектором цен, если существуют наборы $\bar{y}_i$, которые, во-первых, максимизируют $f_i(y_i)$ при ограничениях (2) и, во-вторых, такие, что*

$$\sum_i \bar{y}_{ij} = \beta_j = \sum_i \beta_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Равенство (3) — условие равенства спроса и предложения на все продукты.

В настоящей работе доказывается, что при некоторых естественных условиях равновесные цены существуют и их свойства исследуются.

Предложенная модель, вообще говоря, не сводится к частному случаю модели, рассмотренной в [I, § 7]. Однако результаты упомянутой работы могут быть использованы при доказательстве существования равновесия в предлагаемой модели. В статье применяется существенно другой способ доказательства, который, мы надеемся, может иметь самостоятельный интерес.

В [2], а также [3], рассматривалась экономическая модель, содержащая m покупателей $A_1, \ldots, A_m$, владеющих деньгами в количествах $c_1, \ldots, c_m$, и рынок, предлагающий покупателям продукты $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в количествах $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Предполагалось, что покупатель A_i качество покупки $y_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$ оценивает значением функционала (1). Вводилось определение равновесных цен $\bar{p}$ — цен, при которых существуют