при всех $y_{ij} \geqslant 0$. Отсюда

$$c_i(p) \ln f_i(y_i) - \sum_j \pi_j y_{ij} \leqslant c_i(p) \ln f_i(y_i(p)) - \sum_j \pi_j y_{ij}(p), \qquad y_{ij} \geqslant 0 \tag{21}$$

при всех $i \in I(p)$. Положим в этом неравенстве $y_{ij} = (1+\lambda) y_{ij}(p)$, где $\lambda > -1$. Используя однородность функции $f_i(y_i)$, получим

$$\ln(1+\lambda) c_i(p) - \lambda \sum_j \pi_j y_{ij}(p) \leqslant 0.$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $\lambda > -1$, то отсюда легко следует требуемое соотношение

$$c_i(p) = \sum_j \pi_j y_{ij}(p) \tag{22}$$

Укажем также, что после того как доказано в этом случае существование вектора цен $\bar{p} \in Q(\bar{p})$, утверждение, что набор $\bar{y}_i$ максимизирует $f_i(y_i)$ при бюджетном ограничении, легко выводится из неравенств (21), (22) при $p = \pi = \bar{p}$.

Нам кажется, что было бы интересно попытаться дать математическую модель, сколько-нибудь реально описывающую динамику выработки равновесных обменных цен, в предположении, что предприниматели, многократно встречаясь друг с другом (случайным образом или используя какую-либо информацию о своих партнерах), вступают в парные соглашения о ценах, по которым они согласны обмениваться продуктами. Такая модель была бы по существу моделью коллективного поведения. Отметим по этому поводу, что в настоящее время на языке теории автоматов уже ставятся и исследуются некоторые простейшие модели коллективного поведения (см., например, [4—9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Gale. The law supply and demand. Math. Scand., 1955, v. III, № 1.
2. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. E. Eisenberg, D. Gale. Consensus of subjective probabilities: the Pari-mutuel method. Ann. Math. Statist, 1959, v. XXX, № 1.
4. М. Л. Цетлин. Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения. Успехи математических наук, 1963, т. XXVIII, № 4.
5. И. М. Гельфанд, И. И. Пятецкий-Шапиро, М. Л. Цетлин. О некоторых классах игр и игр автоматов. ДАН СССР, 1963, т. 152, № 4.
6. В. И. Брызгалов, И. М. Гельфанд, И. И. Пятецкий-Шапиро, М. Л. Цетлин. Однородные игры автоматов и их моделирование на ЦВМ. Автоматика и телемеханика, 1964, т. XXV, № 11.
7. В. А. Волконский. Асимптотические свойства поведения простейших автоматов в игре. Проблемы передачи информации, 1965, т. I, № 2.
8. В. А. Боровиков, В. И. Брызгалов. Простейшая симметрическая игра многих автоматов. Автоматика и телемеханика, 1965, т. XXVI, № 4.
9. Б. Г. Питтель. Об асимптотических свойствах одного варианта игры Гура. Проблемы передачи информации, 1965, т. I, № 3.

Поступила в редакцию
27 IV 1966

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 3

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕНАЛАДОК

Б. А. ВЛАСЮК

(Москва)

В работах [1—3] при рассмотрении задачи об оптимальном расписании ищется такая последовательность обработки деталей, при которой заданная целевая функция принимает минимально возможное значение. В частности, в работах [1, 2] исследуется задача об оптимальном расписании обработки произвольного числа деталей на одной машине. При рассмотрении этой задачи считается, что заданы длительности обработки каждой детали; отсутствует переналадка машины при переходе с одной детали на другую; с каждой деталью связана функция потерь, зависящая от момента окончания ее обработки; минимизируемая целевая функция равна сумме этих функций потерь по всем деталям. Такая постановка задачи целесообразна, если длительностью и стоимостью переналадок можно пренебречь или если длительность и стоимость переналадок постоянны для всех переходов. На практике, однако, часто возникают случаи, когда переналадки существенны и различны для различных переходов. В настоящей работе рассматривается одна из задач такого рода.

Постановка задачи. Пусть X — множество деталей; $\tau(x)$ — длительность обработки детали $x \in X$; $\alpha(x, t)$ — потери, возникающие в случае, если деталь $x \in X$ будет обработана в момент t, $\beta(x, x')$ — стоимость переналадки с детали x на деталь x' $(x, x' \in X)$.

Будем решать задачу при следующих условиях: 1) в каждый момент времени может обрабатываться только одна деталь (условие неодновременности операций); 2) если обработка какой-либо детали начата, то пока она не будет закончена, машина не может перейти к обработке другой детали (условие неразрывности операций);

3) длительность переналадки с одной детали на другую равна нулю.

Требуется найти такую последовательность обработки деталей, чтобы сумма потерь по всем деталям плюс сумма стоимостей всех переналадок приняла минимально возможное значение.

Для получения выражения целевой функции введем следующие обозначения: $\{x_i\}_A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{|A|}\}$ — некоторая последовательность элементов множества $A \subset X$; Π_A — множество всех возможных таких последовательностей; $|A|$ — число элементов множества A.

При заданной последовательности $\{x_i\}_X$ целевая функция будет иметь вид:

$$L = \sum_{i=1}^{|X|} \alpha(x_i, t(x_i)) + \sum_{i=1}^{|X|} \beta(x_{i-1}, x_i), \tag{1}$$

где

$$t(x_i) = \sum_{k=1} \tau(x_k). \tag{2}$$

Требуется найти такую последовательность $\{x_i\}_X$, чтобы величина L из (1) приняла минимально возможное значение.

Решение задачи. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом динамического программирования. Для произвольного множества $A \subset X$ и произвольного элемента $y \in X - A$ введем в рассмотрение функцию:

$$f(A, y) = \min_{\{x_i\}_A \in \Pi_A} \left[\sum_{i=1}^{|A|} \alpha(x_i, t(x_i)) + \alpha(y, \tau(A) + \tau(y)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{|A|} \beta(x_{i-1}, x_i) + \beta(x_{|A|}, y) \right], \tag{3}$$

где

$$\tau(A) = \sum_{x \in A} \tau(x). \tag{4}$$

Величина $f(A, y)$, как легко видеть, представляет собой минимально возможное значение L из (1) в случае, когда множество деталей равно $A \cup y$ и в последнюю очередь обрабатывается деталь y.

Пусть $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x^*_{|A|}, y\}$ — соответствующая оптимальная последовательность обработки. Тогда из (3) получаем соотношение:

$$f(A, y) = f(A - x^*_{|A|}, x^*_{|A|}) + \alpha(y, \tau(A) + \tau(y)) + \beta(x^*_{|A|}, y).$$

Если в правую часть этого равенства вместо $x^*_{|A|}$ подставить произвольное $z \in A$, то величина правой части может только увеличиться, так как выбранная последовательность, по предположению, является оптимальной. Отсюда получаем основное рекуррентное соотношение:

$$f(A, y) = \min_{z \in A} [f(A - z, z) + \alpha(y, \tau(A) + \tau(y)) + \beta(z, y)]. \tag{5}$$

Величина в левой части (5) представляет собой минимальное значение целевой функции при условии, что сначала обрабатывается множество A деталей, а затем деталь y. Величина в квадратных скобках в правой части (5) представляет собой минимальное значение целевой функции при условии, что сначала обрабатывается множество $A - z$ деталей, затем деталь z и, наконец, деталь y. Уравнение (5) выражает тот факт, что если выбрать z оптимальным образом, то эти величины будут равны между собой.

Начальное условие для решения этого уравнения получаем путем определения величины $f(u, y)$ $(u, y \in X;\ u \neq y)$ непосредственно из формулы (3). Производя простые вычисления, получаем:

$$f(u, y) = \alpha(u, \tau(u)) + \alpha(y, \tau(u) + \tau(y)) + \beta(\varnothing, u) + \beta(u, y), \tag{6}$$

где $\varnothing$ — пустое множество, а $\beta(\varnothing, u)$ соответствует стоимости переналадки на деталь u в начале планируемого периода.

Процедура решения уравнения (5) при начальном условии (6) заключается в следующем.

При $|A| = 1$ по формуле (6) вычисляем величины $f(A, y)$ для всевозможных пар $(A; y)$, у которых $A = u \in X$ и $y \in X - u$.

Зная величины $f(A, y)$ при $|A| = 1$ и применяя соотношения (5), определяем величины $f(A, y)$ для всевозможных пар $(A; y)$, у которых $|A| = 2$.

Аналогичным образом последовательно определяем величины $f(A, y)$ при $|A| = 3, 4, \ldots, |X| - 1$.

Все величины $f(A, y)$ запоминаем и, кроме того, для каждой пары $(A;\ y)$ при $2 \leqslant |A| \leqslant |X| - 1$ запоминаем значение $z = z(A, y)$, при котором выражение в квадратной скобке в правой части (5) достигает минимума. Таким образом, получаем таблицу, содержащую графы: $(A;\ y)$, $f(A, y)$, $z(A, y)$.

$(A;\ y)$	$f(A, y)$	$z(A, y)$	$(A;\ y)$	$f(A, y)$	$z(A, y)$	$(A;\ y)$	$f(A, y)$	$z(A, y)$
(1; 2)	8	1	(4; 2)	16	4	(2,4; 1)	17	2
(1; 3)	4,5	1	(4; 3)	19	4	(2,4; 3)	33	4
(1; 4)	19	1	(1,2; 3)	13,5	1	(3,4; 1)	22	3
(2; 1)	6	2	(1,2; 4)	27	1	(3,4; 2)	21,5	4
(2; 3)	14	2	(1,3; 2)	9,5	3	(1,2,3; 4)	33,5	1
(2; 4)	19	2	(1,3; 4)	23	3	(1,2,4; 3)	36,6	1
(3; 1)	5	3	(1,4; 2)	26	1	(1,3,4; 2)	34	1
(3; 2)	7	3	(1,4; 3)	32,5	1	(2,3,4; 1)	23	2
(3; 4)	14,5	3	(2,3; 1)	8	2			
(4; 1)	17	4	(2,3; 4)	25,5	2			

В этой таблице в первой графе помещается условное обозначение пары $(A;\ y)$; во второй — значение целевой функции при оптимальной последовательности обработки деталей из A; в третьей — условное обозначение элемента из A, который является последним в оптимальной последовательности обработки.

Сравнивая величины $f(A, y)$ при $|A| = |X| - 1$, находим минимальную величину критерия и элемент $y(|X|)$, который должен выполняться на последнем месте. Кроме того, соответствующий элемент $z(A,\ y)$ определяет $y(|X| - 1)$, который должен выполняться на предпоследнем месте.

Далее рассматриваем пару $(A - y(|X|);\ y(|X| - 1))$, находим $y(|X| - 2)$ и т. д., пока не назначим все элементы из X.

Вычислительные аспекты. Несложные вычисления показывают, что число различных пар (A, y) при $|X| = n$ равно $\sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k^n (n - k) = n(2^{n-1} - 1)$. Это число существенно меньше числа вариантов, которые надо сравнить при решении задачи путем полного перебора (число таких вариантов равно числу возможных последовательностей деталей, т. е. $n!$). При не очень больших n задача может быть решена предложенным методом с помощью ЭВМ. Если n велико и памяти или быстродействия ЭВМ не хватает, то предложенный метод позволяет получить приближенное решение задачи путем укрупнения деталей (т. е. путем объединения нескольких деталей в одну, что позволяет уменьшить их общее количество).

Применимость метода к практическим задачам. Предложенный метод позволяет решать практические задачи, в которых необходимо учитывать только стоимость переналадок, а длительностью переналадок можно пренебречь в сравнении с длительностями обработки деталей; или же когда длительность переналадок существенна, но постоянна для различных переходов, т. е. она может быть включена в длительность обработки деталей.

В качестве примера задачи подобного рода можно привести задачу об оптимальном расписании работы прокатного стана, изготавливающего партии металла различных профилей. В этом случае деталями являются партии металла; функции потерь определяются штрафом, который металлургический завод выплачивает за невыполнение заказов в срок; стоимость переналадки определяется потерями из-за простоя стана при переходе с одного профиля на другой. Для того, чтобы в этом случае можно было применить предложенный метод, необходимо, чтобы длительность переналадки была мала в сравнении с длительностью прокатки партий металла. На практике это условие, как правило, выполняется.

Другим примером рассматриваемой задачи является задача об оптимальном расписании запуска партий изделий в мелкосерийном производстве. В этом случае функции потерь определяются дефицитностью изделий в зависимости от времени выпуска.

Еще одним примером задачи расписания с переналадками является задача об оптимальном расписании для коммивояжера, которому необходимо побывать в каждом из заданных городов. В этом примере деталями являются указанные города. Длительностями обработки — длительности пребывания коммивояжера в каждом городе. Функция потерь определяется ожидаемым эффектом от посещения города, зависящим от времени посещения. Переналадкой является переезд из одного города в другой, а стоимостью переналадки — стоимость такого переезда. Как и в предыдущих примерах, описанный метод может быть применен к этой задаче, если длительности переездов из одного города в другой малы по сравнению с длительностями пребывания коммивояжера в городах. Аналогичная задача, но без учета длительности пребывания в городах и потерь, связанных со сроками пребывания, рассмотрена в [1, 4].

Один частный случай. Рассмотрим случай, когда в задаче (1) — (2) длительности обработки деталей равны между собой. В этом случае функция потерь для каждой детали зависит только от места этой детали в последовательности обработки всех деталей из X. Следовательно, вместо функций $\alpha(x, t)$ в рассматриваемом случае можно ввести функции:

$$\bar{\alpha}(x, k) = \alpha(x, k\tau), \quad k = 1, 2, \ldots |X|, \tag{7}$$

где τ — длительность обработки одной детали.

Введем в рассмотрение переменные:

$$v_{xk} = \begin{cases} 1, \text{ если деталь } x \text{ в последовательности} \\ \text{обработки стоит на } k\text{-м месте,} \\ 0, \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$w_{xx'} = \begin{cases} 1, \text{ если в последовательности обработки} \\ \text{за деталью } x \text{ следует деталь } x', \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда целевая функция из (1) может быть записана в виде:

$$L = \sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{|X|} v_{xk} \bar{\alpha}(x, k) + \sum_{x \in X} \sum_{x' \in X} w_{xx'} \beta(x, x'). \tag{8}$$

Переменные $w_{xx'}$ могут быть выражены через v_{xk} с помощью очевидных соотношений:

$$w_{xx'} = \sum_{k=1}^{|X|-1} v_{xk} v_{x'k+1}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получаем:

$$L = \sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{|X|} v_{xk} \bar{\alpha}(x, k) + \sum_{x \in X} \sum_{x' \in X} \sum_{k=1}^{|X|-1} v_{xk} v_{x'k+1} \beta(x, x'). \tag{10}$$

Кроме того, из определения величин v_{xk} следует:

$$\sum_{x \in X} v_{xk} = 1, \quad k = 1, \ldots, |X| \text{ и } \sum_{k=1}^{|X|} v_{xk} = 1, \quad x \in X. \tag{11}$$

Следовательно, в рассматриваемом частном случае задача может быть сформулирована следующим образом: найти переменные v_{xk}, удовлетворяющие соотношениям (11) и принимающие значения 0 или 1, такие, чтобы квадратичная форма (10) приняла минимальное значение.

Таким образом, предложенным методом может быть решена задача целочисленного квадратичного программирования специального вида.

Пример. Прокатный стан должен произвести четыре партии металла различных профилей. Длительности $\tau(x)$ прокатки партий равны:

$$\tau(1) = 2; \ \tau(2) = 1; \ \tau(3) = 1{,}5; \ \tau(4) = 3. \tag{12}$$

Функции потерь $\alpha(x, t)$ равны:

$$\begin{gathered} \alpha(1, t) = \chi_{[7, \infty)}(t - 7), \quad \alpha(2, t) = 2\chi_{[5, \infty)}(t - 5), \\ \alpha(3, t) = 4\chi_{[3, \infty)}(t - 3), \quad \alpha(4, t) = 3\chi_{[1, \infty)}(t - 1), \end{gathered} \tag{13}$$

где $\chi_{[t_0, \infty)}$ — характеристическая функция интервала $[t_0, \infty)$, т. е.

$$\chi_{[t_0, \infty)} = \begin{cases} 1, & t \geqslant t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Иными словами, потери равны нулю до некоторого момента времени, а затем возрастают пропорционально времени. Стоимости переналадок $\beta(x, x')$ выражаются в виде матрицы:

$$\| \beta(x, x') \| = \begin{Vmatrix} 0 & 7 & 1{,}5 & 6 \\ 1 & 0 & 9 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 0 \end{Vmatrix} \tag{14}$$

Стоимости начальных переналадок $\beta(\varnothing, x)$ равны:

$$\beta(\varnothing, 1) = 1; \ \beta(\varnothing, 2) = 5; \ \beta(\varnothing, 3) = 2; \ \beta(\varnothing, 4) = 3. \tag{15}$$

Применяя сначала (6), а затем (5), составляем таблицу.

Сравнивая значения $f(A, y)$ из таблицы для четырех последних пар, находим минимальное значение $L = 23$ для пары $(A; y) = (2, 3, 4; 1)$. Для этой пары $z(A; y) = 2$. Следовательно в 4-ю очередь надо изготовлять партию 1, а в 3-ю — партию 2. Значит, теперь надо рассмотреть пару $(A; y) = (3, 4; 2)$. Из таблицы видно, что $z(A, y)$ для этой пары равно 4. Следовательно, во 2-ю очередь надо выполнять партию 4, а в 1-ю — партию 3. Таким образом, оптимальная последовательность равна $\{3, 4, 2, 1\}$, а минимальное значение $L = 23$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Хелд, Р. М. Карп. Применение динамического программирования к задаче упорядочения. Кибернетический сборник, 1964, № 9.
2. R. Mc Naughton. Scheduling with deadline and loss functions. Manag. Sci., 1959, N 6.
3. Р. Беллман, С. Дрейфус. Прикладные задачи динамического программирования. М. «Мир», 1965.
4. Р. Беллман. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере. Кибернетический сборник, 1964, № 9.

Поступила в редакцию
4 VIII 1965