

Очевидно, случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  можно считать независимыми. Кроме того, будем предполагать, что каждая случайная величина  $X_k$  равномерно распределена на интервале  $(0, 1)$ :

$$P(X_k < a) = a, \quad a \in [0, 1]. \quad (2)$$

Положим

$$-\log X_k = U_k, \quad -\log Y_k = V_k.$$

В силу (2) имеем

$$P(U_k \geq \beta) = P(-\log X_k \geq \beta) = P(X_k \leq e^{-\beta}) = e^{-\beta},$$

$$P(U_k < \beta) = 1 - e^{-\beta}.$$

Значит  $U_k$  имеет плотность  $f_{u_k}(x) = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ , а так как  $V_k = U_1 + \dots + U_k$ , случайная величина  $V_k$  имеет плотность  $f_{v_k}(x) = x^k e^{-x} / k!$ ,  $x \geq 0$ .

Неравенство (1) равносильно неравенству

$$V_{n-1} < -\log \gamma < V_n = V_{n-1} + U_n, \quad (3)$$

выполнение которого означает, что при некотором  $t \in [0, -\log \gamma]$  будет  $V_{n-1} = t$ ,  $U_n > -\log \gamma - t$ .

Случайные величины  $V_{n-1}$  и  $U_n$  независимы. Поэтому вероятность неравенства (3) равна:

$$\begin{aligned} \int_0^{-\log \gamma} f_{v_{n-1}}(t) P(U_n > -\log \gamma - t) dt &= \int_0^{-\log \gamma} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!} e^{\log \gamma + t} dt = \\ &= \frac{\gamma}{(n-1)!} \int_0^{-\log \gamma} t^{n-1} dt = \frac{\gamma (-\log \gamma)^n}{n!} = \frac{N_2}{n! N_1} \log^n \frac{N_1}{N_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, случайная величина  $Z$  распределена асимптотически по закону Пуассона с параметром  $\log N_1 / N_2$ . Не оценивая характера полученной асимптотики, ее можно, по крайней мере в отношении  $N_2$ , считать достаточно удовлетворительной: даже в том наименее благоприятном случае, когда  $N_2 = 1$ , получаем в качестве математического ожидания числа шагов (в данном случае это будет число шагов, приводящих к полному разрешению задачи)  $\log N_1$ , что при достаточно больших  $N_1$  лишь незначительно (на постоянную Эйлера) отличается от соответствующего точного значения. Погрешность в асимптотических характеристиках числа шагов объясняется заменой дискретных значений непрерывными. Более точная оценка этой погрешности представляет собой интересную задачу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Филиппович, О. М. Козлов. О числе шагов при решении задач линейного программирования симплекс-методом. В сб. Техническая кибернетика. Киев, Гостехиздат УССР, 1963.

Поступила в редакцию  
21 XI 1966

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В. Б. РЕУТ

(Калинин)

Широкое использование в стохастических моделях транспортной задачи особенно остро ставит вопрос о затратах машинного времени на ее решение. Автором на основе венгерского метода разработана вычислительная схема решения транспортной задачи, названная методом логических шкал (МЛШ), позволяющая получить существенный выигрыш во времени.

Здесь мы приводим лишь некоторые результаты экспериментальной оценки по времени решения венгерским методом и МЛШ, полученные при использовании ЭВМ М-20.

Оценивалось время решения транспортных задач с квадратными и прямоугольными (сильно вытянутыми) матрицами стоимостей  $\|\pi_{ij}\|$ . Элементы матрицы  $\pi_{ij}$  были целыми числами, распределенными по равномерному закону в интервале  $[0, \pi]$ :

$$\pi_{ij} = E[\xi_{ij}\pi], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Величины  $a_i$  (число средств у  $i$ -го поставщика) и  $b_j$  (число средств, необходимое  $j$ -му потребителю) были также целыми числами, распределенными по равномерному закону в интервалах  $[0, a]$ ,  $[0, b]$  соответственно:

$$a_i = E[\xi_i a], \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ b_j = E[\xi_j b], \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $\xi_{ij}$ ,  $\xi_i$ ,  $\xi_j$  — случайные числа, распределенные по равномерному закону на  $[0, 1]$ . Некоторые результаты исследования представлены на рис. 1—3.

Наиболее трудоемким с точки зрения времени решения является случай, когда  $ma \approx nb$ .

Для квадратных матриц это соответствует условию  $a \approx b$ , для сильно вытянутых матриц ( $m \ll n$ ) —  $b \ll a$ . На рис. 1, 2 представлены зависимости среднего времени решения  $t_{\text{ср}} = f(n)$  от размерности квадратной матрицы при фиксированных значениях  $\pi$ ,  $a$  и  $b$ . Кругами отмечены экспериментально полученные значения  $t_{\text{ср}}$ . (Усреднение для МЛШ проводилось по 50 реализациям, а для венгерского метода — по 20.)

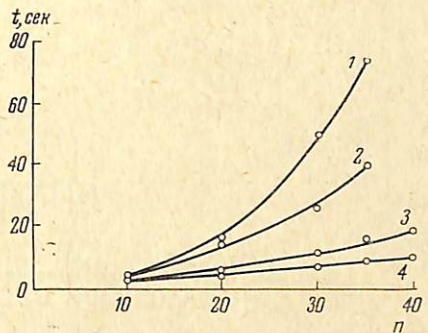


Рис. 1.  $\pi = 64$ ; 1 — B,  $a = 512$ ; 2 — B,  $a = 8$ ; 3 — МЛШ,  $a = 512$ ; 4 — МЛШ,  $a = 8$

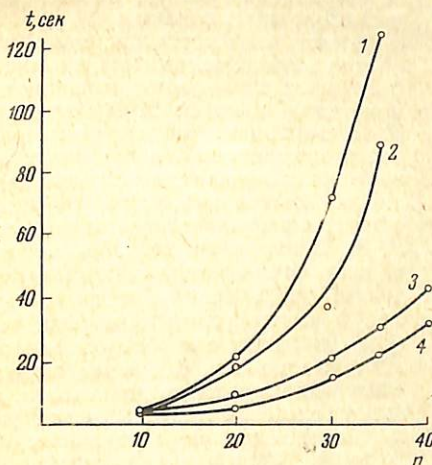


Рис. 2.  $\pi = 2048$ ; 1 — B,  $a = 512$ ; 2 — B,  $a = 8$ ; 3 — МЛШ,  $a = 512$ ; 4 — МЛШ,  $a = 8$

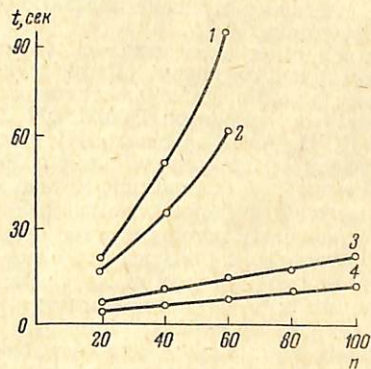


Рис. 3.  $m = 20$ ,  $a = 64$ ,  $e_j = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ; 1 — B,  $\pi = 16384$ ; 2 — B,  $\pi = 64$ ; 3 — МЛШ,  $\pi = 16384$ ; 4 — МЛШ,  $\pi = 64$

Для прямоугольных матриц  $b_j$  было фиксировано:  $b_j = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Из рис. 1—3 видно, что использование МЛШ позволяет сократить время решения сравнительно с венгерским методом в 3—10 раз.

Наиболее эффективен МЛШ при решении задач с сильно вытянутыми матрицами стоимостей. Линейный характер зависимости времени от параметра  $n$  для прямоугольных матриц дает основание считать, что для матриц большой размерности выигрыш во времени решения при использовании МЛШ будет возрастать.

В случае прямоугольных матриц время решения не превосходило (1,5—2)  $t_{\text{ср}}$  для обоих методов.

Поступила в редакцию  
9 II 1966