

ОЦЕНКА ПРОЕКТОВ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА НОРМЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

К. В. АЧЕЛАШВИЛИ

(МОСКВА)

Основная цель данной статьи — получить формулы для сравнительной оценки при помощи сплошного перебора проектов капиталовложений по критерию максимума нормы эффективности при наличии лишь частичной информации относительно будущей чистой экономии от проекта, распределив таким образом результаты работ [1, 2] на случай, когда чистая экономия описывается стохастически.

В статье весь проект или группа взаимосвязанных проектов рассматриваются последовательно как: 1) одно вложение, 2) цепь разнородных вложений.

Определим норму эффективности капиталовложений ρ следующим образом: ρ есть такая норма эффективности капиталовложений (или замещения продукта), которая делает накопленную за весь срок службы объекта сумму чистой экономии, приведенную с учетом запаздывания к начальному моменту времени, плюс приведенная величина ликвидационной стоимости вложения, равной начальной стоимости капиталовложения.

Введем следующие важнейшие обозначения:

$P(0)$ — срок окупаемости вложений; $C(0)$ — стоимость начальных вложений; $Q(t)$ — величина чистой экономии; T — срок службы (списания) вложений; $R(T)$ — ликвидационная стоимость капиталовложений; θ — общая продолжительность временного запаздывания между началом капиталовложений и достижением плановых технико-экономических показателей; τ — время запаздывания, на протяжении которого капиталовложения совсем не дают отдачи.

В детерминированном случае основное интегральное уравнение для определения максимума нормы эффективности ρ , когда проект или взаимосвязанная группа проектов рассматривается как одно вложение и проект освоен полностью, имеет вид:

$$C(0) = \int_0^T Q(t) e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T}. \quad (1)$$

Перейдем к анализу стохастических случаев.

$$a) \quad Q(t) = Q(0) + x, \quad (2)$$

где $Q(0) = \text{const}$ — более или менее гарантированная экономия в каждом году срока службы проекта, а x — непрерывная случайная величина с нормальным распределением вероятностей, т. е. распределением с плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Параметры a и σ^2 являются центром распределения и дисперсией

$$a = M[x] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx.$$

$$\sigma^2 = D[x] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx.$$

x характеризует динамику чистой экономии полностью освоенного проекта или группы взаимосвязанных проектов на протяжении срока амортизации вложений $t = 1, \dots, T$.

Подставляя в (1) значение $Q(t)$ из равенства (2), получим:

$$C(0) = \int_0^T Q(0) e^{-\rho t} dt + \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx \right) e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T},$$

$$C(0) = \frac{Q(0)}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + a \int_0^T e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T},$$

$$C(0) = \frac{Q(0) + a}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T) e^{-\rho T},$$

что после деления на $Q(0)$ и замены $\frac{C(0)}{Q(0)}$ на $\rho(0)$ дает:

$$\rho(0) = \rho \left(1 + \frac{a}{Q(0)} \right) (1 - e^{-\rho T}) + \rho \frac{R(T)}{Q(0)} e^{-\rho T}, \quad (3)$$

т. е. задача сведена к нахождению максимального положительного корня уравнения (3).

$$б) Q(t) = Q(0) + x \quad (4)$$

отличается только формой распределения чистой экономии полностью освоенного вложения. В этом случае по-прежнему $Q(0) = \text{const}$, а x — прерывная случайная величина с распределением Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

(P_m — вероятность того, что случайная величина x принимает значение, равное m).

$$C(0) = \int_0^T Q(0) e^{-\rho t} dt + \int_0^T a e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T},$$

$$C(0) = \frac{Q(0) + a}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T) e^{-\rho T}. \quad (5)$$

$$в) Q(t) = Q(0) + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m, \quad (6)$$

где динамика чистой экономии на протяжении срока службы проекта ($t = 1, \dots, T$) представлена системой случайных величин, т. е. $Q(0) = \text{const}$, $x_1, \dots, x_m$ — система m случайных зависимых величин, а b_q — постоянные коэффициенты.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$C(0) = \frac{Q(0)}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \int_0^T M \left[\sum_{q=1}^m b_q x_q \right] e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T}. \quad (7)$$

Как известно,

$$M \left[\sum_{q=1}^m b_q x_q \right] = \sum_{q=1}^m b_q M[x_q] = \sum_{q=1}^m b_q a_q,$$

так что

$$C(0) = \frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T) e^{-\rho T}, \quad (8)$$

или, переходя к срокам окупаемости:

$$P(0) \rho = \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^m b_q a_q}{Q(0)} \right) (1 - e^{-\rho T} + \rho) \frac{R(T)}{Q(0)} e^{-\rho T}, \quad (9)$$

т. е. вновь нужно найти $\rho_{\max}$ из уравнения (9).

Когда все $b_q (q = 1, \dots, m) = 1$, получим

$$C(0) = \frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T) e^{-\rho T}.$$

У случайных величин $x_q (q = 1, \dots, m)$, входящих в систему случайных величин, обычно бывают разные законы распределения, но не исключено, что у всех $x_q (q = 1, \dots, m)$ будет один и тот же закон распределения.

Эти случайные величины могут быть как дискретными, так и непрерывными. Уравнение (9) будет справедливо в обоих случаях.

В практически наиболее важном случае, однако, бывает более или менее точно известна часть чистой экономии в каждом году срока службы вложений и некоторая функция, описывающая другую часть чистой экономии на протяжении всего срока службы вложений, а остальную, неизвестную, часть чистой экономии можно лишь описать как случайный процесс. Это приводит к еще одному случаю.

$$г) \quad Q(t) = Q(0) + Q_1(t) + b_1 x_1 + \dots + b_m x_m, \quad (10)$$

где $Q(0) = \text{const}$, $Q_1(t)$ — некая функция от t , $x_1, \dots, x_m$ — система m случайных зависимых величин, b_q — постоянные коэффициенты.

С помощью уравнения (4) получим:

$$C(0) = \frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \int_0^T Q_1(t) e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T}, \quad (11)$$

где a_q — центр распределения случайных величин x_q . $\rho_{\max}$ из уравнений (11) для сравниваемых проектов может быть найдено при спецификации ядра уравнения (11). Рассмотрим наиболее характерные формы:

1) $Q_1(t) = Q_1(0) (d_1 + C_1 t)$, где d_1 и C_1 — постоянные. Из уравнения (11):

$$C(0) = \frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T} + Q_1(0) \int_0^T (d_1 + C_1 t) e^{-\rho t} dt + R(T) e^{-\rho T}). \quad (12)$$

Обозначим через I интеграл

$$\int_0^T (d_1 + C_1 t) e^{-\rho t} dt.$$

Вычисление этого интеграла дает:

$$I = \frac{d_1}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \frac{C_1 [1 - (1 + \rho T) e^{-\rho T}]}{\rho^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (12), получим:

$$C(0) = \frac{Q(0) + d_1 Q_1(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \\ + \frac{C_1 Q_1(0) [1 - (1 + \rho T) e^{-\rho T}]}{\rho^2} + R(T) e^{-\rho T}. \quad (13)$$

Для оценки сравниваемых проектов в этом случае требуется найти наибольшие положительные корни уравнений (13) для каждого из проектов и выбрать проект с абсолютно максимальным $\rho_{\max}$.

Можно рассмотреть еще случай, когда $Q_1(t)$ имеет следующие формы:

- 2) $Q_1(t) = Q_2(0) (d_2 - C_2 t),$
- 3) $Q_1(t) = Q_3(0) \ln (d_3 - C_3 t),$
- 4) $Q_1(t) = Q_4(0) = \text{const},$
- 5) $Q_1(t) = Q_5(0) \ln (d_5 + C_5 t),$
- 6) $Q_1(t) = Q_6(0) t (d_6 - C_6 t),$
- 7) $Q_1(t) = Q_7(0) t e^{-\alpha t},$
- 8) $Q_1(t) = Q_8(0) t \ln (d_8 - C_8 t).$

Все $Q_i(0)$ ($i = 2, \dots, 8$) = const, d_i и C_i = const, α = const.

Подробно эти варианты и их экономическую интерпретацию мы рассмотрим для более общего случая цепи капиталовложений с переменной начальной и ликвидационной стоимостью вложения.

Эффективность проектов капиталовложений и соответственно расчетные формулы для оценки максимальных норм эффективности вложений на уровне отрасли или отдельного проекта определяются различно не только при разных формах функции чистой экономии, но и при разных типах временных запаздываний (характеристику различных форм запаздываний можно найти, например, в работе [3]): целесообразность выполнения проектов сильно зависит от объема замораживаемых средств и продолжительности периода замораживания.

Мы приведем уравнения лишь для капиталовложений, описываемых следующими видами временных запаздываний.

Запаздывание типа фиксированного отставания в τ лет (месяцев): проект начинает давать полную отдачу только после окончания капиталовложений и ввода всех мощностей.

Комбинированное запаздывание, включающее простое экспоненциальное запаздывание: на начальных стадиях проект не дает никакой отдачи, а на последующих стадиях чистая экономия экспоненциально нарастает по мере ввода капиталовложений и мощностей. Таким образом,

$$\theta = \tau + 1/\gamma.$$

Комбинированное запаздывание, включающее двойное экспоненциальное запаздывание, т. е. $\theta = \tau + 1/\gamma_1 + 1/\gamma_2$, где γ , γ_1 и γ_2 есть обратные величины временных постоянных (подробный вывод формул для названных типов запаздываний в детерминированном случае см. в [2]).

При фиксированном запаздывании $\theta = \tau$ получим для случаев a , b , c и z соответственно из формул:

$$\begin{aligned} C(0)e^{\rho\tau} &= \frac{Q(0) + a}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T)e^{-\rho T}, \\ P(0)\rho e^{\rho\tau} &= \left(1 + \frac{a}{Q(0)}\right)(1 - e^{-\rho T}) + \rho \frac{R(T)}{Q(0)} e^{-\rho T}, \end{aligned} \quad (14)$$

то же самое, что в случае a ;

$$\begin{aligned} C(0)e^{\rho\tau} &= \frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T)e^{-\rho T}, \\ P(0)\rho e^{\rho\tau} &= \left(1 + \frac{\sum_{q=1}^m b_q a_q}{Q(0)}\right)(1 - e^{-\rho T}) + \rho \frac{R(T)}{Q(0)} e^{-\rho T}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C(0)e^{\rho\tau} &= \frac{Q(0) + d_1 Q_1(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \\ &+ \frac{C_1 Q_1(0) [1 - (1 + \rho T) e^{-\rho T}]}{\rho^2} + R(T)e^{-\rho T}. \end{aligned} \quad (16)$$

При комбинированном запаздывании обоих видов $\theta = \tau + 1/\gamma$ и $\theta = \tau + 1/\gamma_1 + 1/\gamma_2$ получим для случаев a — z соответственно:

$$C(0)e^{\rho\tau} = \frac{\gamma}{\rho + \gamma} \left[\frac{Q(0) + a}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T)e^{-\rho T} \right] \quad (17)$$

и

$$C(0)e^{\rho\tau} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\rho + \gamma_1)(\rho + \gamma_2)} \left[\frac{Q(0) + a}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T)e^{-\rho T} \right], \quad (18)$$

$$C(0)e^{\rho\tau} = \frac{\gamma}{\rho + \gamma} \left[\frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T)e^{-\rho T} \right] \quad (19)$$

и

$$C(0)e^{\rho\tau} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\rho + \gamma_1)(\rho + \gamma_2)} \left[\frac{Q(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + R(T)e^{-\rho T} \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned} C(0)e^{\rho\tau} &= \frac{\gamma}{\rho + \gamma} \left\{ \frac{Q(0) + d_1 Q_1(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \right. \\ &\left. + \frac{C_1 Q_1(0) [1 - (1 + \rho T) e^{-\rho T}]}{\rho^2} + R(T)e^{-\rho T} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

II

$$C(0)e^{\rho T} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\rho + \gamma_1)(\rho + \gamma_2)} \left\{ \frac{Q(0) + d_1 Q_1(0) + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T}) + \frac{C_1 Q_1(0) [1 - (1 + \rho T) e^{-\rho T}]}{\rho^2} + R(T) e^{-\rho T} \right\}. \quad (22)$$

Делением на $Q(0)$ в (17) — (20) легко переходим к уравнениям, содержащим сроки окупаемости — $P(0)$.

Получим уравнения для сравнительной оценки проектов капиталовложений в общем случае, когда каждый проект и тем более группа взаимосвязанных проектов представляет собой цепь капиталовложений с переменной начальной и ликвидационной стоимостью каждого вложения, с различными для каждого элемента цепи чистой экономией и сроком возмещения (службы).

Приведенная стоимость одного звена s_1 -го возмещения при неравных интервалах возмещения будет

$$C_{1j}^{s_1} e^{-\rho_j \sum_{i_1=0}^{s_1-1} T_{1j}^{(i_1)}}. \quad (23)$$

Поэтому стоимость капиталовложения из n_1 единиц составит:

$$C_{1j} = \sum_{s_1=0}^{n_1} C_{1j}^{(s_1)} e^{-\rho_j \sum_{i_1=0}^{s_1-1} T_{1j}^{(i_1)}}. \quad (24)$$

Следовательно, общая сумма капиталовложений в момент $t = 0$ будет равна:

$$C_j = \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{s_k=0}^{n_k} C_{kj}^{(s_k)} e^{-\rho_j \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_{kj}^{(i_k)}}, \quad (25)$$

где λ — количество звеньев цепи капиталовложений.

Ликвидационная стоимость одного звена цепи вложений в $t = 0$ будет равна:

$$R_{1j} = \sum_{s_1=0}^{n_1} R_{1j}^{(s_1)} (T_{1j}^{(s_1)}) e^{-\rho_j \sum_{i_1=0}^{s_1-1} T_{1j}^{(i_1)}}. \quad (26)$$

Последняя формула для всей цепи вложений принимает вид:

$$R_j = \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{s_k=0}^{n_k} R_{kj}^{(s_k)} (T_{kj}^{(s_k)}) e^{-\rho_j \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_{kj}^{(i_k)}}. \quad (27)$$

Чистая экономия приводится, во-первых, к началу срока службы данного элемента цепи вложений и, во-вторых, к начальному моменту времени $t = 0$. Для первого возмещения первого звена цепи вложений оба момента времени совпадают:

$$Q_{1j}^{(1)} = \int_0^{T_{1j}^{(1)}} Q_{1j}^{(1)}(t) e^{-\rho_j t} dt, \quad (28)$$

а для любого возмещения s_1 принимает вид

$$Q_{1j}^{(s_1)} = \left[\int_0^{T_{1j}^{(s_1)}} Q_{1j}^{(s_1)}(t) e^{-\rho_j t} dt \right] e^{-\rho_j \sum_{i=0}^{s_1-1} T_{1j}^{(i_1)}} \quad (29)$$

и общая сумма чистой экономии одного звена цепи вложений в случае n_1 возмещений:

$$Q_{1j} = \sum_{s_1=0}^{n_1} \left[e^{-\rho_j \sum_{i=0}^{s_1-1} T_{1j}^{(i_1)}} \int_0^{T_{1j}^{(s_1)}} Q_{1j}^{(s_1)}(t) e^{-\rho_j t} dt \right]. \quad (30)$$

Последняя формула для всей цепи вложений принимает вид:

$$Q_j = \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{s_k=0}^{n_k} \left[e^{-\rho_j \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_{kj}^{(i_k)}} \int_0^{T_{kj}^{(s_k)}} Q_{kj}^{(s_k)}(t) e^{-\rho_j t} dt \right]. \quad (31)$$

В соответствии с уравнением (4) для цепи вложений получаем условие

$$C_j = Q_j + R_j, \quad (32)$$

которое в развернутой форме имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{s_k=0}^{n_k} C_{kj}^{(s_k)} e^{-\rho_j \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_{kj}^{(i_k)}} &= \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{s_k=0}^{n_k} \left[e^{-\rho_j \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_{kj}^{(i_k)}} \int_0^{T_{kj}^{(s_k)}} Q_{kj}^{(s_k)}(t) e^{-\rho_j t} dt \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\lambda} \sum_{s_k=0}^{n_k} R_{kj}^{(s_k)} (T_{kj}^{(s_k)}) e^{-\rho_j \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_{kj}^{(i_k)}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Это и есть обобщение уравнения (4) на случай конечной цепи капиталовложений.

Применим эту формулу для случая g , где чистая экономия берется как сумма постоянной величины экономии, функции времени и суммы случайных прерывных или непрерывных величин (см. (10)). Предположим, что цепь вложений содержит восемь звеньев и каждому звену соответствует своя функция чистой экономии. Эти функции могут быть разными или все звенья может описывать одна и та же функция чистой экономии.

Впредь во всех формулах не будем писать индекс j и предположим, что эти формулы справедливы для любой отрасли народного хозяйства.

Допустим, что функции чистой экономии соответственно по каждому звену имеют вид

$$Q_1(t) = \text{const}, \quad (34)$$

т. е. частичное вложение описывается усредненной по времени величиной чистой экономии. Это практически один из наиболее частых случаев.

$$Q_2(t) = Q_2(0) (d_2 - C_2 t), \quad (35)$$

где d_2 и C_2 — постоянные и $C_2 \ll d_2$; чистая экономия монотонно убывает.

$$Q_3(t) = Q_3(0) \ln (d_3 - C_3 t), \quad (36)$$

чистая экономия также убывает, но медленнее.

$$Q_4(t) = Q_4(0)(d_4 + C_4t), \quad (37)$$

чистая экономия монотонно возрастает.

$$Q_5(t) = Q_5(0) \ln(d_5 + C_5t), \quad (38)$$

чистая экономия также возрастает, но медленнее.

$$Q_6(t) = Q_6(0)t(d_6 - C_6t), \quad (39)$$

где d_6 и C_6 — постоянные и $C_6 \ll d_6$; в этом случае чистая экономия сначала возрастает до максимума, а затем убывает.

$$Q_7(t) = Q_6(0)te^{-\alpha t}, \quad \alpha \ll 1, \quad (40)$$

т. е. $Q_7(t)$ — экспоненциальная функция; чистая экономия в этом случае сначала возрастает до максимума, а затем под влиянием морального износа и других факторов экспоненциально убывает.

$$Q_8(t) = Q_8(0)t \ln(d_8 - C_8t), \quad (41)$$

где $C_8 \ll d_8$; в этом случае имеется длительный период возрастания чистой экономии и медленное уменьшение ее к концу срока службы.

Исходя из общего определения чистой экономии для случая z (10), получим функцию чистой экономии соответственно для каждого звена:

$$Q_{1*}(t) = Q_{10}(0) + Q_1(0) + b_{11}x_{11} + b_{21}x_{21} + \dots + b_{m1}x_{m1}. \quad (42)$$

$$Q_{2*}(t) = Q_{20}(0) + Q_2(0)(d_2 - C_2t) + b_{12}x_{12} + b_{22}x_{22} + \dots + b_{m2}x_{m2}. \quad (43)$$

$$Q_{3*}(t) = Q_{30}(0) + Q_3(0) \ln(d_3 - C_3t) + b_{13}x_{13} + b_{23}x_{23} + \dots + b_{m3}x_{m3}. \quad (44)$$

$$Q_{4*}(t) = Q_{40}(0) + Q_4(0) \ln(d_4 + C_4t) + b_{14}x_{14} + b_{24}x_{24} + \dots + b_{m4}x_{m4}. \quad (45)$$

$$Q_{5*}(t) = Q_{50}(0) + Q_5(0) \ln(d_5 + C_5t) + b_{15}x_{15} + b_{25}x_{25} + \dots + b_{m5}x_{m5}. \quad (46)$$

$$Q_{6*}(t) = Q_{60}(0) + Q_6(0)t(d_6 - C_6t) + b_{16}x_{16} + b_{26}x_{26} + \dots + b_{m6}x_{m6}. \quad (47)$$

$$Q_{7*}(t) = Q_{70}(0) + Q_7(0)te^{-\alpha t} + b_{17}x_{17} + b_{27}x_{27} + \dots + b_{m7}x_{m7}. \quad (48)$$

$$Q_{8*}(t) = Q_{80}(0) + Q_8(0)t \ln(d_8 - C_8t) + b_{18}x_{18} + b_{28}x_{28} + \dots + b_{m8}x_{m8}. \quad (49)$$

В этих выражениях все $Q_{k0}(0)$ и $Q_k(0)$ ($k = 1, \dots, 8$) — постоянные величины. Все b_{qk} ($q = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, 8$) — постоянные коэффициенты.

Подставим эти значения в уравнение (33). Для упрощения вычислений будем предполагать, что каждое звено при любом его возмещении характеризуется одной и той же функцией чистой экономии.

В таких условиях уравнение (33) даст:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} C_k^{(s_k)} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} = \sum_{s_1=0}^{n_1} e^{-\rho \sum_{i_1=0}^{s_1-1} T_1^{(i_1)}} T_1^{(s_1)} \int_0^{T_1^{(s_1)}} Q_{1*}(t) e^{-\rho t} dt + \\ & + \sum_{s_2=0}^{n_2} e^{-\rho \sum_{i_2=0}^{s_2-1} T_2^{(i_2)}} T_2^{(s_2)} \int_0^{T_2^{(s_2)}} Q_{2*}(t) e^{-\rho t} dt + \sum_{s_3=0}^{n_3} e^{-\rho \sum_{i_3=0}^{s_3-1} T_3^{(i_3)}} T_3^{(s_3)} \int_0^{T_3^{(s_3)}} Q_{3*}(t) e^{-\rho t} dt + \\ & + \sum_{s_4=0}^{n_4} e^{-\rho \sum_{i_4=0}^{s_4-1} T_4^{(i_4)}} T_4^{(s_4)} \int_0^{T_4^{(s_4)}} Q_{4*}(t) e^{-\rho t} dt + \sum_{s_5=0}^{n_5} e^{-\rho \sum_{i_5=0}^{s_5-1} T_5^{(i_5)}} T_5^{(s_5)} \int_0^{T_5^{(s_5)}} Q_{5*}(t) e^{-\rho t} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s_6=0}^{n_6} e^{-\rho \sum_{i_6=0}^{s_6-1} T_6^{(i_6)}} \int_0^{T_6^{(s_6)}} Q_{6*}(t) e^{-\rho t} dt + \sum_{s_7=0}^{n_7} e^{-\rho \sum_{i_7=0}^{s_7-1} T_7^{(i_7)}} \int_0^{T_7^{(s_7)}} Q_{7*}(t) e^{-\rho t} dt + \\
& + \sum_{s_8=0}^{n_8} e^{-\rho \sum_{i_8=0}^{s_8-1} T_8^{(i_8)}} \int_0^{T_8^{(s_8)}} Q_{8*}(t) e^{-\rho t} dt + \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} R_k^{(s_k)} (T_k^{(s_k)}) e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k} T_k^{(i_k)}}. \quad (50)
\end{aligned}$$

Для упрощения вычислений обозначим интегралы в уравнении (50) соответственно буквами I_k ($k = 1, \dots, 8$), т. е.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{T_1^{(s_1)}} \left(Q_{10}(0) + Q_1(0) + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_1} x_{q_1} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_2 &= \int_0^{T_2^{(s_2)}} \left(Q_{20}(0) + Q_2(0) (d_2 - C_2 t) + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_2} x_{q_2} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_3 &= \int_0^{T_3^{(s_3)}} \left(Q_{30}(0) + Q_3(0) \ln (d_3 - C_3 t) + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_3} x_{q_3} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_4 &= \int_0^{T_4^{(s_4)}} \left(Q_{40}(0) + Q_4(0) (d_4 + C_4 t) + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_4} x_{q_4} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_5 &= \int_0^{T_5^{(s_5)}} \left(Q_{50}(0) + Q_5(0) \ln (d_5 + C_5 t) + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_5} x_{q_5} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_6 &= \int_0^{T_6^{(s_6)}} \left(Q_{60}(0) + Q_6(0) t (d_6 - C_6 t) + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_6} x_{q_6} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_7 &= \int_0^{T_7^{(s_7)}} \left(Q_{70}(0) + Q_7(0) t e^{-\alpha t} + M \left[\sum_{q=1}^m b_{q_7} x_{q_7} \right] \right) e^{-\rho t} dt. \\
I_8 &= \int_0^{T_8^{(s_8)}} \left(Q_{80}(0) + Q_8(0) t \ln (d_8 - C_8 t) + M \left[\sum_{p=1}^m b_{q_8} x_{q_8} \right] \right) e^{-\rho t} dt.
\end{aligned}$$

Вычислим каждый интеграл отдельно, а потом будем суммировать.

Вычислим первый интеграл I_1 . Обозначив сумму постоянных величин $Q_{10}(0) = \text{const}$ и $Q_1(0) = \text{const}$ через $Q_{11}(0) = \text{const}$, получим:

$$I_1 = \frac{Q_{11}(0) + \sum_{q=1}^m b_{q_1} a_{q_1}}{\rho} (1 - e^{-\rho T_1^{(s_1)}}).$$

Вычисление второго интеграла I_2 даст:

$$\begin{aligned}
& \rho \left[Q_{20}(0) + Q_2(0) d_2 + \sum_{q=1}^m b_{q_2} a_{q_2} \right] (1 - e^{-\rho T_2^{(s_2)}}) - \\
I_2 &= \frac{-Q_2(0) C_2 [1 - (1 + \rho T_2^{(s_2)}) e^{-\rho T_2^{(s_2)}}]}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла I_3 будем пользоваться правилом «интегрирования по частям», а потом разложим $e^{-\rho/C_3(d_3-C_3t)}$ в степенной ряд и ограничимся первыми тремя слагаемыми.

$$I_3 = \frac{\left[Q_{30}(0) + \sum_{q=1}^m b_{q_3} a_{q_3} \right] (1 - e^{-\rho T_3^{(s_3)}}) + Q_3(0) \{ \ln d_3 - e^{-\rho T_3^{(s_3)}} \ln (d_3 - C_3 T_3^{(s_3)}) \}}{\rho} +$$

$$+ \frac{e^{-d_3/C_3 \rho} [\ln (d_3 - C_3 T_3^{(s_3)}) - \ln d_3 - \rho T_3^{(s_3)} + \frac{\rho^2 T_3^{(s_3)}}{4C_3} (C_3 T_3^{(s_3)} - 2d_3)]}{\rho}.$$

Интеграл I_4 получаем аналогично I_2 :

$$I_4 = \frac{\rho \left[Q_{40}(0) + Q_4(0) d_4 + \sum_{q=1}^m b_{q_4} a_{q_4} \right] (1 - e^{-\rho T_4^{(s_4)}}) + Q_4(0) C_4 [1 - (1 + \rho T_4^{(s_4)}) e^{-\rho T_4^{(s_4)}}]}{\rho^2}.$$

Интеграл I_5 получаем аналогично I_3 :

$$I_5 = \frac{\left[Q_{50}(0) + \sum_{q=1}^m b_{q_5} a_{q_5} \right] (1 - e^{-\rho T_5^{(s_5)}}) + Q_5(0) \{ \ln d_5 - e^{-\rho T_5^{(s_5)}} \ln (d_5 + C_5 T_5^{(s_5)}) \}}{\rho} +$$

$$+ \frac{e^{d_5/C_5 \rho} [\ln (d_5 + C_5 T_5^{(s_5)}) - \ln d_5 - \rho T_5^{(s_5)} + \frac{\rho^2 T_5^{(s_5)}}{4C_5} (C_5 T_5^{(s_5)} + 2d_5)]}{\rho}.$$

Вычисление интегралов I_6 , I_7 и I_8 даст:

$$I_6 = \frac{\rho^2 \left[Q_{60}(0) + \sum_{q=1}^m b_{q_6} a_{q_6} \right] (1 - e^{-\rho T_6^{(s_6)}}) + Q_6(0) \{ [-d_6 \rho (1 + \rho T_6^{(s_6)}) +$$

$$+ [\rho^2 (T_6^{(s_6)})^2 2\rho T_6^{(s_6)} + 2] C_6 \} e^{-\rho T_6^{(s_6)}} + \rho d_6 - 2C_6 \}}{\rho^3}.$$

$$I_7 = \frac{Q_{70}(0) + \sum_{q=1}^m b_{q_7} a_{q_7}}{\rho} (1 - e^{-\rho T_7^{(s_7)}}) +$$

$$+ \frac{Q_7(0)}{(\rho + \alpha)^2} \{ 1 - [1 + (\rho + \alpha) T_7^{(s_7)}] e^{-(\rho + \alpha) T_7^{(s_7)}} \}.$$

$$I_8 = \frac{Q_{80}(0) + \sum_{q=1}^m b_{q_8} a_{q_8}}{\rho} (1 - e^{-\rho T_8^{(s_8)}}) +$$

$$+ \frac{Q_{80}(0) C_8 [\ln d_8 - e^{-\rho T_8^{(s_8)}} \ln (d_8 - C_8 T_8^{(s_8)}) (1 + \rho T_8^{(s_8)}) 1 - e^{-\rho T_8^{(s_8)}}] + e^{-d_8/C_8 \rho} \times$$

$$\times (d_8 \rho - C_8) [\ln (d_8 - C_8 T_8^{(s_8)}) - \ln d_8 - \rho T_8^{(s_8)} + \frac{\rho^2}{4C_8} (C_8 T_8^{(s_8)} - 2d_8)] Q_{80}(0)}{C_8 \rho^2}.$$

Таким образом, уравнение (50) принимает вид:

$$\sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} C_k^{(s_k)} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} = \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} I_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} R_k^{(s_k)} (T_k^{(s_k)}) e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k} T_k^{(i_k)}}. \quad (51)$$

Из этого уравнения можно получить выражение для случая 2, когда функция $Q_1(t)$ имеет различные виды. Для этого надо все цепи капиталовложений рассмотреть как одно звено соответствующей функции чистой экономии.

Рассмотрим частный случай: получим выражение для вычисления $\rho_{\max}$ при $Q_1(t) = Q_1(0)(d + Ct)$. Для этого объединяем все цепи капиталовложений в одно звено ($\lambda = 1$) и рассматриваем только первоначальное вложение ($C^0 = C(0)$ и $n_1 = 0$). Уравнение (51) при таких условиях даст:

$$C^0 = I + R(T^0) e^{-\rho T^0} = \frac{Q(0) + Q_1(0)d + \sum_{q=1}^m b_q a_q}{\rho} (1 - e^{-\rho T^0}) +$$

$$+ \frac{CQ_1(0)[1 - (1 + \rho T^0)e^{-\rho T^0}]}{\rho^2} + R(T^0) e^{-\rho T^0}.$$

Поскольку $T^0 = T$, $C = C_1$ и $d = d_1$, полученное выражение действительно совпадает с ранее полученным выражением (13).

Введем в формулу (51) эффект запаздывания. Для упрощения вычислений допустим, что все звенья характеризуются запаздыванием одного типа. Тогда получим для запаздывания типа фиксированного отставания в τ лет (месяцев):

$$\sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} C_k^{(s_k)} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} e^{\rho \tau} = \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} I_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} R_k^{(s_k)} (T_k^{(s_k)}) e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k} T_k^{(i_k)}}. \quad (52)$$

Для комбинированного запаздывания, включающего простое экспоненциальное запаздывание, т. е. $\theta = \tau + 1/\gamma$:

$$\sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} C_k^{(s_k)} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} e^{\rho \tau} = \left[\sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} I_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^8 \sum_{s_k=0}^{n_k} R_k^{(s_k)} (T_k^{(s_k)}) e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k} T_k^{(i_k)}} \right] \frac{\gamma}{\rho + \gamma}. \quad (53)$$

Для комбинированного запаздывания, включающего двойное экспоненциальное запаздывание, т. е. $\theta = \tau + 1/\gamma_1 + 1/\gamma_2$:

$$\sum_{k=1}^s \sum_{s_k=0}^{n_k} C_k^{(s_k)} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} e^{\rho\tau} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\rho + \gamma_1)(\rho + \gamma_2)} \left[\sum_{k=1}^s \sum_{s_k=0}^{n_k} e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k-1} T_k^{(i_k)}} I_k + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^s \sum_{s_k=0}^{n_k} R_k^{(s_k)} (T_k^{(s_k)}) e^{-\rho \sum_{i_k=0}^{s_k} T_k^{(i_k)}} \right]. \quad (54)$$

Формулы (51) — (54) легко распространить и на случай, когда разные звенья цепи вложений имеют различную форму и неодинаковую продолжительность запаздываний. Тогда отбор наилучших проектов капиталовложений сведется к последовательному нахождению положительных $\rho_{\max}$ для каждой цепи вложений и принятию проектов с наибольшими $\rho_{\max}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Михалевский. Оценка проектов капиталовложений по критерию максимума нормы эффективности. Плановое хозяйство, 1964, № 11.
2. Б. Н. Михалевский. Две задачи оценки эффективности капиталовложений в отрасль. В кн. Применение математики в экономических исследованиях и планировании. Т. III. Под ред. акад. В. С. Немчинова. М., «Мысль», 1965.
3. Р. Аллен. Математическая экономия. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

Поступила в редакцию
29 I 1965