

МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА ПРИ НАЛИЧИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОИЗВОДСТВ

Л. М. ДУДКИН

(МОСКВА)

В обычной математической модели межотраслевого баланса предполагается, что для производства продукции каждого вида существует лишь один технологический способ и лишь один набор нормативов затрат на единицу этой продукции. Между тем в действительности имеется множество возможных технологических способов производства продукции каждого вида, с различными нормативами затрат. Дело осложняется еще тем, что многие из этих технологических способов представляют собой производства нескольких совместно получаемых продуктов. В таких производствах затраты осуществляются не на каждый из совместно получаемых продуктов в отдельности, а на производство комплекса продуктов. Так, в производстве фенола и ацетона кумольным способом оба эти продукта получают одновременно при разложении одного полупродукта — изопропилбензола.

При решении различных экономических задач, основанных на математической модели межотраслевого баланса, стараются предварительно распределить затраты на совместное производство комплексной продукции между отдельными ее компонентами. Наиболее известными принципами такого распределения затрат являются следующие: 1) пропорционально весу совместно получаемых продуктов; 2) пропорционально их физическому объему; 3) по соотношениям стоимости их производства при раздельном получении, когда таковое возможно (этот способ применяется при распределении стоимостных затрат); 4) в соответствии с долей различных компонентов сырья в образовании молекул получаемых продуктов; 5) по соотношениям энергозатрат при раздельном получении каждого продукта; 6) по доле энергетических затрат, теоретически необходимых для превращения сырья в каждый из продуктов (два последних способа предлагаются для разнесения энергозатрат или всех затрат в случае преобладания энергозатрат в себестоимости производства и др.).

Например, затраты пиролиза распределяются в настоящее время между этиленом и пропиленом пропорционально весу получаемых продуктов.

Часто различные виды затрат разносят разными способами. Так, при распределении затрат между фенолом и ацетоном, получаемыми кумольного института технико-экономических исследований по химии (НИИТЭХИМ), при формировании нормативов затрат для межотраслевого баланса две основные сырьевые фракции (бензол и попан-пропиленовая фракция) разносят между фенолом и ацетоном способом 4, а остальные компоненты, получаемые на коксохимических предприятиях путем переработки сырого бензола, распределяются в основном способом 1 с той лишь

поправкой, что вес получаемого тяжелого бензола принимается при этом распределении затрат с коэффициентом 0,8, а сероуглеродной фракции — с коэффициентом 0,9, т. е. несколько ниже, чем при точном распределении затрат по весу.

Все описанные выше методы разнесения затрат приводят к ошибкам в решении экономических задач, связанных с использованием межотраслевого баланса. Почему же возникает такая ошибка? Примем сначала предположение, что продукция каждого вида может быть компонентой комплексной продукции лишь какого-то одного вида.

Введем понятия большей и меньшей относительной потребности в продукции данного вида как компоненте комплексной продукции. Если отношение потребности в продукте данного вида к потребности в другом продукте из той же комплексной продукции больше, чем отношение, в котором эти два продукта содержатся в ней, то мы будем говорить, что относительная потребность в первом продукте большая, чем во втором. Если отношение потребности в данном продукте к потребности в каждом другом продукте из того же комплекса больше, чем все соответствующие отношения, в которых количество этого продукта, содержащееся в комплексной продукции, находится к количествам содержащихся в ней других компонентов, то мы будем говорить о наибольшей относительной потребности в данном продукте.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы данной комплексной продукции хватало для обеспечения потребностей во всех ее компонентах, является следующее: комплексной продукции данного вида следует производить такое количество, какое необходимо для покрытия общей потребности в том продукте данного комплекса, относительная потребность в котором наибольшая. Это условие является достаточным потому, что если этой комплексной продукции хватает для покрытия потребности в продукте с наибольшей относительной потребностью, то ее тем более хватит для покрытия потребности в остальных продуктах. Оно является необходимым потому, что если этой комплексной продукции не хватит для покрытия потребности в продукте с наибольшей относительной потребностью, то ее явно недостаточно, независимо от того, хватит ли ее для покрытия потребности в остальных продуктах данного комплекса. Следовательно, для установления необходимых размеров производства данной комплексной продукции необходимо и достаточно знать тот продукт из комплекса, относительная потребность в котором наибольшая, и общую потребность в этом продукте.

Однако, если конечное потребление считается заданным до расчета межотраслевого баланса, то производственное потребление может быть определено лишь по результатам балансового расчета. Это значит, что относительная потребность в различных продуктах комплексного производства и общая потребность в продукте с наибольшей относительной потребностью не могут быть найдены до окончания балансовых расчетов. Между тем любой из перечисленных выше методов предварительного разнесения затрат между компонентами комплексной продукции никак не связан с установлением компоненты, обладающей наибольшей относительной потребностью. Поэтому расчет межотраслевого баланса, основанный на таком разнесении затрат, приводит к тому, что комплексной продукции будет произведено либо больше, либо меньше, чем требуется, чтобы покрыть потребность в продукте с наибольшей относительной потребностью, следовательно, либо больше, либо меньше, чем необходимо. Эта ошибка возникает потому, что, разнося затраты по компонентам комплексной продукции, мы вводим неверное предположение, будто для получения нужных количеств конкретных продуктов достаточно произвести затраты, равные

той доле затрат на комплексное производство, которые относятся к данному продукту «по распределению».

По той же причине возникают ошибки в других экономических расчетах, основанных на предварительном разнесении затрат по компонентам комплексной продукции. Чтобы их избежать, необходимо строить такие математические модели экономических задач, которые не требовали бы предварительного разнесения затрат между компонентами комплексной продукции. Покажем как это сделать в задаче межотраслевого баланса.

Введем понятие единицы комплексной продукции. Назовем единицей комплексной продукции одну такую весовую, объемную или иную физическую единицу продукции, получаемой в данном техническом процессе, в которой отдельные виды продуктов содержатся в таком соотношении, в каком они получаются в этом процессе.

Введем понятие нормативов затрат на единицу комплексной продукции, понимая под этими нормативами такие затраты каждого вида, которые необходимы для получения единицы комплексной продукции.

Понятие единицы комплексной продукции не является чем-то совершенно новым для экономистов. Оно встречается в работах некоторых проектных и научно-исследовательских институтов химической и нефтехимической отраслей промышленности. В тех случаях, когда в существующих технологических или технико-экономических материалах приводятся нормативы затрат на единицу комплексной продукции, именно их следует принимать для расчетов, связанных с межотраслевым балансом и относящихся к производству совместно получаемых продуктов.

Очень часто, однако, в технологических и технико-экономических разработках нормативы затрат показываются на единицу какого-либо одного компонента комплексной продукции и на соответствующее (получающееся на каждую единицу этого компонента) количество остальных компонентов данного комплекса совместно получаемых продуктов. Например, по производству фенола и ацетона кумольным способом нормативы затрат показывают на 1 т фенола + 0,6 т ацетона, т. е. не на 1 т комплексной продукции, а на 1,6 т. Для того чтобы получить нормативы затрат на 1 т комплексной продукции, нужно разделить каждый из нормативов затрат на 1,6, а чтобы получить нормативы выхода фенола и ацетона из единицы соответствующей комплексной продукции, нужно разделить 1 и 0,6 на 1,6; получится норматив выхода фенола из единицы комплексной продукции, равный 0,625, и норматив выхода ацетона из единицы комплексной продукции, равный 0,375.

Иногда в химической промышленности используют нормативы выхода продуктов из единицы сырья, а нормативы затрат показывают затраты на переработку единицы основного сырья. Эти нормативы не следует путать с нормативами выхода разных продуктов из единицы комплексной продукции и нормативами затрат на единицу комплексной продукции.

Так, нормативы затрат на производство продуктов, получаемых при переработке сырого бензола на коксохимических предприятиях, показывают часто как нормативы затрат на переработку 1 т сырого бензола. Предположим, что на данном предприятии перерабатывают 100 000 т сырого бензола, из которого получают 90 000 т комплексной продукции, в том числе: бензола 67 000 т, толуола 15 000 т, ксилола 5000 т, других полезных продуктов 3000 т, а всего 90 000 т. Это значит, что нормативы выхода продуктов из единицы сырья составляют: бензола 0,67, толуола 0,15, ксилола 0,05, других полезных продуктов 0,03, а всего 0,9, т. е. 0,9 т комплексной продукции из 1 т сырого бензола. Для того чтобы получить нормативы выхода разных продуктов из одной тонны комплексной продукции, нужно разделить нормативы выхода каждого продукта (бензола, толуола, ксилола,

других полезных продуктов) из единицы основного сырья на 0,9. Получим соответственно: $0,67 : 0,9 = 0,74$; $0,15 : 0,9 = 0,16$; $0,05 : 0,9 = 0,07$; $0,03 : 0,9 = 0,03$.

Затраты на 1 т сырого бензола есть затраты на получение 0,9 т комплексной продукции данного вида. Поэтому, чтобы получить затраты на 1 т комплексной продукции, мы должны соответственно разделить затраты на переработку одной тонны основного сырья на норматив выхода из него комплексной продукции (в данном случае на 0,9).

Таким образом, мы можем всегда перейти от нормативов выхода продуктов из единицы сырья и нормативов затрат на единицу сырья к нормативам выхода из единицы комплексной продукции и нормативам затрат на единицу комплексной продукции.

Ясно, что в отличие от «разнесенных нормативов затрат» на единицу каждой компоненты комплексной продукции нормативы затрат на единицу комплексной продукции обладают тем свойством, которым должны обладать нормативы затрат, а именно: для производства единицы комплексной продукции действительно достаточно осуществить затраты в размере нормативов, рассчитанных на единицу комплексной продукции.

Введем, следовательно, понятие нормативов выхода разных продуктов из единицы комплексной продукции данного вида, понимая под ними такое количество каждого из этих продуктов, которое содержится в одной единице данной комплексной продукции.

Будем обозначать производимые количества комплексной продукции через $x_1, \dots, x_k$. Норматив затрат продукции i -го вида на единицу комплексной продукции k -го вида обозначим a_{ik} . Норматив выхода продукции i -го вида из единицы комплексной продукции k -го вида обозначим ω_{ik} . Тогда количество продукции i -го вида, затрачиваемое на количество x_k комплексной продукции k -го вида, определится как $a_{ik}x_k$, а количество продукции i -го вида, получаемое в составе количества x_k комплексной продукции k -го вида, определится как $\omega_{ik}x_k$. В результате баланс затрат и выпуска продукции (компоненты) i -го вида определится следующим образом:

$$\sum_k a_{ik}x_k + y_i = \sum_k \omega_{ik}x_k,$$

где y_i — конечное потребление продукции i -го вида. При этом, ввиду предположения о существовании одной технологии получения каждого продукта для каждого данного индекса i , все $\omega_{ik} = 0$, за исключением одного ω_{ik_i} , где k_i соответствует той комплексной продукции, из которой данный i -й продукт производится.

Поскольку, однако, соотношения общих потребностей в различных компонентах, складывающиеся при данном наборе конечных потребностей, не соответствуют соотношениям, в которых эти компоненты получают в комплексной продукции, было бы неправильно требовать заранее, чтобы приведенные равенства выполнялись для всех продуктов. Равенства можно было бы требовать лишь по продуктам с наибольшей относительной потребностью. Но так как мы заранее не знаем, какие это продукты, то не можем, как правило, требовать ни по одной из компонент комплексной продукции, чтобы эти равенства выполнялись. Но для всех продуктов должны соблюдаться, по крайней мере, следующие неравенства:

$$\sum_k a_{ik}x_k + y_i \leq \sum_k \omega_{ik}x_k \quad (i = 1, \dots, J). \quad (1)$$

Априори ясно, что для любых заданных значений y_i имеется бесчисленное множество наборов неотрицательных значений x_k ($k = 1, \dots, K$), удовлетворяющих системе неравенств (1). Следует лишь взять достаточно большие значения величин x_k , чтобы их хватило для обеспечения дан-

ного конечного потребления y_i . Однако реальная задача межотраслевого баланса состоит в том, чтобы найти не любой набор значений x_k , удовлетворяющий системе неравенств (1) и, следовательно, обеспечивающий заданное конечное потребление, а какой-то определенный набор этих значений. Наличие системы ограничений, наложенных на переменные в виде неравенств, и соответствующая свобода выбора из различных наборов переменных предоставляют возможность постановки задачи на оптимум.

Естественно искать из наборов x_k , обеспечивающих данное конечное потребление, в каком-то смысле оптимальный, например такой, который дает возможность обеспечить данное конечное потребление с минимальными затратами на производство в целом, т. е. приводит к минимуму некоторую функцию от переменных x_k .

Как было отмечено Э. Б. Ершовым на конференции по опыту и перспективам применения математических методов и электронных вычислительных машин в планировании [1], для системы типа:

$$\sum_j a_{ij}x_j + y_i = x_i + z_i \quad (2)$$

при $x_i \geq x_i^0 \geq 0$, $y_i \geq y_i^0 \geq 0$, заданных $a_{ij} \geq 0$, $z_i \geq 0$ и при условии, что $\sum_j a_{ij} < 1$, доказывалось существование решения $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$, для которого $\hat{x}_i \leq \tilde{x}_i$, $\hat{y}_i = y_i^0 \leq \tilde{y}_i$, где $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ — любое решение приведенной системы (2).

Это означает, что и для системы неравенств типа:

$$\sum_j a_{ij}x_j + y_i^0 \leq x_i + z_i, \quad x_i \geq x_i^0 \geq 0 \quad (2')$$

при заданных $a_{ij} \geq 0$, $z_i \geq 0$ и при условии, что $\sum_j a_{ij} < 1$, существует решение $\hat{x}_i$, для которого $\hat{x}_i \leq \tilde{x}_i$, где $\tilde{x}_i$ — любое решение системы (2').

Как показано Э. Б. Ершовым, минимизация любой функции переменных x_j , возрастающей по всем переменным, при условиях типа (2'), приводит к одному и тому же решению. Наши соотношения (1) являются соотношениями именно такого типа, причем у нас все $z_i = 0$. Выражения $\sum \omega_{ik}x_k$ в правых частях каждого из соотношений (1) легко приводятся

к виду x_{k_0} если учесть, что на практике всегда имеют место условия $\omega_{ik} - a_{ik} \geq 0$, а в каждой $\sum_k \omega_{ik}x_k$ все $\omega_{ik} = 0$, за исключением одного $\omega_{ik} \neq 0$, и если разделить каждое неравенство на соответствующее $\omega_{ik_i} \neq 0$.

Таким образом, мы можем принять в нашей задаче в качестве минимизируемой функции линейную форму $L(x_1, \dots, x_K)$ переменных x_k ($k = 1, \dots, K$) с любыми положительными коэффициентами, например, с единицами:

$$L(x_1, \dots, x_K) = x_1 + \dots + x_K.$$

Тогда наша задача в целом может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_k a_{ik}x_k + y_i &\leq \sum_k \omega_{ik}x_k, \quad x_k \geq 0, \\ \min \{x_1 + \dots + x_K\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Эту задачу можно решать как обычную задачу линейного программирования.

Используя тот факт, что в качестве коэффициентов линейной формы могут быть взяты любые положительные числа, можно, видимо, предло-

жить и специальный алгоритм, который даст возможность решать данную задачу более эффективно, чем при решении ее как обычной задачи линейного программирования. Однако сейчас нам важно, что вообще мы можем каким-то образом решать задачу межотраслевого баланса с учетом наличия производств совместно получаемых продуктов без предварительного разнесения затрат по компонентам комплексной продукции.

Если учесть, что в действительности имеются разные способы получения продуктов одного и того же вида, в том числе продуктов, получаемых в производствах совместно получаемых продуктов, то сформулированная задача обобщается на более сложную. При этом сохраняются соотношения (1), но в правых частях этих соотношений (в $\sum_k \omega_{ik} x_k$) может быть

более чем одно $\omega_{ik} \neq 0$. А это значит, что такая задача уже не сводится к указанной задаче Э. Б. Ершова, и решение становится зависящим от значений коэффициентов линейной формы. Поэтому здесь приобретает существенное значение вопрос о критерии оптимальности. При заданном конечном потреблении наиболее естественным будет искать такой план производства $x_k (k = 1, \dots, K)$, который обеспечит заданные размеры выпуска конечных продуктов $y_i (i = 1, \dots, J)$ с наименьшими затратами, т. е. обеспечит $\min c_k x_k$, где c_k — затраты на единицу комплексной продукции k -го вида.

С математической точки зрения такая задача является также задачей линейного программирования. К условиям этой задачи могут быть добавлены и прочие ограничительные условия на переменные.

Изложенный нами подход к решению задачи межотраслевого или межпродуктового баланса с учетом наличия производств совместно получаемых продуктов является наиболее общим подходом. В некоторых конкретных задачах межотраслевого или междупродуктового баланса иногда могут быть использованы и другие более простые методы. Одним из них является метод, предложенный А. Г. Гранбергом, названный им методом «отрицательных коэффициентов». Он состоит в следующем.

В комплексном производстве выделяется *основной* целевой продукт. Все остальные совместно с ним получаемые продукты рассматриваются как *побочные*. Основной продукт не следует смешивать с продуктом, по которому относительная потребность является наибольшей. Так, количества бензола, ксилола и толуола, которые могут быть получены в коксохимическом производстве при том количестве кокса, которое потребуется производить в ближайшие годы, не смогут покрыть потребности в этих продуктах. Производить же дополнительно коксующийся (жирный или газовый уголь) ради получения одних этих химических продуктов явно менее эффективно, чем получать их из нефтехимического сырья. Поэтому бензол, ксилол, толуол, получаемые в коксохимическом производстве, являются побочными (по А. Г. Гранбергу) продуктами производства основного целевого продукта — кокса, хотя относительная потребность в этих побочных продуктах больше, чем в коксе.

Все затраты на производство комплексной продукции относятся по методу «отрицательных коэффициентов» на основной продукт. Кроме того, по отношению к единице основной продукции вводятся (кроме нормативов затрат) нормативы выпуска побочной продукции (в отличие от наших нормативов выхода на единицу комплексной продукции).

При этом в уравнениях каждого основного (i -го) продукта размер необходимого выпуска этого продукта теперь уменьшается в соответствии с побочным выходом этого же продукта в других (j -х) производственных процессах, в которых в качестве основных выступают уже другие (j -е) продукты.

Эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\sum_j a_{ij}x_j + y_i = x_i + \sum_j b_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, I)$$

или

$$\sum_j (a_{ij} - b_{ij}) x_j + y_i = x_i \quad (i = 1, \dots, I), \quad (4)$$

где x_i — количество основной продукции i -го вида (т. е. продукции, выступающей как основная в i -м технологическом способе производства); a_{ij} — затраты продукции i -го вида на единицу основной продукции j -го вида; b_{ij} — выпуск продукции i -го вида как побочной на единицу основной продукции j -го вида (на единицу продукции, выступающей в качестве основной в j -м технологическом способе производства).

В отличие от соотношений (1) соотношения (4) представляют собой не неравенства, а равенства, так как они составляют по каждому технологическому процессу по «основному» продукту, производить который в раз- мере большем, чем его требуется, не имеет смысла, так как он целевой, т. е. производство осуществляется именно ради него.

Система линейных уравнений имеет единственное решение при усло- вии, что число линейно независимых уравнений этой системы равно числу переменных. Следовательно, хотя при методе «отрицательных коэффи- циентов» допускается возможность получения продукта каждого данного вида несколькими технологическими способами, при этом необходимо вве- сти дополнительные ограничения, согласно которым продукт каждого вида может выступать в качестве основного лишь при одном технологическом способе. В связи с этим в данной схеме не могут быть представлены, на- пример, два способа производства одного вида продукта (имеются в виду два способа, не дающие других видов продукта, кроме этого). Если, напри- мер, два продукта могут получаться (совместно или раздельно) при трех технологических способах, при которых другие продукты не получаются, то мы также не сможем воспользоваться этой схемой, не исключив одного из этих технологических способов.

С другой стороны, если какие-то несколько видов продуктов получают- ся при одном технологическом способе, а других технологических способов получения этих продуктов нет, то мы вновь сталкиваемся с некоторыми проблемами. Примем один из этих продуктов за основной. Тогда осталь- ные продукты, хотя они и являются побочными в данном технологическом способе, не будут участвовать как основные ни в каком другом способе (ведь они могут быть получены, как мы указали, лишь при данном спо- собе).

При этом мы не можем вводить специальных балансовых соотношений по этим побочным продуктам. Действительно, требовать полного исполь- зования таких побочных продуктов, т. е. требовать балансов типа

$$\sum_j a_{ij}x_j + y_i = \sum_j b_{ij}x_j,$$

— это значит переопределить систему, так как в этих дополнительных уравнениях встречаются те же переменные — количества основной про- дукции x_j .

Если ввести для таких побочных продуктов неравенства

$$\sum_j a_{ij}x_j + y_i \leq \sum_j b_{ij}x_j,$$

которые легко превратить в равенства введением дополнительных переменных, то число этих дополнительных уравнений будет равно числу дополнительных переменных. Однако эти неравенства будут иметь лишь контрольную функцию, выявляя нехватку тех или иных побочных продуктов (при появлении отрицательных значений дополнительных переменных в решении).

Наконец, даже если число линейно независимых уравнений в системе (4) равно числу переменных в ней, имеется опасность получения отрицательных решений. Формальная возможность отрицательных решений системы (4) возникает ввиду того, что в уравнениях этой системы могут быть отрицательные технологические коэффициенты (когда $b_{ij} > a_{ij}$). Обычная схема затраты-выпуск избавлена от такой опасности именно ввиду положительности технических коэффициентов и количеств конечной продукции. От опасности отрицательных решений системы (4) при равенстве числа линейно независимых уравнений числу переменных мы будем гарантированы лишь в том случае, если продукт, являющийся в каком-то процессе основным, заведомо не может быть получен сверх потребности в нем в других процессах, в которых он получается как побочный.

Таким образом, возможность использования метода «отрицательных коэффициентов» ограничивается рядом предположений. Применение этого частного метода целесообразно в тех случаях, когда указанные предположения соблюдаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Б. Ершов. Решение обобщенной задачи статического межотраслевого баланса. Материалы к конф. по опыту и перспективам применения матем. методов и электронных вычислит. машин в планировании. Новосибирск, 1962 (ротапринт).

Поступила в редакцию
17 V 1964