ЭКОНОМИКА 1965
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том I, вып. 4

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА НА СЕТИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ *

Э. А. МУХАЧЕВА

(УФА)

Численные методы решения задач линейного программирования в настоящее время хорошо разработаны. Наибольшее распространение получил так называемый метод последовательного улучшения плана [1]. В этом методе на каждом шаге процесса решаются две системы линейных уравнений. Строками матрицы B одной из этих систем служат базисные векторы. Вторая система имеет транспонированную матрицу B^T. Указанные системы обычно решаются с использованием обратной матрицы B^{-1}. Так как при переходе к следующему шагу изменяется только один базисный вектор, для обращения новой матрицы можно пользоваться упрощенным приемом, сходным с применяемым в известном методе пополнения [2]. При такой реализации метода последовательного улучшения плана он совпадает с модифицированным симплексным методом [3].

Наряду с общими, разрабатываются специальные алгоритмы для решения отдельных классов задач линейного программирования. Специальные алгоритмы могут строиться на основе метода улучшения допустимого вектора с учетом особенностей систем линейных уравнений, возникающих при решении задач данного типа. Эти системы решаются здесь непосредственно, без применения громоздкого аппарата обратных матриц. Использование таких алгоритмов позволяет существенно повысить размерность решаемых задач.

Рассмотрению одного из специальных алгоритмов и посвящена настоящая работа.

1. ЗАМЕЧАНИЕ О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

При решении некоторых задач линейного программирования встречается особый тип линейных алгебраических уравнений. Неособенная матрица $\overline{B} = \{b_{ki}\}$ $(k,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+n)$ такой системы допускает представление в виде:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B & D \\ B^0 & D^0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где B — неособенная матрица размерности m, B^0 и D — прямоугольные матрицы размерности $(n \times m)$ и $(m \times n)$ соответственно. D^0 — квадратная матрица размерности n. При этом для решения систем с матрицей B имеется простой алгоритм.

---

* Автор выражает глубокую благодарность Г. Ш. Рубинштейну за советы и помощь при написании данной статьи.

Допустим, что требуется решить систему уравнений:

$$\bar{B}\bar{y} = \bar{c}, \tag{2}$$

где $\bar{B}$ — матрица указанного вида, $\bar{c} = \{c_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m+n)$ — заданный вектор-столбец, $\bar{y} = \{y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m+n)$ — неизвестный вектор-столбец.

Эта система может быть записана в виде:

$$By^{(1)} + \sum_{i=m+1}^{m+n} d_i y_i = c, \tag{3}$$

$$B^0 y^{(1)} + \sum_{i=m+1}^{m+n} d_i^0 y_i = c^0, \tag{3'}$$

где d_i и $d_i{}^0$ — соответствующие столбцы матриц D и D^0; $c = \{c_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$; $c^0 = \{c_k\}$ $(k = m+1, m+2, \ldots, m+n)$; $y^{(1)} = \{y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Отсюда:

$$y^{(1)} = B^{(-1)}c - \sum_{i=m+1}^{m+n} B^{-1} d_i y_i, \tag{4}$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} (d_i^0 - B^0 B^{-1} d_i)\, y_i = c^0 - B^0 B^{-1} c. \tag{4'}$$

Применяя специальный алгоритм для решения систем с матрицей B, находим векторы $B^{-1}c$, $B^{-1}d_i$ $(i = m+1, m+2, \ldots, m+n)$. Эти векторы подставляем в (4) и (4′). Затем любым из общих приемов решаем систему (4′). Остальные компоненты неизвестного вектора $\bar{y}$ вычисляются на основании (4).

Таким образом, в описанном приеме общий метод используется только для решения системы линейных уравнений n-го порядка, что в ряде случаев позволяет существенно сократить требуемый объем вычислений.

Заметим, что при треугольной матрице B рассмотренный прием совпадает с методом решения кодиагональных систем [4], а если $n = 1$, система по существу решается известным методом окаймления [2].

2. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача на сети с дополнительными ограничениями математически формулируется следующим образом.

Задача Пусть при $I = \{1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+n\}$, $I_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$, $I_2 = \{m+1, m+2, \ldots, m+n\}$, $K = \{1, 2, \ldots, r, r+1, \ldots, r+n\}$, $K_1 = \{1, 2, \ldots, r\}$, $K_2 = \{r+1, r+2, \ldots, r+n\}$ заданы вещественные числа $p_i (i \in I)$, $d_{ki} (k \in K, i \in I_2)$, $c_k (k \in K)$ и для каждого $k \in K_1$ пары индексов $i_k j_k \in I_1$, причем

$$\sum_{i \in I_1} p_i = 0. \tag{5}$$

Требуется определить вектор

$$x = \{x_k\},\ k \in K, \tag{6}$$

удовлетворяющий условиям:

1) $x_k \geqslant 0$, $k \in K$;

2) $\sum\limits_{k \in K_i^+} x_k - \sum\limits_{k \in K_i^-} x_k = p_i$, $i \in I_1$, где под K_i^+ и K_i^-

понимаются множества $K_i^+ = \{k \in K_1 : j_k = i\}$, $K_i^- = \{k \in K_1 : i_k = i\}$;

3) $\sum\limits_{k \in K} d_{ki} x_k = p_i, \quad i \in I_2;$

4) достигает минимума величина $\sum\limits_{k \in K} c_k x_k$.

Вектор x, удовлетворяющий условиям 1—3, называется *допустимым*, а искомый вектор — *оптимальным*.

К этой математической модели сводятся некоторые задачи размещения. Дополнительные ограничения позволяют, помимо транспортного фактора, учесть ряд других условий, например конечный выпуск продукции при взаимозаменяемости различных видов сырья, размеры капитальных вложений и т. д.

Приведенная задача укладывается в рамки линейного программирования. Из общей теории вытекает следующая теорема.

Теорема. *Для оптимальности допустимого вектора* (6) *в задаче* A *необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор*

$$y = \{y_i\},\ i \in I, \tag{7}$$

удовлетворяющий условиям:

$$y_1 = 0,\ y_{j_k} - y_{i_k} + \sum_{i \in I_2} d_{ki} y_i = c_k,\ \ k \in K_1(x) = \{k \in K_1 : x_k > 0\},$$
$$\sum_{i \in I_2} d_{ki} y_i = c_k, \quad k \in K_2(x) = \{k \in K_2 : x_k > 0\}. \tag{8}$$

$$y_{j_k} - y_{i_k} + \sum_{i \in I_2} d_{ki} y_i \leqslant c_k, \quad k \in K_1,$$
$$\sum_{i \in I_2} d_{ki} y_i \leqslant c_k, \quad k \in K_2. \tag{9}$$

Компоненты y_i, фигурирующего в теореме вектора y, имеют смысл оценок соответствующих ограничений (см. условие 2 и 3).

Левые части условий (8) и (9) можно представить в виде скалярных произведений $(y, \bar{a}_k)$, $k \in K \cup \{0\}$, где $\bar{a}_k = a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{km}, d_{km+1}, d_{km+2}, \ldots, d_{km+n})$ — вектор-строка, причем

$$a_{0i} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1 \\ 0 & \text{при } i \neq 1, \end{cases} \quad d_{0i} = 0\ (i = m+1,\ \ m+2, \ldots, m+n),$$

$$a_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in K_i^+ \\ -1 & \text{при } k \in K_i^- \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для построения алгоритма решения задачи A можно воспользоваться методом последовательного улучшения плана. В этом методе на каждом шаге процесса имеется допустимый вектор (6) такой, что соответствующая ему система (8) содержит $(m+n)$ уравнений и матрица $\bar{B}$ этой системы — неособенная. Следовательно, соответствующая система векторов

$$\bar{a}_k,\ k \in K(x) = K_1(x) \cup K_2(x) \cup \{0\} \tag{10}$$

образует базис рассматриваемого $(m+n)$-мерного пространства. Из системы (8) находим вектор (7) и проверяем условие (9). Если это условие выполнено, то рассматриваемый вектор является оптимальным (процесс окончен). В противном случае отмечаем индекс $k_0 \in K$, для которого нарушено неравенство условия (9), и переходим к построению нового допустимого вектора

$$x' = \{x_k'\},\ k \in K, \tag{11}$$

такого, что $\sum_{k\in K} c_k x_k' < \sum_{k\in K} c_k x_k$. Построение этого вектора осуществляется следующим образом.

Находим коэффициенты $\bar{x}_k$, $k \in K(x)$ разложения вектора $\bar{\alpha}_{k_0}$ по базису (10). Соответствующая система линейных уравнений $\sum_{k\in K(x)} \bar{x}_k \bar{\alpha}_k^T = \bar{\alpha}_{k_0}^T$ может быть переписана в виде:

$$\begin{gathered} a_{0i}\bar{x}_0 + \sum_{k\in K_i^+(x)} \bar{x}_k - \sum_{k\in K_i^-(x)} \bar{x}_k = a_{k_0 i}, \quad i \in I_1, \\ \sum_{k\in K(x)} d_{ki}\bar{x}_k = d_{k_0 i}, \quad i \in I_2, \end{gathered} \tag{12}$$

где $K_i^+(x) = \{k \in K_1(x): j_k = i\}$, $K_i^-(x) = \{k \in K_1(x): i_k = i\}$.

Заметим, что матрица этой системы получается транспонированием матрицы $\bar{B}$ системы (8).

Используя условие (5), нетрудно показать, что $\bar{x}_0$ всегда равно нулю. Если окажется, что остальные коэффициенты разложения $x_k \leqslant 0$, то задача A решения не имеет (процесс окончен). В противном случае находим число

$$\varepsilon = \min_{\{k: \bar{x}_k > 0\}} \frac{x_k}{\bar{x}_k} = \frac{x_{k_1}}{\bar{x}_{k_1}}$$

и определяем компоненты вектора (11) из соотношений $x_k' = x_k - x_k \cdot \varepsilon$, $k \in K_1(x) \cup K_2(x)$; $x_{k_0}' = \varepsilon$. При этом новое множество индексов $K(x') = (K(x) \setminus \{k_1\}) \cup \{k_0\}$ содержит $(m+n)$ элементов и матрица соответствующей системы (8) неособенная. Следовательно, можно перейти к следующему шагу процесса.

Для завершения описания алгоритма остается рассмотреть вопрос о построении исходного допустимого вектора. Иногда удается такой вектор найти, исходя из очевидных соображений, учитывая конкретное содержание задачи. Однако в общем случае полезно рассмотреть известный в линейном программировании прием построения исходного плана. Последний заключается в применении изложенного выше метода к решению вспомогательной задачи, состоящей в разыскании вектора $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{r+n}, x_{r+n+1}, \ldots, x_{r+n+m+n})$, удовлетворяющего условиям:

1) $x_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r+n+m+n)$;

2) $\sum_{k=1}^{r+n} \bar{\alpha}_k^T x_k + \sum_{i=1}^{m+n} \operatorname{sign} p_i e_i x_{r+n+i} = p$,

где e_i — орты соответствующих координатных осей, вектор-столбец $p = \{p_i\}$, $i \in I$;

3) величина $\sum_{i=1}^{m+n} x_{r+n+i}$ достигает минимума.

Здесь в качестве исходного может быть принят допустимый вектор $\tilde{x} = (0, 0, \ldots, 0, |p_1|, |p_2|, \ldots, |p_{m+n}|)$. Нетрудно видеть, что если

$\min \sum_{i=1}^{m+n} x_{r+n+i} = 0$, то оптимальный вектор рассматриваемой вспомогательной задачи является допустимым для исходной задачи. В противном случае в задаче не существует допустимого вектора.

Замечание 1. В описанном методе на каждом шаге процесса решаются системы линейных уравнений (8) и (12), что составляет наиболее трудоемкую часть алгоритма. Для решения этих систем мы применим прием, изложенный в разделе 1. Использование здесь этого приема базируется на том, что при $n = 0$ задача совпадает с классической транспортной задачей в сетевой постановке [1, 5]. Последнюю мы назовем задачей $Б$. Нетрудно видеть, что $\bar{B}$ после перестановки некоторых строк можно представить в виде (1). В этом представлении строками матрицы B служат базисные векторы некоторой задачи $Б$. Для решения таких задач известны эффективные методы, например метод потенциалов [5]. Последний также построен на основе изложенного выше метода последовательного улучшения плана и использует специфику задачи при решении систем линейных уравнений с матрицами B и B^T. Изложению упрощенных приемов для решения указанных систем посвящен следующий раздел.

3. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ НА СЕТИ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Полностью метод потенциалов в настоящей работе не рассматривается. Здесь описывается его часть — решение систем линейных уравнений (8) и (12). Эти системы при $n = 0$ имеют вид:

$$y_1 = 0, \quad y_{j_k} - y_{i_k} = f_k, \quad k \in \widetilde{K} = \{k_1, \quad k_2, \ldots, k_{m-1}\}, \tag{13}$$

$$a_{0i}x_0 + \sum_{k \in \widetilde{K}_i^+} x_k - \sum_{k \in \widetilde{K}_i^-} x_k = g_i, \quad i \in I_1, \tag{14}$$

где
$$\widetilde{K}_i^+ = \{k \in \widetilde{K};\ j_k = i\}, \quad \widetilde{K}_i^- = \{k \in \widetilde{K} : i_k = i\},$$

f_k и g_i — действительные числа.

Алгоритм решения этих систем использует три списка. Информацию об очередном базисе задачи $Б$ помещаем в список 1, строка которого имеет вид:

$$(i_k, j_k, f_k). \tag{15}$$

В список 2 заносим найденные неизвестные, а в списке 3 запоминается порядок решения системы (13).

Решение системы (13). В первую строку списка 2 записываем $y_1 = 0$. Просматривая список 1, находим строку (15), для которой y_i или y_{j_k} уже определено. При этом, если известным было число y_{i_k}, то строке присваиваем признак $\pi = 1$, в противном случае $\pi = 0$. Номер строки с соответствующим признаком π запоминается в списке 3. Второе неизвестное y_{i_k} или y_{j_k} находим на основании уравнения (13) и в соответствующую строку списка 2 заносим найденные значения. После ряда просмотров списка 1 в списке 2 получаем решение рассматриваемой системы (13), а в списке 3 — информацию о порядке, в котором использовались строки списка 1. Условно эту часть алгоритма будем называть [АТУ].

Решение системы (14). Для решения этой системы используется информация, накопленная в списке 3 при решении системы (13). А именно, список 1 просматривается здесь в порядке, обратном к установленному в списке 3. При этом в каждом из рассматриваемых уравнений системы (14) все неизвестные, кроме одного, оказываются вычисленными ранее. Искомые числа x_k накапливаются в списке 2 следующим образом.

Записываем в рабочий список 2 числа g_i. Просматривая список 3 в обратном порядке, выбираем из него очередную информацию вида (π_s, s). Для номера «s» строки списка 1 определяем индексы i_{k_s} и j_{k_s}. Если $\pi_s = 0$, то x_{k_s} приписываем значение, равное содержимому i_{k_s}-й строки списка 2, взятому с обратным знаком, и к содержимому j_{k_s}-й строки прибавляем значение, равное $(-x_{k_s})$. Если $\pi_s = 1$, то x_{k_s} равно содержимому j_{k_s}-й строки рабочего списка, а к содержимому i_{k_s}-й строки прибавляем найденное значение x_{k_s}. Эту часть алгоритма условно обозначим ATX.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Метод последовательного улучшения плана для рассматриваемой задачи описан в разделе 2. Здесь излагается метод решения систем (8) и (12) при помощи приема, описанного в разделе 1.

Предполагаем, что базис (10) разбит на две группы так, что первая содержит m векторов α_k, которым соотнесены векторы $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{km})$, образующие базис m-мерного пространства для соответствующей задачи $Б$. Согласно этому, множество индексов $K(x)$ разбиваем на два непересекающихся подмножества, содержащих соответственно m и n элементов: $K(x) = K_{\mathrm{I}}(x) \cup K_{\mathrm{II}}(x)$. Очевидно, что такое разбиение базиса неоднозначно. Информацию об очередном базисе (кроме вектора α_0) храним в списке 1, строки которого имеют вид $(i_k, j_k, d_{km+1}, d_{km+2}, \ldots, d_{km+n}, c_k, x_k)$. Кроме того, алгоритм использует четыре основных рабочих списка. Списки 2 и 3 применяем во время работы алгоритмов АТУ и АТХ, описанных в предыдущем разделе. Список 4 предназначен для записи коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений (4′), а в списке 5 записываются найденные неизвестные.

Решение системы (8). Эта система имеет матрицу

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B & D \\ B^0 & D^0 \end{bmatrix},$$

где B — матрица соответствующей системы (13), а

$$B^0 = \{a_{ki}\},\ k \in K_{\mathrm{II}}(x),\ i \in I_1,$$
$$D = \{d_{ki}\},\ k \in K_{\mathrm{I}}(x),\ i \in I_2,$$
$$D^0 = \{d_{ki}\},\ k \in K_{\mathrm{II}}(x),\ i \in I_2.$$

Решение системы сводится к следующим операциям.

1. Применяя алгоритм АТУ $(n+1)$ раз, принимаем в качестве правых частей уравнений (13) последовательно компоненты векторов c и d_i, где вектор-столбец $c = \{c_k\}$, $k \in K_{\mathrm{I}}(x)$, причем $c_0 = 0$, d_i — столбцы матрицы D, и находим векторы $y^0 = B^{-1}c$, $y_i{}^0 = B^{-1}d_i$, $i \in I_2$. Компоненты найденных векторов записываем в список 2, строка «s» которого здесь имеет вид: $(y_s^0, y_{sm+1}^0, y_{sm+2}^0, \ldots, y_{sm+n}^0)$. Заметим, что список 3 для всех систем один и тот же.

2. Определяя векторы $h_i = (d_i{}^0 - B^0 y_i{}^0)$, $i \in I_2$, $h_0 = c^0 - B^0 y^0$, где вектор-столбец $c^0 = \{c_k\}$, $k \in K_{\mathrm{II}}(x)$, заполняем список 4, строка «l» которого имеет вид:

$$(h_{l0}, h_{lm+1}, h_{lm+2}, \ldots, h_{lm+n}).$$

3. Из системы уравнений (4′), которая здесь сводится к следующей:

$$\sum_{i \in I_2} h_i y_i = h_0, \tag{16}$$

находим неизвестные y_i ($i \in I_2$) и заносим их в последние n строк списка 5.

4. Используя соотношение (4), находим остальные компоненты неизвестного вектора и записываем их в первые m строк списка 5.

Решение системы (12). Эта система имеет матрицу

$$\bar{B}^T \begin{bmatrix} B^T & B^{0T} \\ D^T & D^{0T} \end{bmatrix} \tag{17}$$

и ее решение сводится к следующим операциям:

1. Применяя алгоритм АТХ, принимаем за числа g_i, фигурирующие в системе (14), последовательно компоненты векторов α_{k_0} и β_k^{0T}, где $\beta_k{}^0$ — соответствующая строка матрицы B^0, и находим векторы $\bar{x}^0 = \alpha_{k_0}^T B^{-1}$, $\bar{x}_k{}^0 \beta_k^{0T} B^{-1}$, $k \in K_{\text{II}}(x)$.

2. Определяем вектор $v_0 = d_{k_0}^T - D^T \bar{x}^0$, где вектор-столбец $d_{k_0}^T = \{d_{k_0} i\}$, $i \in I_2$.

3. Решаем систему линейных уравнений (4′), которую здесь запишем в виде:

$$\sum_{k \in K_{\text{II}}(x)} v_k \bar{x}_k = v_0. \tag{18}$$

Нетрудно заметить, что матрица $V = \{v_k\}$, $k \in K_{\text{II}}(x)$ равна транспонированной матрице системы (16), поэтому необходимость в вычислении векторов v_k отпадает.

4. Находим остальные компоненты неизвестного вектора из соотношений:

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^0 - \sum_{k \in K_{\text{II}}(x)} \bar{x}_k^0 \bar{x}_k. \tag{19}$$

Заметим, что в списке 5 хранятся компоненты вектора $\bar{x}$, а список 1 содержит информацию о текущем базисе. Остальные списки утратили свое значение.

Замечание 2. Специального упорядочивания базиса можно не производить. Для построения векторов y^0 и $y_i{}^0$ многократно просматривается список 1. При каждом просмотре решаются те уравнения системы (13), которые на данном этапе можно решить. Используемые уравнения отмечаются. Таким образом, оказываются отмеченными $(m-1)$ строк списка 1, они и войдут в базис задачи $Б$.

Замечание 3. В работе [6] указано, что для задач ранга $r = 0$ и $r = 1$ разработаны специальные алгоритмы. Для задач ранга $r \geqslant 2$ специальных алгоритмов пока нет. Однако в отдельных случаях для решения последних можно применить изложенный прием.

Замечание 4. При переходе к следующему шагу матрица V^T системы (16) подвергается различным изменениям в зависимости от характера изменения базиса. Лишь в частных случаях для обращения матрицы V можно пользоваться известным приемом, сходным с методом пополнения. В общем случае в работе [7] предложен способ, позволяющий с помощью достаточно простых преобразований переходить от матрицы V^{-1} к матрице $\tilde{V}^{-1}$ на каждом шаге алгоритма. Последний заключается в следующем:

1. Если из базиса удаляется вектор $\bar{a}_{k_1}$ и $k_1 \in K_{II}(x)$, то все решения систем с матрицей B остаются без изменения. В матрице V заменяется только один столбец и

$$\tilde{V} = [e_1, e_2, \ldots, e_{k_1-1}, \varphi_{k_1}, e_{k_1+1}, \ldots, e_n] \cdot V, \tag{20}$$

где $\varphi_{k_1} = \{\varphi_{k_1 i}\}$, $i \in I_0$ — вектор-столбец, $\varphi_{k_1 i} = \bar{x}_i / \bar{x}_{k_1})$ при $i \neq k_1$, $\varphi_{k_1 k_1} = 1 / \bar{x}_{k_1}$, e_k, $k \in K_{II}(x)$ — единичные векторы.

2. Индекс $k_1 \in K_I(x)$ и $(K_I(x) \setminus \{k_1\}) \cup \{k_0\} = K_I(x')$.

Значит, некоторые решения систем (13) и (14) изменятся, но матрица $\tilde{B}^T$ останется неособенной. В этом случае

$$\tilde{V}^{-1} = (E - \Phi \bar{X}^0) V^{-1}, \tag{21}$$

$\Phi = [0, 0, \ldots, \varphi_{k_1}, 0, \ldots, 0]$ — матрица размерности $(n \times m)$; $\bar{X}^0 = \{\bar{x}_k{}^0\}$, $k \in K_{II}(x)$ — матрица размерности $(m \times n)$.

3. Индекс $k_1 \in K_I(x)$, но $(K_I(x) \setminus \{k_1\}) \cup \{k_0\} \neq K_I(x')$. В этом случае базисные векторы a_k, $k \in K(x')$ переупорядочиваются. А именно, в матрице $\tilde{B}^T$ системы (12) меняют местами k_1-й и t-й столбцы так, что матрица B^T становится неособенной. Тогда $\tilde{V}^{-1}$ определяют из соотношения

$$\tilde{V}^{-1} = (E^{(t)} - \varphi_{k_1} \chi^0_{k_1}) V^{-1}, \tag{22}$$

где $\chi^0_{k_1}$ — k_1-я строка матрицы $\bar{X}^0$, $E^{(t)} = [e_1, e_2, \ldots, e_{t-1}, 0, e_{t+1}, \ldots, e_n]$ — квадратная матрица, все столбцы которой, кроме одного, являются единичными векторами.

Таким образом, обратная матрица системы вида (4′) в случаях 1 и 2 подвергается элементарным преобразованиям, несколько сложнее случай 3.

Заметим, что если m — большое число и n — сравнительно малое, например, $m \approx 200$, $n \approx 10$, то можно решать системы n-го порядка (16) и (18) общими методами. В отдельных случаях можно использовать прием, сходный с методом окаймления. Этот прием изложен в следующем замечании. Однако вопрос о целесообразности его применения нуждается в дополнительном исследовании.

З а м е ч а н и е 5. Пусть неособенная матрица $\bar{B}$ представлена в виде (1) и удовлетворяет следующим условиям:

1. Известен упрощенный прием для решения систем линейных уравнений с неособенной матрицей B.

2. Если матрица B_s получена окаймлением матрицы B_{s-1}, причем $B_0 = B$ и $B_n = \bar{B}$, то при любом $s \in (0, 1, 2, \ldots, n)$ матрицы B_s неособенные.

Требуется решить систему линейных уравнений (2). Прежде чем приступить к описанию метода решения этой системы, введем следующие обозначения:

$\bar{a}_{ki}$ $(k = 1, 2, \ldots, m+n;\ i = 1, \ldots, m+n)$ — элементы матрицы $\bar{B}$,

$\bar{a}_{k\,m+n+1} = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m+n)$; $d_\nu^{(s)} = \{\bar{a}_{k\,m+\nu}\}$
$(k = 1, 2, \ldots, m+s;\ \nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ — векторы-столбцы;

$\beta_\nu^{(s)} = \{\bar{a}_{m+\nu\, i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m+s;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$ — векторы-строки; $y^{(s,\nu)} = B_s^{-1} d_\nu^{(s)}$ $(s = 0, 1, \ldots, n;\ \nu = s+1, s+2, \ldots, n+1)$ — векторы-столбцы; $\lambda^{(s,\nu)} = \bar{a}_{m+s+1\, m+\nu} - \beta_{s+1}^{(s)} y^{(s,\nu)}$.

$\overline{B}$, очевидно, можно записать в виде:

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} B_{n-1} & d_n^{n-1} \\ \beta_n^{(n-1)} & \overline{a}_{m+nm+n} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Решение будем искать, применяя специальный прием, описанный в разделе 1. Тогда:

$$y_{m+n}^{(n,n+1)} = \lambda^{(n-1,n+1)} / \lambda^{(n-1,n)},$$

$$y_i^{(n,n+1)} = y_i^{(n-1,n+1)} - y_i^{(n-1,n)} \cdot y_{m+n}^{(n,n+1)} \ (i = 1,\ 2, \ldots,\ m + n - 1). \tag{24}$$

Здесь $y_i^{(n-1,\,n)}$ и $y_i^{(n-1,\,n+1)}$ являются решениями систем линейных уравнений с матрицей B_{n-1} и правыми частями, соответственно равными $d_n^{(n-1)}$ и $d_{n+1}^{(n-1)}$. Решение этих систем базируется на представлении типа (23) матрицы B_{n-1} через B_{n-2}. Решение систем с матрицей B_{n-2} базируется на представлении ее через B_{n-3} и т. д. Применяя специальный алгоритм для решения систем с матрицей $B_0 = B$, находим векторы $y^{(0\nu)} = B^{-1} d_\nu^{(0)}$, а компоненты неизвестного вектора $\overline{y}$ — по рекуррентным формулам:

$$y_{m+s+1}^{(s+1,\nu)} = \frac{\lambda^{(s,\nu)}}{\lambda^{(s,s+1)}},$$

$$y_i^{(s+1,\nu)} = y_i^{(s,\nu)} - y_i^{(s,s+1)} \cdot y_{m+s+1}^{(s+1,\nu)} \ (i = 1,\ 2, \ldots, m + s), \tag{25}$$

$$s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ \nu = s+2,\ s+3,\ \ldots,\ n+1.$$

При реализации алгоритма можно пользоваться списком, содержащим $(m + n)$ столбцов и $(n + 1)$ строку. На первом шаге заполняем все строки списка, записывая компоненты векторов $y^{(0\nu)}$ и числа $\lambda^{(0,\,\nu)}$. На s-м шаге заполняем последние $(n + 1 - s)$ строк.

В заключение приведем два простых примера. В первом — транспортная задача на сети с одним дополнительным ограничением решается методом последовательного улучшения плана, а для решения возникающих там систем линейных уравнений вида (8) и (12) применяется специальный прием, описанный в разделе 3. Здесь фактически на каждом шаге процесса реализуется дважды основная часть метода потенциалов. Во втором примере система линейных уравнений 7-го порядка решена с помощью приема, изложенного в замечании 5.

Пример 1. При $m = 7$, $r = 18$ и $n = 1$ вещественные числа $p_i\,(i \in I)$ заданы в табл. 1, а числа d_k и c_k $(k \in K)$ в табл. 2. Пары индексов i_k, j_k $(k \in K_1)$ также даны в табл. 2. Требуется найти вектор $x = \{x_k\}$, $k \in K$, удовлетворяющий условиям 1 — 4 задачи A.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	−100	+80	−60	0	−130	+140	+70	6100

Решение приведено в табл. 3, 3′ и 3″, каждая из которых соответствует одному шагу процесса и объединяет списки 1 — 5. Для большей наглядности компоненты векторов $\overline{x}^0$ и $\overline{x}_k{}^0$ $(k \in K_{\text{П}}(x))$ записаны в порядке, установленном списком 1. Индекс k, для которого достигает минимума величина $x_k / \overline{x}_k$ при $\overline{x}_k > 0$, обведен жирной линией. Заметим также, что исходный допустимый вектор найден здесь из очевидных соображений.

Таблица 2

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$i_k j_k$	1,2	2,1	2,3	3,2	3,6	6,3	6,5	5,6	5,4	4,5	4,7	7,4	7,1	1,7	4,2	2,4	4,3	34	
d_k	10	10	15	15	21	21	17	17	7	7	10	10	40	40	20	20	31	31	1
c_k	20	20	25	25	48	48	31	31	35	35	17	17	35	35	22	22	34	34	1

Таблица 3

Список 1						Список 3		Список 2		Список 5	Список 2		Список 5
K	i_k	j_k	d_k	c_k	x_k	π_s	s	y^0	y_8^0	y	$\bar{x}^0$	x_{19}^0	$\bar{x}$
1	1	2	10	20	80	1	1	0	0	0	1	0	1
5	3	6	21	48	10	1	5	20	10	10	0	0	0
8	5	6	17	31	130	0	4	—16	—1	—15	0	0	0
11	4	7	10	17	50	0	6	18	30	—12	1	0	1
14	1	7	40	35	20	1	2	1	3	—2	—1	0	—1
18	3	4	31	34	50	0	3	32	20	12	1	0	1
$\boxed{19}$	0	0	1	1	30	Сп. 4		35	40	—5	Сп. 4		4
$\varepsilon = 7,5$						1	1			1	4	1	

Таблица 3′

Список 1						Список 3		Список 2		Список 5	Список 2		Список 5
K	i_k	j_k	d_k	c_k	x_k	π_s	s	y^0	y_8^0	y	$\bar{x}^0$	$\bar{x}_y^0$	$\bar{x}$
1	1	2	10	20	72,5	1	1	0	0	0	0	1	5
5	3	6	21	48	10	1	5	20	10	47,5	—1	0	—1
8	5	6	17	31	130	0	4	—16	—1	—18,75	1	0	1
11	4	7	10	17	42,5	0	6	18	30	100,5	0	1	5
14	1	7	40	35	27,5	1	2	1	3	9,25	0	—1	—5
$\boxed{18}$	3	4	31	34	42,5	0	3	32	20	87	1	1	6
4	3	2	15	25	7,5	Сп. 4		35	40	145	Сп. 4		—5
$\varepsilon = 7,08$						—11	4			—2,75	—20	4	

Вектор x, для которого $x_1 = 37$; $x_4 = 43$; $x_5 = 17$; $x_8 = 123$; $x_9 = 7$; $x_{11} = 7$; $x_{14} = 63$, а остальные компоненты равны нулю,— оптимальный.

П р и м е р 2. Решить систему линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; &+ 2y_5 + y_6 + y_7 = 10,\\
y_1 - y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &+ y_5 + 2y_6 + 3y_7 = 12,\\
y_2 - y_3 \qquad\qquad &+ 4y_5 + 5y_6 + 2y_7 = 12,\\
y_3 - y_4 &+ y_5 + y_6 + 2y_7 = 10,\\
y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 &- y_5 + 2y_6 + y_7 = 11,\\
-y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &+ y_5 + 2y_6 + 3y_7 = 12,\\
2y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 &- 2y_5 + y_6 + 2y_7 = 14.
\end{aligned}
$$

Таблица 3″

Список 1						Список 3		Список 2		Список 5
K	i_k	j_k	d_k	c_k	x_k	π_s	s	y^0	y^0_8	y
1	1	2	10	20	37	1	1	0	0	0
5	3	6	21	48	17	1	5	20	10	32
8	5	6	17	31	123	0	4	—34	19	—11,2
11	4	7	10	17	7	0	6	18	30	54
14	1	7	40	35	63	1	3	—17	23	10,6
9	5	4	7	35	7	0	2	14	40	62
4	3	2	15	25	43	Список 4		35	40	83
						—29	24			—1,2

Таблица 4

s	ν	$y_1^{(0,\nu)}$	$y_2^{(0,\nu)}$	$y_3^{(0,\nu)}$	$y_4^{(0,\nu)}$	$\lambda^{(0,\nu)}$		
0	1	2	1	—3	—4	8		
	2	1	—1	—6	—7	28		
	3	1	—2	—4	—6	22		
	4	10	—2	—14	—24.	71		
		$y_1^{(1,\nu)}$	$y_2^{(1,\nu)}$	$y_3^{(1,\nu)}$	$y_4^{(1,\nu)}$	$y_5^{(1,\nu)}$	$\lambda^{(1,\nu)}$	
1	2	—6	—4,5	4,5	7	3,5	—0,5	
	3	—4,5	—4,75	4,25	5	2,75	1,25	
	4	—7,75	—10,875	12,625	11,5	8,875	5,125	
		$y_1^{(2,\nu)}$	$y_2^{(2,\nu)}$	$y_3^{(2,\nu)}$	$y_4^{(2,\nu)}$	$y_5^{(2,\nu)}$	$y_6^{(2,\nu)}$	$\lambda^{(2,\nu)}$
2	3	—19,5	—16	15,5	22,5	11,5	—2,5	—9
	4	—69,25	—57	58,75	83,25	44,75	—10,25	—33,5
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
3	4	3,333	2,555	1,056	—0,5	1,945	—0,944	3,722

Решение системы приведено в табл. 4. Искомые неизвестные записаны в последней строке этой таблицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
3. Г. Зойтендейк. Методы возможных направлений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
5. Л. В. Канторович, М. К. Гавурин. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. В сб. Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., Изд-во АН СССР, 1949.
6. Г. Ш. Рубинштейн. О решении задач линейного программирования большого объема. В сб. Экономико-математическая серия. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1965.
7. К. В. Ким. Об использовании условий задачи в методе улучшения плана. Ж. Экономика и математические методы, т. 1, вып. 1, 1965.

Поступила в редакцию
26 II 1965