

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. П. ШВАРЦМАН

(ОДЕССА)

Задача дробно-линейного программирования (ДЛП), т. е. задача об оптимизации отношения двух линейных форм при линейных ограничениях, имеет реальный экономический смысл. Основным примером может служить задача о достижении минимума себестоимости некоторой продукции (или некоторых перевозок *).

Пусть, например, требуется минимизировать себестоимость производства некоторой однородной продукции, которая может изготавливаться технологическими способами T_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Если p_j — это интенсивность способа T_j , а r_j — соответствующий расход в единицу времени, то при плане $x_1, x_2, \dots, x_n$ (единиц времени на каждый из способов T_j) себестоимость продукции будет
$$C = \sum_{j=1}^n r_j x_j \bigg/ \sum_{j=1}^n p_j x_j \quad (\text{в рублях за единицу продукции}),$$
 т. е. она выражается как отношение двух линейных форм.

Аналогично, если речь идет о расстановке m судов на n линиях, то при производительности Π_{ij} (в тонномилях за единицу времени) i -го судна на j -й линии и соответствующем эксплуатационном расходе R_{ij} (в рублях за единицу времени) мы получим, что себестоимость перевозок при плане расстановки x_{ij} (единиц времени, отведенных i -му судну на j -й линии) будет
$$C = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m R_{ij} x_{ij} \bigg/ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \Pi_{ij} x_{ij} \quad (\text{в рублях за тонномиллю}).$$

Другими примерами могут служить задачи о максимуме рентабельности и вообще задачи об оптимизации некоторых относительных показателей качества (трудоемкость, производительность и т. п.). Задачи ДЛП встречаются также в теории игр [1], в сетевых транспортных задачах [2] и др.

ДЛП рассматривалось в работах [1], [3] и [4]. В [1] задача ДЛП сводится к двум вспомогательным задачам линейного программирования, и притом исключается случай бесконечной области, определяемой ограничениями. В [4] задача ДЛП также сводится к вспомогательной (одной) задаче линейного программирования, но при этом коэффициенты целевой функции вспомогательной задачи меняются при переходе от одной итерации к другой.

В настоящей работе, как и в [3], задача ДЛП рассматривается непосредственно — без редукции к задаче линейного программирования; наоборот, линейное программирование можно рассматривать как частный

* При этом считается, что объем выпускаемой продукции (или перевозок) не фиксирован заранее, так как тогда, очевидно, минимум себестоимости достигается при минимуме расходов, и мы остаемся в пределах линейного программирования.

случай ДЛП. При этом получаются весьма наглядные интерпретации ДЛП (геометрическая и экономическая), и предлагаемое решение позволяет перенести на ДЛП как известные алгоритмы метода последовательного улучшения плана (симплексный и разрешающих множителей), так и известные алгоритмы транспортной задачи.

1. Основная лемма. Геометрическая интерпретация ДЛП. Мы будем исходить из модели задачи ДЛП с ограничениями в канонической форме:

$$Q(x) = \frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n C'_j x_j}{\sum_{j=1}^n C''_j x_j} - \max(\min) \quad (1)$$

при условии

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$, $\bar{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b^T = (b_1, \dots, b_m)$.

При этом будем предполагать, что в замкнутой области $K\{x | Ax = b, x \geq 0\}$, определяемой ограничениями (2), знаменатель $L_2(x)$ целевой функции нигде не обращается в нуль (в практических задачах это имеет место). Тогда, ввиду непрерывности, $L_2(x)$ будет в области K сохранять знак, и можно считать (относя, если нужно, знак «минус» к числителю), что

$$L_2(x) > 0 \quad (x \in K)^*. \quad (3)$$

Как известно, K является выпуклым многогранным множеством. Докажем следующую лемму, на которую, по сути, опирается вся теория ДЛП.

Лемма. На каждом прямолинейном отрезке области K дробнолинейная функция $Q(x)$ изменяется монотонно.

Доказательство. Пусть $x', x'' \in K$. На точках отрезка $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) $Q(x)$ становится функцией от λ :

$$Q(x) = \frac{\lambda L_1(x') + (1 - \lambda)L_1(x'')}{\lambda L_2(x') + (1 - \lambda)L_2(x'')} = Q_1(\lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Производная этой функции Q_1 по λ будет:

$$\frac{dQ_1}{d\lambda} = \frac{1}{\{L_2(x)\}^2} \begin{vmatrix} L_1(x') & L_1(x'') \\ L_2(x') & L_2(x'') \end{vmatrix}.$$

При изменении $0 \leq \lambda \leq 1$ эта производная сохраняет знак детерминанта $D = L_1(x')L_2(x'') - L_1(x'')L_2(x')$ или тождественно равна нулю, если $D = 0$, т. е. если $Q(x') = Q(x'')$. Следовательно, $Q(x)$ на каждом прямолинейном отрезке области K либо изменяется строго монотонно, либо сохраняет постоянное значение.

Из доказанной леммы вытекает, что возможны следующие два случая.

I. Область K ограничена, т. е. K есть многогранник. В этом случае $Q(x)$, по крайней мере в одной из вершин многогранника K , достигает своего максимума (и своего минимума).

II. Область K не ограничена. В этом случае предыдущее утверждение по-прежнему верно, если только $Q(x)$ достигает своего максимума (мини-

* Требование (3) можно присоединить к (2) и считать, что K определяется ограничениями (2) и (3). Однако удобнее исходить из модели (1)–(2), считая, что (3) выполняется совместно с (2). Например, в практически важном случае, когда $c_j'' \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), условие (3) выполняется, если K не содержит начала координат.

мум). Но возможно также, что $Q(x)$ монотонно стремится к некоторому пределу, не достигая его, либо становится бесконечной.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этих случаев.

На плоскости $0x_1x_2$ линией уровня $Q = \text{const}$ функции $Q = \frac{x_1 + c_2'x_2}{c_1'x_2 + c_2'x_1}$ будет прямая $(l): (Qc_1'' - c_1')x_1 + (Qc_2'' - c_2')x_2 = 0$, а множеством линий уровня будет пучок прямых, проходящих через начало координат (рис. 1). При этом угловой коэффициент k прямой (l) меняется монотонно с увеличением Q , так как $\text{sign} \frac{dk}{dQ} = \text{sign} \left\{ \frac{c_1''c_2' - c_2''c_1'}{(Qc_2'' - c_2')^2} \right\} = \text{const}^*$. Таким образом, при вращении прямой (l) в положительном направлении вокруг начала координат функция $Q(x)$ либо увеличивается, либо уменьшается в зависимости от $\text{sign} (c_1''c_2' - c_2''c_1')$.

Отсюда уже нетрудно понять смысл рисунков 2–5, разъясняющих лемму и случаи I и II (изображен случай, когда Q увеличивается при положительном вращении прямой (l)).

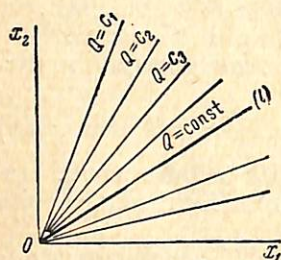


Рис. 1

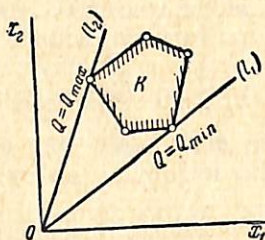


Рис. 2

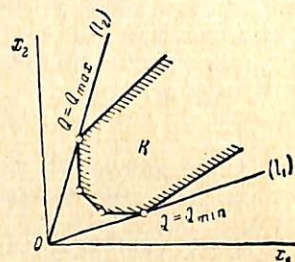


Рис. 3

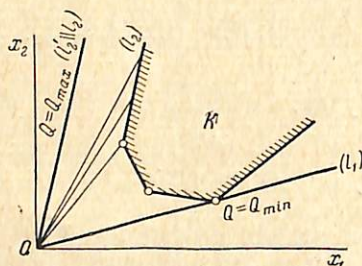


Рис. 4

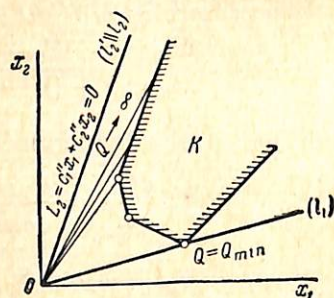


Рис. 5

В многомерном случае поверхности уровня функции $Q(x)$ представляют пучок гиперплоскостей $L_1(x) = QL_2(x)$, которые «вращаются» в определенную «сторону» вокруг «оси» пучка, проходящего через начало координат.

Замечание 1. Полученная интерпретация может быть использована для графического решения задачи ДЛП, когда она сводится к двум переменным ($n - m = 2$).

Замечание 2. Если $Q(x)$ достигает своего максимума (минимума) более, чем в одной вершине многогранника K , то так же, как и в линейном программировании, $Q(\bar{x})$ сохраняет это максимальное (минимальное)

* k остается постоянным только когда $c_1''c_2' - c_2''c_1' = 0$, но тогда и $Q = \text{const}$.

значение всюду на пересечении K с линейным подпространством, определяемым данными вершинами.

2. Метод последовательного улучшения плана (случай I). Опираясь на результаты п. 1, мы можем при решении задачи ДЛП (так же, как и в линейном программировании) ограничиться перебором вершин многогранника K . Рассмотрим, как меняется $Q(x)$ при переходе от одной вершины к другой, т. е. от одного опорного плана x к другому x' .

Пусть $x(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ — это опорный план задачи (1) — (2), соответствующий базису $B(p_1, p_2, \dots, p_m)$, где p_r — есть r -й вектор условий: $p_r^T = (a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{mr})$ ($r = 1, 2, \dots, m$). Этому опорному плану соответствует значение $Q(x) = L_1(x) / L_2(x)$. Перейдем к новому базису B' путем замещения базисного вектора p_r на вектор p_j ($j > m$). Как известно, новый план x' будет иметь компоненты

$$x'_r = \begin{cases} x_r - \theta x_{rj} & (r = 1, 2, \dots, m) \\ 0 & (r > m; r \neq j) \\ \theta & (r = j) \end{cases} \quad (4)$$

где $\theta = \min_r \frac{x_r}{x_{rj}}$, а x_{rj} — это r -я компонента вектора p_j ($x_{rj} > 0$) в базисе B . Ввиду того, что здесь рассматривается случай I, когда K ограничено, то не может оказаться, чтобы были все $x_{ij} \leq 0$.

Новые значения $L_1(x')$ и $L_2(x')$ будут $L_1(x') = L_1(x) - \theta(z'_j - c'_j)$, $L_2(x') = L_2(x) - \theta(z''_j - c''_j)$, где $z'_j = \sum_{r=1}^m c'_r x_{rj}$, $z''_j = \sum_{r=1}^m c''_r x_{rj}$ ([5], стр. 317).

В таком случае

$$Q(x') - Q(x) = \frac{L_1(x')}{L_2(x')} - \frac{L_1(x)}{L_2(x)} = \frac{Q}{L_2(x)L_2(x')} \cdot \begin{vmatrix} L_1(x) & z'_j - c'_j \\ L_2(x) & z''_j - c''_j \end{vmatrix},$$

и, так как $\theta > 0$, $L_2(x) > 0$, $L_2(x') > 0$, то при переходе к новому базису $Q(x)$ возрастает или убывает в зависимости от знака детерминанта

$$d_j = \begin{vmatrix} L_1(x) & z'_j - c'_j \\ L_2(x) & z''_j - c''_j \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Отсюда получаем правило (для улучшения плана при решении задачи ДЛП): при решении задачи ДЛП на максимум (минимум) вектор p_j следует вводить в новый базис, если $d_j > 0$ ($d_j < 0$).

Что касается вектора, который надо вывести из старого базиса, то он определяется (как и в линейном программировании) числом θ . При этом возможны случаи вырождения, которые преодолеваются так же, как и в линейном программировании.

Для полного обоснования метода улучшения плана в ДЛП мы должны еще доказать следующий признак оптимальности.

Теорема. Если для данного опорного плана x все детерминанты $d_j \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), то план x является оптимальным для задачи ДЛП на максимум (и соответствующее утверждение для случая минимума).

Пусть $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ — любой план задачи ДЛП. Покажем, что если все $d_j \leq 0$, то $Q(y) \leq Q(x)$.

Из того, что $d_j = L_1(x)(z'_j - c'_j) - L_2(x)(z''_j - c''_j)$ ($j = 1, \dots, n$), получаем $c'_j \leq z'_j - \frac{L_1(x)}{L_2(x)}(z''_j - c''_j) = z'_j - Q(x)(z''_j - c''_j)$ ($j = 1, \dots, n$) и поэтому

$$Q(y) = \frac{\sum_{j=1}^n c'_j y_j}{\sum_{j=1}^n c''_j y_j} \leq \frac{\sum_{j=1}^n z'_j y_j - Q(x) \sum_{j=1}^n z''_j y_j + Q(x) \sum_{j=1}^n c''_j y_j}{\sum_{j=1}^n c''_j y_j} =$$

$$= Q(x) + \frac{A}{\sum_{j=1}^n c''_j y_j}, \quad (6)$$

где обозначено $A = \sum_{j=1}^n z'_j y_j - Q(x) \sum_{j=1}^n z''_j y_j$. Покажем, что $A = 0$.

Действительно, так как $y(y_1, \dots, y_n)$ и $x(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ — это планы, то вектор b правых частей ограничений может быть выражен двояко через векторы условий p_r :

$$b = \sum_{j=1}^n y_j p_j, \quad b = \sum_{r=1}^m x_r p_r.$$

Но так как план x — опорный, т. е. векторы p_r ($r = 1, 2, \dots, m$) образуют базис, то, разлагая p_j в этом базисе, имеем также

$$b = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{r=1}^m x_{rj} p_r = \sum_{r=1}^m \left(\sum_{j=1}^n y_j x_{rj} \right) p_r$$

и, принимая во внимание однозначность разложения b в базисе p_r ($r = 1, 2, \dots, m$),

$$\sum_{j=1}^n y_j x_{rj} = x_r \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда $\sum_{j=1}^n z'_j y_j = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{r=1}^m c'_r x_{rj} = \sum_{r=1}^m c'_r \sum_{j=1}^n y_j x_{rj} = \sum_{r=1}^m c'_r x_r = L_1(x)$ и точно так же $\sum_{j=1}^n z''_j y_j = L_2(x)$. А отсюда $A = \sum_{j=1}^n z'_j y_j - Q(x) \sum_{j=1}^n z''_j y_j = L_1(x) - Q(x) L_2(x) = 0$, так что из неравенства (6) имеем $Q(y) \leq Q(x)$.

3. Экономическая интерпретация. Рассмотрим снова задачу о минимуме себестоимости однородной продукции, выпускаемой n технологическими способами T_j с производительностью p_j и производственными расходами r_j (в единицу времени).

Условию $d_j < 0$, указывающему на то, что в новый базис следует ввести j -й вектор условий, придадим вид

$$C(z''_j - p_j) < z'_j - r_j, \quad (7)$$

где $C = L_1 / L_2$ — это себестоимость продукции, соответствующая опорному плану x , при котором используются технологии $T_1, T_2, \dots, T_m$. Известно ([6], стр. 18), что z'' можно трактовать как число единиц продукции, получаемое при данном плане x из такого набора производственных факторов, которым можно обеспечить работу предприятия по способу T_j в единицу времени и получить, следовательно, p_j единиц продукции. Аналогично трактуется z'_j .

Имея это в виду, проанализируем при помощи неравенства (7) следующие случаи, которые охватывают все возможные:

1. $z_j'' - p_j < 0$, $z_j' - r_j \geq 0$; в этом случае введение j -й технологии T_j уменьшает (не увеличивает) расходы, но увеличивает выпуск продукции, следовательно, себестоимость снижается.

2. $z_j'' - p_j > 0$, $z_j' - r_j > 0$; в этом случае расходы уменьшаются, но и выпуск продукции уменьшается. Однако из (7) видно, что себестоимость потерянной продукции будет $\frac{z_j' - r_j}{z_j'' - p_j} > C$; значит, привлечение j -й технологии приводит к потере продукции с более высокой себестоимостью.

3. $z_j'' - p_j = 0$; в этом случае из (7) вытекает, что $z_j' - r_j > 0$, т. е. расходы уменьшаются при том же выпуске продукции, так что при введении j -й технологии себестоимость снижается.

4. $z_j'' - p_j < 0$; в этом случае из (7) вытекает, что и $z_j' - r_j < 0$; отсюда и расходы и выпуск продукции увеличиваются. Но себестоимость продукции будет при этом $\frac{|z_j' - r_j|}{|z_j'' - p_j|} < C$, так что привлечение

j -й технологии даст прирост продукции с более низкой себестоимостью.

Аналогично, если неравенствам $d_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), выражающим признак оптимальности задачи ДЛП на минимум, придать вид $C(z_j'' - p_j) \geq z_j' - r_j$ и проанализировать все возможные случаи, то убедимся, что привлечение в план какой бы то ни было новой технологии T_j ($j > m$) приведет к увеличению себестоимости, а это и означает оптимальность данного плана.

4. Случай, при котором область K не ограничена (случай II). В этом случае может по-прежнему оказаться, что максимум и минимум достигаются в каких-то вершинах многогранной области K (рис. 3). Но может оказаться, что на какой-то итерации (при введении в базис вектора p_j) мы встретимся со случаем, когда все $x_{rj} \leq 0$ ($r = 1, 2, \dots, m$). Это значит, что существует план (не опорный) со сколь угодно большими координатами x_r' , так как в (4) можно взять θ сколь угодно большим (геометрически (рис. 4) мы движемся по бесконечному ребру l области K).

При этом, когда $\theta \rightarrow \infty$, то $Q(x') = \frac{L_1(x) - \theta(z_j' - c_j')}{L_2(x) - \theta(z_j'' - c_j'')} \rightarrow \frac{|z_j' - c_j'|}{z_j'' - c_j''}$.

Отметим следующее:

А. Не может быть, чтобы одновременно было $z_j' - c_j' = 0$, $z_j'' - c_j'' = 0$, так как тогда и $d_j = 0$, и вектор p_j в новый базис не вводится. Если же $z_j'' - c_j'' = 0$, $z_j' - c_j' \neq 0$, то $Q(x') \rightarrow \infty$.

Б. $Q(x')$ стремится к своему пределу монотонно, так как $dQ(x') / d\theta = d_j / \{L_2(x)\}^2$, а d_j либо положительно (задача на максимум), либо отрицательно (задача на минимум). Это означает (рис. 4, 5), что с увеличением θ гиперплоскость $Q(x') = \text{const}$ вращается в одном направлении, стремясь стать параллельной бесконечному ребру l , выходящему из вершины x .

Дальнейшие рассуждения ведутся для задачи на максимум ($d_j > 0$) и в предположении, что $z_j'' - c_j'' \neq 0$.

Рассмотрим все векторы p_j , для которых $d_j > 0$. Множество индексов j таких векторов обозначим буквой J . Если для каждого $j \in J$ коэффициенты $x_{ij} \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), то, как нетрудно проверить, величина

$\max_{j \in J} \frac{z'_j - c'_j}{z_j - c_j}$ является асимптотическим максимумом задачи. Если же при некотором $j^* \in J$ среди коэффициентов x_{ij^*} имеются положительные, то вектор p_{j^*} можно ввести в базис, увеличив при этом значение целевой функции.

5. Алгоритмы ДЛП. Исходный план. Перейдем к вопросам вычислительной процедуры для ДЛП. Ясно, что здесь могут быть применены оба алгоритма метода последовательного улучшения плана — симплексный и разрешающих множителей ([5], стр. 358 и 369). При этом таблица каждой очередной итерации симплексного алгоритма и вспомогательная таблица алгоритма разрешающих множителей должна содержать три заключительные строки: для $z'_j - c'_j$, для $z_j - c_j$ и для детерминантов d_j . Кроме того, при использовании алгоритма разрешающих множителей надо на каждой итерации вычислять две системы множителей: μ' для $L_1(x)$ и μ'' для $L_2(x)$.

Отметим еще некоторые особенности, относящиеся к составлению исходного плана задачи ДЛП.

1. Если исходный единичный базис содержит только дополнительные векторы (что всегда имеет место при переходе от ограничений-неравенств к равенствам), то для исходного плана $x_{\text{исх}}$ будет $L_1(x_{\text{исх}}) = 0$, $L_2(x_{\text{исх}}) = 0$, так что $Q(x_{\text{исх}})$ делается неопределенным ($0/0$) и, кроме того, все детерминанты $d_{j_{\text{исх}}} = 0$. Причина такой неопределенности ясна: включая в исходный план только дополнительные переменные, мы не соблюдаем ограничение (3) ($L_2(x) > 0$, $x \in K$). Следовательно, в исходный план надо вводить хотя бы одну из основных переменных. Однако это неудобно, так как тогда исходный базис уже не будет единичным. Поэтому предпочтительно составлять исходную таблицу, как обычно, а неопределенность преодолевать при переходе к следующей таблице (с назначением в новый базис любого из основных векторов p_j); тогда в сущности и получим исходную итерацию.

2. Если ограничения имеют канонический вид, но не содержат единичного базиса, то, как и в линейном программировании, мы можем перейти к расширенной M -задаче при помощи искусственного базиса. При этом M -задачу для ДЛП на максимум можно взять либо в форме

$$\tilde{Q}(x) = \frac{L_1(x) - M(x_{n+1} + \dots + x_{n+k})}{L_2(x)} \rightarrow \max,$$

либо в форме

$$Q(x) = \frac{L_1(x)}{L_2(x) + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+k})} \rightarrow \max.$$

Остановимся, наконец, на транспортной задаче ДЛП. Как известно, в транспортной задаче приходится (при переходе от одной итерации к другой) вычислять для всех свободных клеток так называемые отклонения γ_{ij} ([5], стр. 605, [7], стр. 270), которые представляют не что иное, как величины $(z_j - c_j)$ — при переходе на одноиндексные обозначения. Для подсчета этих отклонений можно пользоваться либо циклами (распределительный метод — [7], стр. 252), либо потенциалами (метод потенциалов — [5], стр. 601). В случае задачи ДЛП надо будет для каждой свободной клетки подсчитывать два отклонения: γ'_{ij} (для $L_1(x)$) и γ''_{ij} (для $L_2(x)$)

и по ним детерминант $d_{ij} = L_1(x)\gamma''_{ij} - L_2(x) \cdot \gamma'_{ij}$. Удобно, по-видимому, свободные клетки заполнять по схеме

$$\begin{vmatrix} c'_{ij} & \gamma'_{ij} \\ c''_{ij} & \gamma''_{ij} \end{vmatrix},$$

причем введение свободной клетки в новый план осуществляется в зависимости от знака детерминанта d_{ij} ; и если на какой-то итерации получилось, что для всех свободных клеток $d_{ij} \leq 0$ ($d_{ij} \geq 0$), то мы достигли максимума (минимума).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Charnes, W. W. Cooper. Programming with Linear Fractional Functionals. Naval Res. Logist. Quart., 1962, vol. 9, No. 3—4.
2. А. С. Барсов. Линейное программирование в технико-экономических задачах. М., «Наука», 1964.
3. B. Martos. Hyperbolic Programming by Simplex Method. 2-eme Congr. math. hongrois, 1960. Budapest, 1961.
4. W. Dinkelbach. Die Maximisierung eines Quotienten zweier linearer Functionen unter linearen Nebenbedingungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheoret. und verw. Geb., 1962, Bd. 1, № 2.
5. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1964.
6. Д. Б. Юдин. Линейное программирование и экономические задачи. В сб. Методы решения общей задачи линейного программирования. М., Госстатиздат, 1963.
7. Ф. И. Карпелевич и Л. Е. Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
19 III 1965