

ОБ ОЦЕНКЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

С. М. МОВШОВИЧ

(МОСКВА)

В линейном и выпуклом программировании для приближенного решения задач транспортного типа часто используется метод максимального элемента. Суть его заключается в следующем.

План задачи строится последовательно. Сначала все переменные принимаются равными нулю. На каждом шаге построения плана отыскивается переменная, значение которой можно увеличить, и при этом скорость возрастания целевой функции наибольшая. Затем значение этой переменной увеличивается при линейной целевой функции насколько возможно, при нелинейной, например, на единицу. Процесс заканчивается, когда все ограничения задачи удовлетворяются и дальнейшее увеличение переменных невозможно. Распространение метода максимального элемента объясняется его чрезвычайной простотой и возможностью получения приближенного целочисленного решения даже для нелинейной целевой функции.

В настоящей работе получена оценка гарантированной точности приближения, которая обеспечивается при использовании метода максимального элемента.

Рассматривается нелинейная задача транспортного типа: максимизировать функцию

$$M(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} \right) \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} - \text{целые числа.} \quad (4)$$

Предполагается, что $c_{ij} \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$, все $f_j(x)$ — монотонно возрастающие вогнутые функции, a_i и b_j — целые положительные числа.

Приведем формальное описание метода максимального элемента. Полагаем все переменные равными нулю. На первом шаге определяется

$$c_{i_1j_1} + f_{j_1}(a_{i_1j_1}) - f_{j_1}(0) = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{c_{ij} + f_j(a_{ij}) - f_j(0)\} \quad (5)$$

и полагается $x_{i_1j_1}^{(1)} = 1$, $a_{i_1}^{(1)} = a_{i_1} - 1$, $b_{j_1}^{(1)} = b_{j_1} - 1$, остальные переменные и ограничения не изменяются. Пусть после $(k-1)$ -го шага построена

матрица переменных $X^{(k-1)} = \{x_{ij}^{(k-1)}\}$ и вектор ограничений $A^{(k-1)} = (a_1^{(k-1)}, \dots, a_m^{(k-1)}, b_1^{(k-1)}, \dots, b_n^{(k-1)})$. Обозначим $I^{(k-1)} = \{i/a_i^{(k-1)} > 0\}$, $J^{(k-1)} = \{j/b_j^{(k-1)} > 0\}$ и определим

$$\begin{aligned} & c_{ikjk} + f_{jk} \left(a_{ikjk} + \sum_{i=1}^m a_{ijk} x_{ijk}^{(k-1)} \right) - f_{jk} \left(\sum_{i=1}^m a_{ijk} x_{ijk}^{(k-1)} \right) = \\ & = \max_{i \in I^{(k-1)}, j \in J^{(k-1)}} \left\{ c_{ij} + f_j \left(a_{ij} + \sum_{l=1}^m a_{ilj} x_{ilj}^{(k-1)} \right) - f_j \left(\sum_{l=1}^m a_{ilj} x_{ilj}^{(k-1)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$x_{ikjk}^{(k)} = x_{ikjk}^{(k-1)} + 1, \quad a_{ik}^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)} - 1, \quad b_{jk}^{(k)} = b_{jk}^{(k-1)} - 1,$$

остальные переменные и ограничения не изменяются.

Ровно за $\sum_{i=1}^m a_i$ шагов будет построен план задачи (1) — (4) (предполагается, что $\sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j$). Построенное таким образом целочисленное решение X^0 рассматривается как приемлемое приближение к оптимальному целочисленному решению X^* .

Теорема. Если $c_{ij} \geq 0$ и все $f_j(x) \equiv 0$ (транспортная задача, обозначим ее задача **A**), либо $c_{ij} \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$ и все $b_j = \infty$ (ограничения (3) отсутствуют, задача **B**), а $f_j(x)$ — монотонно возрастающие вогнутые функции, то справедливо неравенство

$$M(X^0) \geq 0,5M(X^*). \quad (6)$$

Доказательство. Заметим, что не уменьшая общности, можно считать $a_i = 1$, $i = 1, \dots, m$. Доказательство теоремы проведем индукцией по числу m . При $m' = 1$ утверждение (6) очевидно. Пусть оно справедливо при $m' = m - 1$, докажем его для $m' = m$.

Задача A. Для упрощения выкладок будем считать, что $b_j = 1$, $j = 1, \dots, n$, а в равенстве (5) $i_1 = j_1 = 1$. Рассмотрим план X^0 и произвольный целочисленный план X задачи A. Построим вспомогательный план X' : если $x_{11} = x_{11}^0 = 1$, то $X' = X$, если $x_{11} = 0$, $x_{1j} = x_{11} = 1$, положим $x_{11}' = x_{ij}' = 1$, $x_{hs}' = x_{hs}$ для всех $k \notin \{1, i\}$ и $s \notin \{1, j\}$.

Рассмотрим также редуцированную задачу A' , полученную из A вычеркиванием переменных x_{1j} , $j = 1, \dots, n$ и x_{i1} , $i = 1, \dots, m$ и соответствующих ограничений. Матрицы $\bar{X}^0 = \{x_{ij}^0, i = 2, \dots, m, j = 2, \dots, n\}$ и $\bar{X}' = \{x_{ij}', i = 2, \dots, m, j = 2, \dots, n\}$ являются целочисленными планами задачи A' . Метод максимального элемента, примененный к задаче A' , приведет, очевидно, к плану $\bar{X}^0$. По предположению индукции

$$M'(\bar{X}^0) \geq 0,5M'(\bar{X}'), \quad (7)$$

где $M'(X)$ — линейная форма задачи A' .

Поскольку $c_{11} \geq \max \{c_{1j}, c_{i1}\}$, $c_{ij} \geq 0$, то

$$c_{11} + c_{ij} \geq 0,5(c_{1j} + c_{i1}). \quad (8)$$

Из равенства $M(X') = c_{11} + M'(\bar{X}')$, $M(X^0) = c_{11} + M'(\bar{X}^0)$, $M(X) = M(X') - c_{11} - c_{ij} + c_{1j} + c_{i1}$ и неравенств (7), (8) следует (6) для $m' = m$. Первая часть теоремы доказана.

Задача Б. Пусть X — произвольный целочисленный план задачи B , а X^0 — план, построенный методом максимального элемента, причем в равенстве (5) $i_1 = j_1 = 1$, $x_{11}^0 = 1$. Построим задачу B' : в задаче B вычеркиваем переменные x_{ij} , $j = 1, \dots, n$ и соответствующие ограничения; полагаем

$$f'_j(x) = \begin{cases} f_j(x) & \text{для } j = 2, \dots, n, \\ f_1(a_{11} + x) - f_1(a_{11}) & \text{для } j = 1. \end{cases}$$

В остальном задачи B и B' совпадают.

Матрицы $\bar{X}^0 = \{x_{ij}^0, i = 2, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ и $\bar{X} = \{x_{ij}, i = 2, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ являются целочисленными планами задачи B' , причем, очевидно, план $\bar{X}^0$ совпадает с планом, который строится методом максимального элемента. По предположению индукции для $m' = m - 1$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^0 + f_1\left(a_{11} + \sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}^0\right) - f_1(a_{11}) + \sum_{j=2}^n f_j\left(\sum_{i=2}^m a_{ij} x_{ij}^0\right) \geqslant \\ &\geqslant 0,5 \left(\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + f_1\left(a_{11} + \sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}\right) - f_1(a_{11}) + \sum_{j=2}^n f_j\left(\sum_{i=2}^m a_{ij} x_{ij}\right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $x_{1k} = 1$. Если $k = 1$, то (6) непосредственно следует из (9). Пусть $k \neq 1$. Запишем неравенство (6) в развернутой форме:

$$\begin{aligned} c_{11} + f_1(a_{11}) + S &\geqslant 0,5 \left(c_{1k} + f_k(a_{1k}) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n f_j\left(\sum_{i=2}^m a_{ij} x_{ij}\right) + f_k\left(a_{1k} + \sum_{i=2}^m a_{ik} x_{ik}\right) - f_k(a_{1k}) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Добавим к обеим частям неравенства величину

$$f_1\left(a_{11} + \sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}\right) - f_1(a_{11}) + f_k\left(\sum_{i=2}^m a_{ik} x_{ik}\right).$$

С учетом неравенства (9) для доказательства (10) достаточно показать, что

$$\begin{aligned} c_{11} + f_1(a_{11}) &\geqslant 0,5 \left(c_{1k} + f_k(a_{1k}) + f_1\left(\sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}\right) - f_1\left(a_{11} + \sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}\right) + \right. \\ &\left. + f_1(a_{11}) + f_k\left(a_{1k} + \sum_{i=2}^m a_{ik} x_{ik}\right) - f_k\left(\sum_{i=2}^m a_{ik} x_{ik}\right) - f_k(a_{1k}) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Но $c_{11} + f_1(a_{11}) \geqslant c_{1k} + f_k(a_{1k})$. Из вогнутости $f_k(x)$ следует, что сумма последних трех членов правой части (11) неположительна. Из монотонности $f_1(x)$ и условия $c_{11} \geqslant 0$ следует, что

$$c_{11} \geqslant f_1\left(\sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}\right) - f_1\left(a_{11} + \sum_{i=2}^m a_{i1} x_{i1}\right).$$

Таким образом, неравенство (11) справедливо, т. е. справедливо (6) при $m' = m$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Для задач A и B легко построить примеры, когда $M(X^0) = 0,5M(X^*)$, хотя, например, из практики решения транспортной задачи известно, что значение $M(X^0)$ обычно значительно ближе к $M(X^*)$.

З а м е ч а н и е 2. Для общей задачи (1—4) утверждение теоремы несправедливо.

П р и м е р. Положим $a_1 = \dots = a_4 = 1$; $b_1 = b_2 = 2$; $c_{11} = c_{32} = c_{42} = 0$, $c_{21} = c_{31} = c_{41} = c_{22} = 5$, $c_{12} = 10$; $a_{11} = 1$, $a_{31} = a_{41} = 0,5$,

$$a_{21} = 0, f_2(x) \equiv 0, f_1(x) = \begin{cases} 10x, & x \leq 1 \\ 10, & x \geq 1. \end{cases}$$

Методом максимального элемента можно построить план X^0 : $x_{11}^0 = x_{21}^0 = x_{32}^0 = x_{42}^0 = 1$, остальные $x_{ij}^0 = 0$. Для этого плана $M(X^0) = 15$, в то же время для плана X : $x_{12} = x_{22} = x_{31} = x_{41} = 1$, остальные $x_{ij} = 0$, значение $M(X) = 35$.

Поступила в редакцию
10 III 1965