

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

От редакции

С этого номера журнала в разделе «Научные консультации» мы начинаем регулярную публикацию статей, в которых будут излагаться основы математических методов решения экономических задач. Читатель сможет ознакомиться с сущностью методов линейного, квадратического, выпуклого и динамического программирования, с основами теории игр, массового обслуживания, расписаний и календарного планирования, с сетевыми методами планирования и управления, с методом межотраслевого баланса производства и распределения продукции. Параллельно в разделе будут публиковаться статьи, посвященные назначению экономико-математических моделей, этапам их разработки, практическому использованию математики в плановых расчетах и экономических исследованиях. Наш журнал будет знакомить читателя с принципами работы и использованием вычислительной техники.

Консультации рассчитаны на широкий круг научных и практических работников, интересующихся математическими методами экономического анализа, преподавателей и студентов экономических вузов.

Публикуемая нами статья Б. С. Верховского является первой статьей этого цикла.

Просим направлять в редакцию свои пожелания, вопросы и замечания как по опубликованным материалам, так и в целом по тематике раздела. Это поможет нам лучше узнать запросы читателей и сделать раздел консультаций своего рода семинаром экономико-математических знаний.

ПОСТАНОВКА И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Б. С. ВЕРХОВСКИЙ

(МОСКВА)

При решении ряда важных технических задач, экономических проблем и вопросов управления сложными системами часто приходится сталкиваться со следующей задачей: необходимо найти значения неизвестных, которые бы удовлетворяли всем заданным условиям (ограничениям на выбор этих неизвестных) и обеспечивали бы экстремум (максимум или минимум) какой-то одной заданной функции, зависящей от этих неизвестных. Эта функция называется критерием задачи или показателем качества, а задачи такого типа называются задачами на условный экстремум или экстремальными задачами. Раздел математики, занимающийся анализом и методами решения различных экстремальных задач, т. е. поиском наилучших программ действия для достижения намеченной цели, получил название математического программирования. Его не следует смешивать с понятием программирования на ЭВМ.

Вариационное исчисление, экономическое программирование, теория игр и решений, целочисленное программирование, теория расписаний — частные разделы математического программирования. Каждый из этих разделов применим лишь для определенных классов экстремальных задач.

Цель настоящей консультации — дать постановку различных задач линейного программирования и показать некоторые подходы к их решению. Сами методы решения будут описаны в следующем номере нашего журнала.

Линейное программирование посвящено решению и анализу экстремальных задач, у которых все ограничения на неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ задаются в виде уравнений или неравенств первой степени (их называют *линейными уравнениями или неравенствами*), а показатель качества является *линейной* * функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

максимум (или минимум) которой нужно найти. Здесь все $c_1, c_2, \dots, c_n$ — заданные числа.

Откуда и как появляются ограничения и критерий, какова их сущность, станет ясно из рассмотрения конкретных задач.

Пример задачи линейного программирования: найти неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 , удовлетворяющие всем условиям

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 3, \quad x_3 \geq 1, \quad 5 \geq x_4 \geq 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq 21 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 &= 37 \end{aligned}$$

и обращающие в максимум линейную функцию $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4$.

Наиболее характерными планово-экономическими проблемами, сводящимися к задачам линейного программирования, являются следующие:

а) Задача о наилучшем использовании оборудования. Имеется несколько типов станков, на каждом из которых можно изготовлять несколько видов изделий. Известны производительность каждого станка по каждому изделию, количество станков каждого типа. Кроме того задано, сколько изделий каждого вида входит в один комплект готовой продукции. Надо найти такой план загрузки оборудования, при котором обеспечивается производство максимума комплектов готовой продукции за плановый период.

б) Транспортная задача. Имеется несколько пунктов производства однородного продукта и ряд пунктов, в которые необходимо перевести заданные количества продукции. Известны объемы запасов требуемого продукта в каждом пункте производства. Заданы затраты на перевозку единицы продукта от каждого пункта производства в каждый пункт потребления. Требуется составить такой план перевозок, при котором общие суммарные затраты на перевозку минимальны.

в) Задача о смеси (о диете). Имеется несколько видов полуфабрикатов, каждый из которых состоит из нескольких компонентов. Известно относительное (процентное) содержание каждого компонента в каждом виде полуфабриката. Необходимо составить наиболее дешевую смесь, содержащую указанные компоненты в заданных количествах, если известны затраты на единицу каждого полуфабриката.

г) Задача об организации производства. Из ряда ресурсов, наличие каждого из которых ограничено на данном предприятии или комплексе предприятий, необходимо организовать производство разнородной продукции, приносящее максимальный доход. При этом известны технологический расход каждого ресурса на каждый продукт и доход от единицы каждого вида продукции.

Этим, разумеется, далеко не исчерпывается круг проблем, сводящихся к задаче линейного программирования.

* Отсюда термин «линейное программирование». Начало эффективной разработки этого научного направления было положено в 1939 г. проф. Ленинградского университета Л. В. Канторовичем (ныне академик, лауреат Ленинской премии), когда он предложил метод решения частной задачи о наилучшем использовании оборудования. Разработанная им теория решения этой задачи нашла широкое применение для решения других задач линейного программирования.

Вообще, чтобы ответить на вопрос, сводится ли данная проблема к задаче линейного программирования, нужно составить ее математическую модель. Математическая модель позволяет четко выявить все наиболее важные количественные соотношения между многочисленными факторами, влияющими на выбор оптимального решения.

Ниже мы покажем технику составления математических моделей для ряда планово-экономических проблем.

1. Модель задачи о нефтепереработке. На двух нефтепромыслах A_1 и A_2 добывается нефть, которая затем доставляется на нефте-

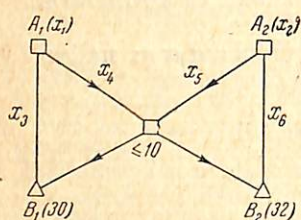


Рис. 1

перерабатывающие заводы B_1 и B_2 , работающие с различной технологией. На нефтезаводе B_1 необходимо выработать 30 единиц нефтепродукта, а B_2 — 32 единицы. Затраты на добычу одной единицы сырой нефти составляют 5 условных единиц в A_1 и 4 условные единицы в A_2 . Качество нефти в A_1 и A_2 разное. Из единицы A_1 -нефти вырабатывается 3 единицы нефтепродукта в B_1 и 4 единицы в B_2 ; из единицы A_2 -нефти вырабатывается 5 единиц нефтепродукта в B_1 и 3 единицы в B_2 . Необходимо обеспечить выпуск указанной продукции при наименьших общих затратах, т. е. необходимо определить, сколько и где добывать нефти, если общие затраты на нефтедобычу не должны превышать 100 выделенных денежных единиц, и сколько нефтесырья перевозить от каждого места добычи к каждому нефтезаводу. Затраты на перевозку единицы нефтесырья на маршруте $A_1 - B_1$ составляют 2 единицы, на маршруте $A_1 - B_2$ — 3 единицы, на маршрутах $A_2 - B_1$ и $A_2 - B_2$ — 4 и 3 единицы соответственно.

Перевозка нефтесырья осуществляется по железнодорожной сети (см. рис. 1); пропускная способность промежуточного пункта P не превышает 10 единиц нефтесырья.

Обозначим через x_1 и x_2 количества нефтесырья, добываемые в A_1 и A_2 соответственно; x_3 и x_4 — объемы перевозок из A_1 в B_1 и B_2 соответственно; x_5 , x_6 — объемы перевозок из A_2 в B_1 и B_2 соответственно. Тогда, полагая, что объем капитальных вложений, необходимый на добычу нефтесырья, прямо пропорционально зависит от уровня добычи, а затраты на перевозку прямо пропорционально зависят от объема перевозимой продукции, получим:

1) ограничения на капитальные вложения по нефтедобыче

$$5x_1 + 4x_2 \leq 100; \quad (1)$$

2) условия по выпуску продукции на нефтезаводе B_1

$$3x_3 + 5x_5 = 30 \quad (2)$$

и на нефтезаводе B_2

$$4x_4 + 3x_6 = 32; \quad (3)$$

3) ограничение пропускной способности пункта P

$$x_4 + x_5 \leq 10; \quad (4)$$

4) общие затраты на перевозку всего сырья

$$2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6; \quad (5)$$

5) общие затраты на нефтедобычу

$$5x_1 + 4x_2, \quad (6)$$

причем

$$x_1 = x_3 + x_4 \quad (7)$$

$$x_2 = x_5 + x_6, \quad (8)$$

ибо все нефтесырье необходимо перерабатывать. Естественно также потребовать, чтобы все $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ были неотрицательны (нельзя добывать и перевозить отрицательное количество нефтесырья). Общие конечные затраты (и на перевозку и на нефтедобычу) равны

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6. \quad (9)$$

Если x_1 и x_2 из соотношений (7) и (8) подставить в (1) и (9), то получим следующую задачу линейного программирования: найти $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$, удовлетворяющие условиям

$$5(x_3 + x_4) + 4(x_5 + x_6) \leq 100, \quad (10)$$

$$3x_3 + 5x_5 = 30, \quad (11)$$

$$4x_4 + 3x_6 = 32, \quad (12)$$

$$x_4 + x_5 \leq 10. \quad (13)$$

и обращающие в минимум показатель качества $7x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 7x_6$.

После того как будут найдены искомые значения $x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_5^{(0)}, x_6^{(0)}$, можно подсчитать наиболее выгодные уровни добычи в A_1 и A_2 : $x_1^{(0)} = x_3^{(0)} + x_4^{(0)}, x_2^{(0)} = x_5^{(0)} + x_6^{(0)}$.

II. Модель задачи об организации производства. На предприятии или комплексе предприятий можно производить продукцию видов: $P_1, P_2, \dots, P_n$, для получения которой необходимо m видов ресурсов: $R_1, R_2, \dots, R_m$.

Пусть на производство единицы продукции P_1 расходуется a_{11} единиц ресурса R_1 , a_{12} единиц ресурса R_2 и т. д., a_{1m} единиц ресурса R_m . Пусть известно, что на производство одной единицы продукта P_j расходуется a_{ij} единиц ресурса R_i .

Все нормы расхода ресурсов a_{ij} определяются уровнем технологии на рассматриваемом предприятии или комплексе предприятий.

Пусть изготавливается x_i единиц продукта P_j и пусть при этом каждого ресурса R_i пропорционально* расходуется $a_{ij}x_j$ единиц. А так как ресурс R_i расходуется при получении каждого продукта $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n$, то общий его расход равен: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n$. Если ресурсов $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_m$ имеется соответственно $b_1, b_2, \dots, \dots, b_i, \dots, b_m$ единиц (у каждого ресурса своя единица измерения), то ясно, что общий расход каждого ресурса не должен превышать его наличие, т. е. $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$. Таких неравенств будет столько, сколько всего ресурсов, т. е. m . Пусть, кроме того, известно, что внешняя цена одной единицы продукции P_j равна c_j денежных единиц. Тогда общий доход предприятия (без учета затрат на производство) от реализации продукции всех видов равен:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n. \quad (14)$$

* Пропорциональность (линейная зависимость) — общее свойство всех количественных соотношений в задачах линейного программирования.

Обратимся к геометрическому истолкованию задачи линейного программирования.

Рассмотрим одно линейное уравнение с двумя неизвестными x_1 и x_2 : $2x_1 + 3x_2 = 6$. Если построить систему координат x_1Ox_2 и на оси абсцисс откладывать произвольные значения неизвестного x_1 , а на оси Ox_2 значения x_2 , вычисляемые по формуле $x_2 = (6 - 2x_1) / 3$, то получим графическое изображение зависимости между переменными величинами x_1 и x_2 в виде прямой AB (рис. 2).

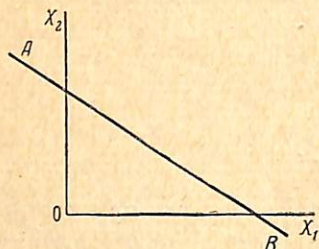


Рис. 2

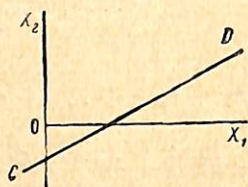


Рис. 3

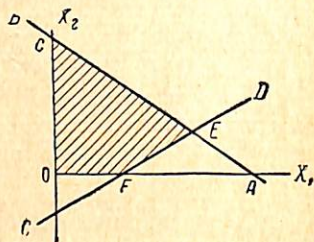


Рис. 4

Прямая AB делит всю плоскость на две части.

Линейное неравенство $2x_1 + 3x_2 < 6$ определяет точки плоскости, лежащие ниже прямой AB , а линейное неравенство $2x_1 + 3x_2 > 6$ определяет точки плоскости, лежащие выше прямой AB .

Рассмотрим линейное неравенство $x_1 - 2x_2 \leq 1$. Оно определяет на плоскости координат x_1Ox_2 точки, лежащие на прямой CD и слева от нее (рис. 3).

Система двух линейных неравенств $2x_1 + 3x_2 \leq 6$, $x_1 - 2x_2 \leq 1$ геометрически означает ту часть плоскости, которая лежит ниже прямой AB и левее прямой CD (рис. 4).

Если число искомых неизвестных равно двум, то картина получается следующая.

а) Все ограничения задачи линейного программирования образуют *выпуклый* многоугольник. Каждой внутренней или граничной точке многоугольника соответствует одно допустимое решение задачи и наоборот.

Каждая вершина этого многоугольника условий соответствует одному опорному решению задачи и наоборот (см. рис. 5).

б) Показатель качества задачи порождает бесконечное множество взаимно параллельных прямых (в случае $n = 2$). При этом каждому значению показателя качества соответствует вполне определенное положение критериальной прямой и, наоборот, каждому положению критериальной прямой соответствует только одно значение показателя качества (рис. 6).

Проведем через какую-нибудь одну вершину A прямую (плоскость) P_A . Одна часть многоугольника будет лежать по одну сторону от прямой, другая часть — по другую (рис. 7).

Существует лишь только два таких крайних положения прямой, при каждом из которых (P_C и P_F) весь многоугольник лежит по одну сторону от прямой. Одно такое положение прямой соответствует максимуму линейной функции (показателю качества), другое — минимуму.

Вершина (C или F) многоугольника, через которую проходит прямая, находясь в крайнем положении, соответствует оптимальному решению.

Если, находясь в крайнем положении, прямая проходит через ребро многоугольника, то задача линейного программирования имеет бесконечное число оптимальных решений. К счастью, строить такой многоугольник

для решения задачи линейного программирования не нужно. Однако, приведенное геометрическое истолкование позволяет наглядно показать, в чем состоит метод нахождения оптимального решения.

В том случае, когда число искоемых неизвестных больше двух, геометрическая картина совершенно аналогична той, что и в случае $n = 2$. Отличие состоит лишь в том, что ограничения задачи теперь уже соответствуют выпуклый многогранник, а критерий задачи порождает множество взаимно-параллельных плоскостей.

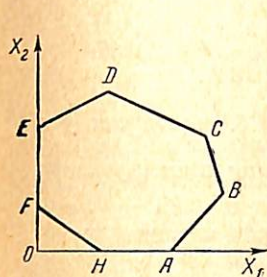


Рис. 5

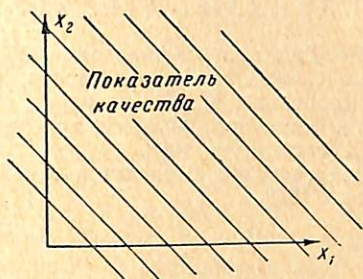


Рис. 6

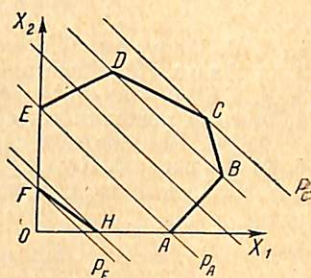


Рис. 7

Пусть известно допустимое решение, соответствующее вершине A , а прямой P_A , проходящей через A , соответствует значение показателя качества, равное K_A . Будем говорить, что какая-то вершина A_1 многоугольника «ближе», чем вершина A , к оптимуму, если проходящей через нее прямой P_A соответствует значение показателя качества K_A большее, чем K_A (если ищется максимум), или меньшее, чем K_A (если ищется минимум).

Будем для определенности полагать, что ищется максимум, но все рассуждения аналогичны и для задачи на минимум. Существуют простые способы для проверки, есть ли среди вершин, соседних с вершиной A , такая, которая «ближе», чем вершина A к оптимуму.

Возможны два варианта.

1. Если среди вершин, соседних с вершиной A , нет таких, которые расположены «ближе» к оптимуму, чем A , то прямая P_A находится в крайнем положении. Заметьте следующее: мы проверяли не все вершины многоугольника, и лишь соседние с A . И этого оказалось достаточным, поскольку многоугольник выпуклый. Иначе будет, если многоугольник невыпуклый. Рассмотрим рис. 8. Многоугольник $ACDEFGHB$ не является выпуклым. В этом случае, даже зная, что вершина A «ближе» к оптимуму, чем все соседние с ней вершины B и C , нельзя с достаточным на то обоснованием утверждать, что тем самым среди всех вершин многоугольника нет более «близкой» к оптимуму, чем вершина A . Действительно, из чертежа видно, что вершины E и D «ближе» к оптимуму, чем вершина A . Следовательно, вершина A соответствует оптимальному решению, а максимум показателя качества равен K_A .

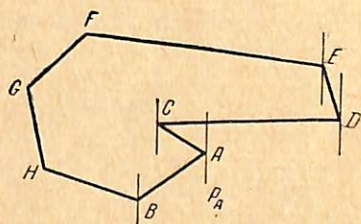


Рис. 8

2. Если среди вершин, соседних с вершиной A , существует хотя бы одна вершина A_1 , более «близкая» к оптимуму, чем A , то указывается простой способ нахождения допустимого решения, соответствующего вершине A_1 . После этого все рассуждения приводятся для вершины A_1 .

Так, поэтапно переходя от одной вершины к другой, более «близкой», придем к такой вершине, проходя через которую плоскость находится в

крайнем положении, т. е. весь многоугольник лежит по одну сторону от нее.

Этот процесс поиска оптимального решения путем перехода от одного опорного решения к другому, заведомо лучшему, получил название метода последовательного улучшения плана. Применяя этот метод решения, нужно просматривать в среднем, как показывает опыт решения большого числа задач линейного программирования, от m до $2m$ вершин, где m — число ограничений задачи.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование. М., Физматгиз, 1960.
2. С. Гасс. Линейное программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Я. Габр. Линейное программирование. М., Госстатиздат, 1960.
4. Методы решения общей задачи линейного программирования. Сб. статей под ред. В. С. Немчинова и др. М., Госстатиздат, 1963.
5. А. Чарнс, В. Купер, А. Хендерсон. Введение в линейное программирование. М., Изд. Моск. гос. экон. ин-та, 1959.

Поступила в редакцию
20 IV 1965 г.