

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОГО ХОЗЯЙСТВА

Л. С. БЕЛЯЕВ

(Иркутск)

В данной работе предлагается математическая модель для планирования развития сферы производства, которая в некоторых отношениях более точно отражает действительные взаимосвязи по сравнению с ранее предложенными моделями [1—7]. Излагаемые ниже математическая модель и алгоритм решения позволяют одновременно выполнять расчеты оптимального плана развития народного хозяйства и определять «расчетные» оценки отдельных продуктов, которые впоследствии должны использоваться для конкретных планово-проектных работ, как сейчас используются нормативный «срок окупаемости» или коэффициент эффективности капиталовложений. Численное значение последнего также определяется при расчетах по предлагаемой модели.

1. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И БАЛАНСОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем следующие условные обозначения: t — время, номер интервала времени, номер года ($t = 1, 2, \dots, T$); T — длительность рассматриваемого периода времени (общее число лет); i, j — виды продукции (сталь, нефть, электроэнергия, станки и т. д.); I — общее число видов продукции ($i, j = 1, 2, \dots, I$); x_i — годовой объем производства i -го вида продукции ($\text{м}^3/\text{год}$; $\text{т}/\text{год}$; $\text{квтч}/\text{год}$ и т. д.); $\dot{x}_i = dx_i/dt$ — прирост годового объема производства ($\text{м}^3/\text{год}^2$; $\text{т}/\text{год}^2$; $\text{квтч}/\text{год}^2$ и т. д.); s — способ производства какого-либо продукта или номер предприятия, выпускающего данный продукт; S_i — общее число способов производства или предприятий, выпускающих i -й вид продукции ($s = 1, 2, \dots, S_i$); x_{is} — годовой объем производства i -го продукта способом s , годовая производительность (мощность) предприятия ($\text{м}^3/\text{год}$; $\text{т}/\text{год}$; $\text{квтч}/\text{год}$ и т. д.); $\dot{x}_{is}$ — прирост годового производства i -го продукта способом s , годовой прирост мощности предприятия ($\text{м}^3/\text{год}^2$; $\text{т}/\text{год}^2$; $\text{квтч}/\text{год}^2$ и т. д.); x_{it} , $\dot{x}_{it}$ — то же, что x_i и $\dot{x}_i$, но в конкретном году t ; x_{ist} , $\dot{x}_{ist}$ — то же, что x_{is} и $\dot{x}_{is}$ но в конкретном году t ; u_{is} — себестоимость единицы i -го продукта, произведенного способом s ($\text{руб}/\text{м}^3$; $\text{руб}/\text{т}$ и т. д.); u_{ist} — то же, но в конкретном году t (по мере развития производственной сферы себестоимость продукции будет, как правило, уменьшаться); $U_{is} = u_{is}x_{is}$ — годовые издержки производства на s -м предприятии, выпускающем объем x_{is} i -го продукта в год ($\text{руб}/\text{год}$); $U_{ist} = u_{ist}x_{ist}$ — то же, но в конкретном году t ; k_{is} — удельные капиталовложения на единицу мощности s -го предприятия ($\text{руб}/\text{м}^3/\text{год}$; $\text{руб}/\text{т}/\text{год}$; $\text{руб}/\text{квтч}/\text{год}$; и т. д.); k_{ist} — то же, но в конкретном году t (чем позже строится предприятие, тем меньше будут удельные капиталовложения вследствие общего повышения производительности труда); $K_{is} = k_{is}x_{is}$ — стоимость s -го предприятия (руб.); $K_{is}' = k_{is}\dot{x}_{is}$ — годовой объем капиталовложений в s -е предприятие — стоимость годового прироста мощности предприятия ($\text{руб}/\text{год}$); $K_{ist}' =$

$= k_{ist}\dot{x}_{ist}$ — то же, но в конкретном году t , в котором вводится новая мощность $\dot{x}_{ist}$.

Рассмотрим отдельно вопрос о критерии и ограничениях модели. Нетрудно понять, что максимальный уровень материально-технической базы к концу планируемого периода при заданных ресурсах живого труда V_i и размерах потребления продуктов w_{it} будет достигнут в том случае, если производственные издержки всех действующих предприятий U за весь рассматриваемый период T будут минимальными:

$$U = \sum_{t=1}^T U_t = \min, \quad (1)$$

где t — номера лет планируемого периода.

В этом случае наряду с минимальным расходом средств производства на выпуск всей конечной продукции обеспечивается одновременное и максимальное их накопление.

Иначе говоря, минимум издержек производства действующих предприятий за весь планируемый период T будет обеспечивать максимальный уровень развития материально-технической базы к концу периода (как по величине накопленного овеществленного труда, так и по его производительности). Это положение будет дополнительно проиллюстрировано несколько ниже при рассмотрении материальных и стоимостных балансов.

Переходим к характеристике ограничений.

Как видно из принятых обозначений, каждую отрасль производства i мы подразделяем по способам производства (в общем случае — по предприятиям). Необходимость такого разделения вызывается тем обстоятельством, что именно путем изменения мощностей отдельных способов производства можно оптимизировать план развития народного хозяйства. Планирование развития производства заключается по существу в выборе последовательности (очередности) и назначении сроков (календарных дат) строительства новых предприятий. Кроме того, необходимо проверять эффективность действующих предприятий и устанавливать целесообразные сроки прекращения их деятельности (демонтажа). Поэтому независимыми переменными, которыми можно варьировать при оптимизации плана развития, являются годовые приросты мощностей отдельных способов производства ($\dot{x}_{ist}$).

В целях некоторого упрощения задачи будем предполагать, что производственная мощность всех предприятий используется полностью и годовой объем производства равен мощности предприятия. Тогда полный годовой объем производства i -го продукта будет равен сумме мощностей отдельных предприятий

$$x_{it} = \sum_{s=1}^{S_i} x_{ist}. \quad (2)$$

Аналогично прирост годового объема производства i -го продукта равен сумме приростов мощностей отдельных предприятий

$$\dot{x}_{it} = \sum_{s=1}^{S_i} \dot{x}_{ist}. \quad (3)$$

В равенстве (2) в сумму включаются лишь мощности действующих предприятий, а в равенстве (3) — лишь строящиеся и демонтируемые в данном году предприятия (демонтируемые — со знаком минус).

В связи с тем, что рассматриваемая задача является дискретной с интервалом времени $\Delta t = 1$ год, можно записать следующие зависимости, связывающие объемы производства смежных лет:

$$x_{it} = x_{it-1} + \dot{x}_{it}\Delta t = x_{it-1} + \dot{x}_{it} \quad (4)$$

и

$$x_{ist} = x_{ist-1} + \dot{x}_{ist}, \quad (5)$$

в которых приросты $\dot{x}_{ist}$ могут быть отрицательными в случае демонтажа предприятий.

Годовые издержки производства на выпуск полного годового объема отрасли x_{it} равны

$$U_{it} = \sum_{s=1}^{S_i} U_{ist} = \sum_{s=1}^{S_i} u_{ist}x_{ist} = u_{it}x_{it}, \quad (6)$$

где u_{it} — средняя себестоимость i -го продукта в t -м году.

Будем предполагать, что срок строительства предприятий равен одному году и новая мощность вводится в самом конце года. Тогда в i -м году должны строиться предприятия, обеспечивающие требуемый прирост производства соответствующего продукта для следующего $(t+1)$ -го года. Годовой объем капиталовложений в i -ю отрасль будет равен при этом

$$K_{it}' = \sum_{s=1}^{S_i} K'_{ist} = \sum_{s=1}^{S_i} k_{ist}\dot{x}_{ist+1}. \quad (7)$$

Для правильного функционирования производства в каждом году планируемого периода должны выдерживаться определенные балансовые соотношения между различными видами продукции. Обозначим: a_{ijs} — затраты i -го продукта (в натуральных единицах) на производство единицы j -го продукта способом s (t/m^3 ; m^3/t ; $t/квтч$ и т. д.); b_{ijs} — затраты i -го продукта (в натуральных единицах) на строительство единицы производственной мощности предприятия s , выпускающего j -й вид продукции ($t/m^3/год$; $m^3/t/год$; $m^3/m^3/год$; $t/квтч/год$ и т. д.).

Тогда полные годовые затраты i -го продукта на производство годового объема j -го продукта в t -м году будут равны

$$A_{ijt} = \sum_{s=1}^{S_i} a_{ijs}x_{jst} \quad (\text{ед. } i\text{-го продукта в год}). \quad (8)$$

Годовые затраты i -го продукта на строительство предприятий, выпускающих j -й продукт, в t -м году составят

$$B_{ijt} = \sum_{s=1}^{S_j} b_{ijs}\dot{x}_{jst+1} \quad (\text{ед. } i\text{-го продукта в год}). \quad (9)$$

Кроме того, потребуется создание запасов i -го продукта в t -м году на расширение производства j -го продукта в следующем $(t+1)$ -м году

$$A'_{ijt} = \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs}\dot{x}_{jst+1} \quad (\text{ед. } i\text{-го продукта в год}). \quad (10)$$

Непроизводственное потребление i -го продукта, которое для каждого года планируемого периода предполагается заданным, составляет w_{it} *ед/год* (если данный продукт используется только для производственных целей, то $w_{it} = 0$).

Полная потребность i -го продукта в t -м году на непроизводственное потребление, а также для выпуска всех видов продукции, строительства всех предприятий и создания необходимых запасов будет равна

$$\begin{aligned} x_{it} &= w_{it} + \sum_{j=1}^I (A_{ijt} + B_{ijt} + A'_{ijt}) = \\ &= w_{it} + \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} (a_{ijs}x_{jst} + b_{ijs}\dot{x}_{jst+1} + a'_{ijs}\dot{x}_{jst+1}), \quad i = 1, 2, \dots, I. \end{aligned} \quad (11)$$

Если данный продукт является только предметом потребления, то

$$x_{it} = w_{it}. \quad (11a)$$

Помимо материальных балансов (11), ежегодно должен соблюдаться общий стоимостной баланс производства и распределения продуктов. Этот баланс в конечном итоге сводится к балансу капитальных вложений, общая сумма которых является ограниченной. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Себестоимость какого-либо (i -го) продукта, произведенного способом s , равна

$$u_{is} = c_{is}^u + v_{is}^u = r_{is}^u + f_{is}^u + v_{is}^u,$$

где c_{is}^u — затраты овеществленного (прошлого) труда, состоящие из r_{is}^u и f_{is}^u ; r_{is}^u — износ основных фондов (амортизация, реновация); f_{is}^u — стоимость израсходованных материалов, топлива и т. п.; v_{is}^u — затраты живого труда на данном предприятии.

Будем предполагать, что для изготовления данного продукта расходуются материалы, изготовленные в предыдущем году и имеющие поэтому стоимость, соответствующую предыдущему году. Тогда себестоимость i -го продукта, произведенного способом s , в данном (t -м) году будет равна

$$u_{ist} = r_{is}^u + \sum_{j=1}^I u_{j,t-1} a_{jis} + v_{is}^u, \quad (12)$$

где r_{is}^u , a_{jis} , v_{is}^u не зависят от времени, а $u_{j,t-1}$ и вся сумма будут уменьшаться к концу периода T вследствие общего роста производительности труда. Соответственно и себестоимость всех продуктов будет изменяться от года к году, как правило, уменьшаясь. Однако в каждом году планируемого периода себестоимость u_{ist} любого продукта может быть определена, так как средняя себестоимость расходуемых продуктов в предыдущем году $u_{j,t-1}$ бывает известна.

Аналогично (12) для удельных капиталовложений можно записать соотношение (предполагается, что строительство обеспечивается материалами и оборудованием из производства данного же года)

$$k_{ist} = r_{is}^h + \sum_{j=1}^I u_{it} b_{jis} + v_{is}^h, \quad (13)$$

где r_{is}^h представляет собой износ основных фондов строительных организаций (тех сооружений и строительного оборудования, которые неполностью изнашиваются при сооружении данного s -го объекта).

Рассмотрим теперь схему затрат и распределения продуктов производства (рис. 1).

Общество вкладывает в производство живой труд V , затрачивая его как на действующих предприятиях V_u , так и в строительстве V_h . Одновременно расходуются оборотные средства Φ_{t-1}^u (сырье, материалы и т. п.), которые учитываются по ценам предыдущего года u_{it-1} , а также изнашиваются основные фонды R действующих предприятий R_u и строительных организаций R_h .

В самой верхней части рис. 1 показаны затраты на производство на действующих предприятиях. Эти затраты, слагающиеся из V_u , Φ_{t-1}^u и R_u в целом по всем отраслям с учетом (6), составляют

$$U_t = \sum_{i=1}^I U_{it} = \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} u_{ist} x_{ist}. \quad (14)$$

Несколько ниже на рисунке показано распределение продукции действующих предприятий. Часть ее стоимостью

$$W_t = \sum_{i=1}^I u_{it} w_{it} \quad (15)$$

потребляется обществом и не участвует в последующих стадиях производства. Вторая часть идет на возмещение израсходованных оборотных фондов. Стоимость этой части равна

$$\Phi_t^u = \sum_{i=1}^I u_{it} \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} x_{jst}. \quad (16)$$

Следует отметить, что в натуральном объеме этот фонд возмещения равен объему материалов и сырья, израсходованных на действующих предприятиях. Однако в связи с тем, что средняя себестоимость продукции снижается от года к году (уменьшается в каждом последующем цикле производства), стоимость фонда возмещения Φ_t^u будет меньше, чем стоимость израсходованных материалов:

$$\Phi_t^u < \Phi_{t-1}^u = \sum_{i=1}^I u_{it-1} \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} x_{jst}. \quad (17)$$

Образующаяся экономия

$$\delta\Phi_t = \Phi_{t-1}^u - \Phi_t^u \quad (18)$$

направляется на расширение производства (увеличивает фонд накопления).

Третья часть продукции действующих предприятий ($\Delta\Phi_t$) предназначена для увеличения оборотных фондов (запасов сырья и материалов). Как мы предполагаем, натуральный объем ее A_t' (10) должен обеспечивать потребность вновь построенных предприятий (приростов мощностей $\dot{x}_{jst+1}$). Стоимость этой части продукции равна

$$\Delta\Phi_t = \sum_{i=1}^I u_{it} \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} \dot{x}_{jst+1}. \quad (19)$$

Наконец, четвертая часть продукции действующих предприятий расходуется на капитальное строительство, которое, как отмечалось выше, должно обеспечивать требуемый прирост производственных мощностей для будущего года (приросты $\dot{x}_{jst+1}$). Натуральные объемы этой части определяются выражениями (9) и (11), а стоимость составляет

$$\Phi_t^k = \sum_{i=1}^I u_{it} \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} b_{ijs} \dot{x}_{jst+1}. \quad (20)$$

В нижней правой части рис. 1 показаны затраты на капитальное строительство и распределение его продукции. Затраты, слагающиеся из V_k , R_k и Φ_t^k , в сумме равны

$$K_t' = \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} k_{ist} \dot{x}_{ist+1}. \quad (21)$$

Вся продукция промышленного строительства (прочее строительство мы относим к потреблению) идет на основные фонды, причем одна ее часть R_t представляет собой возмещение износа, а вторая часть ΔK_t — прирост основных фондов (накопление). Следует отметить, что за счет фонда возмещения R_t фактически тоже происходит некоторое расширение производства, так как вместо старых изношенных предприятий на ту же сумму R_t можно построить новые предприятия большей производительности. Однако амортизационный фонд R_t , как правило, расходуется без привязки к конкретным отраслям (увеличивает общий объем средств на капитальное строительство), и в данном случае он нас интересует лишь с точки зрения стоимостного баланса затрат производства и распределения продукции.

По всему народному хозяйству в целом стоимостной баланс производства и распределения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{R_u + \Phi_{t-1}^u + V_u\} + [R_k + \Phi_t^k + V_k] = \\ = \{W_t + \Phi_t^u + \Delta \Phi_t + \Phi_t^k\} + [R_t + \Delta K_t], \end{aligned} \quad (22)$$

где левая часть равенства содержит затраты на производство, а правая часть — распределение продукции. В фигурных скобках заключены величины, относящиеся к действующим предприятиям, в квадратных скобках — к капитальному строительству. Это уравнение записано на рис. 1 в левой нижней его части. Там же указана величина стоимости фонда накопления, которая может быть получена из уравнения (22) после сокращения равновеликих слагаемых Φ_t^k и $R_t = R_u + R_k$:

$$\Delta K_t + \Delta \Phi_t = (V_u + V_k) + (\Phi_{t-1}^u - \Phi_t^u) - W_t = V_t + \delta \Phi_t - W_t, \quad (23)$$

где размер экономии на возмещении оборотных фондов $\delta \Phi_t$ равен:

$$\delta \Phi_t = \sum_{i=1}^I (u_{it-1} - u_{it}) \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} \dot{x}_{jst}. \quad (24)$$

Равенство (23) показывает, что для увеличения фонда накопления необходимо стремиться не только к минимуму стоимости предметов потребления W_t , но и к увеличению экономии на возмещении оборотных средств $\delta \Phi_t$. Это означает, что нужно снижать издержки производства

всей продукции действующих предприятий, как предметов потребления, так и средств производства. Поэтому минимум издержек производства всех действующих предприятий (1) является наиболее полным критерием оптимальности плана развития производственной сферы.

Анализируя стоимостной баланс затрат и распределения продукции производства (22), можно видеть, что ежегодный объем средств, которые могут быть направлены на капитальное строительство, является ограниченным.

В стоимостном выражении этот объем определяется равенством

$$K_t' = \Delta K_t + R_t = V_t - W_t + \delta \Phi_t - \Delta \Phi_t + R_t \quad (25)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_i} k_{ist} \dot{x}_{ist+1} = & V_t - \sum_{i=1}^I u_{it} w_{it} + \sum_{i=1}^I (u_{it-1} - u_{it}) \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} x_{jst} - \\ & + \sum_{i=1}^I u_{it} \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} \dot{x}_{jst+1} + \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} (r_{is}^u x_{ist} + r_{is}^k \dot{x}_{jst+1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Равенство (26) является дополнительным ограничением, накладываемым при оптимизации плана развития производства. Это равенство, отражающее ограниченность средств на капитальное строительство, приводит к необходимости отказываться от строительства слишком дорогих (хотя и наиболее производительных) предприятий, если общий баланс капиталовложений получается отрицательным.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем предполагать наличие следующих исходных данных, необходимых для составления плана развития производства:

1) мощности всех действующих к началу планируемого периода предприятий с их экономическими и техническими показателями:

$$x_{is0}, u_{is0}, r_{is}^u, a_{jis}, v_{is}^u; i = 1, 2, \dots, I; s = 1, 2, \dots, S_i^0;$$

2) средняя себестоимость каждого вида продукции к началу планируемого периода u_{i0} ; $i = 1, 2, \dots, I$;

3) набор всех предприятий, которые могут быть построены в течение планируемого периода, с их технико-экономическими показателями и датами t_{is}^{nc} наиболее раннего возможного начала строительства:

$x_{is}; r_{is}^u, a_{jis}, v_{is}^u; r_{is}^k, b_{jis}, v_{is}^k; t_{is}^{nc}; i = 1, 2, \dots, I; s = S_i^0 + 1, \dots, S_i$;

4) ежегодный объем непроизводственного потребления каждого вида продукции для всех лет планируемого периода, а также для $(T+1)$ -го года: $w_{it}; i = 1, 2, \dots, I; t = 1, 2, \dots, T+1$;

5) общие ежегодные затраты живого труда, направляемого в производственную сферу, для каждого года планируемого периода

$$V_t; t = 1, 2, \dots, T.$$

При наличии указанной исходной информации задачи оптимизации развития народного хозяйства математически ставится следующим образом. Найти такой план развития производства, который обеспечивает минимум издержек производства действующих предприятий (14) за весь

планируемый период

$$U = \sum_{t=1}^T U_t = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_i} u_{ist} x_{ist} \quad (27)$$

при условии соблюдения материальных балансов (11) в каждом году периода

$$\sum_{s=1}^{S_i} x_{ist} = w_{it} - \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} (a_{ijs} x_{ist} + b_{ijs} \dot{x}_{jst+1} + a_{ijs} \dot{x}_{jst+1});$$

$$i = 1, 2, \dots, I; t = 1, 2, \dots, T$$

и при условии, что общий объем капиталовложений в каждом году в стоимостном выражении определяется соотношением (26):

$$\sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_i} k_{ist} \dot{x}_{ist+1} = V_t + \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_i} (r_{is}^u x_{ist} + r_{is}^k \dot{x}_{ist+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^I (u_{it-1} - u_{it}) \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} x_{jst} - \sum_{i=1}^I u_{it} w_{it} - \sum_{i=1}^I u_{it} \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} a_{ijs} \dot{x}_{jst+1}.$$

$$t = 1, 2, \dots, T. \quad (29)$$

Еще одним ограничением, которое должно учитываться при решении задачи, является условие, чтобы строительство новых предприятий не начиналось ранее срока t_{is}^{nc} .

Число равенств (28) составляет $I \times T$, а равенств (29) — T . Следует отметить, что в какое-либо из этих равенств, записываемых, например, для t -го года, под знаками некоторых сумм оказываются включенными приросты мощностей $\dot{x}_{ist+1}$ следующего $(t+1)$ -го года. Это придает данной задаче четко выраженный динамический характер. Кроме того, такие экономические показатели, как u_{ist} , k_{ist} , u_{it} , будут зависеть от варианта развития производства в период, предшествовавший году t . Это предопределяет необходимость последовательного годового расчета плана развития, начиная с первого года.

Изложенная выше постановка задачи оптимального планирования характеризуется разбивкой отраслей на отдельные способы производства (в общем случае на отдельные предприятия). Это резко увеличивает размерность (объем) задачи. Однако такая разбивка является неизбежной. Изменять план развития производства можно только путем изменения способов производства отдельных продуктов (путем выбора в качестве очередного объекта строительства того или иного предприятия). Поэтому без разбивки отраслей на различные способы производства вообще невозможна постановка задачи оптимизации народного хозяйства, а следовательно, и строгое ее решение.

Несмотря на чрезвычайно большой объем полученной задачи, решение ее станет, по-видимому, возможным уже в ближайшие годы с применением новейших вычислительных машин. Для обеспечения непрерывного планирования и последовательного уточнения плана на ближайшие годы расчеты потребуется выполнять один раз в год, и при соответствующей организации работ современные ЭВМ в состоянии их осуществить. Главную трудность будет представлять подготовка исходной информации.

Другие особенности данной постановки задачи — вид оптимизируемой функции (критерий — минимум издержек производства действующих

предприятий за планируемый период), а также четкий учет динамики в балансовых соотношениях.

В рассмотренной постановке задачи не учтен ряд дополнительных факторов, влияющих на эффективность развития производственной сферы: продолжительность строительства предприятий, которая, как правило, превышает один год; возможность неполной загрузки производственных мощностей; комбинированное производство различных видов продукции на одном и том же предприятии; порайонное размещение производства и потребления продукции и др. В принципе большинство из этих факторов может быть так или иначе учтено в данной модели при соответствующем ее усложнении.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТОВ

Рассматриваемая задача оптимального планирования развития производства в математическом отношении является фактически неклассической вариационной задачей с ограничениями. Решение ее как задачи теории оптимального управления с применением принципа максимума Л. С. Понтрягина затруднительно ввиду большой сложности дифференциальных уравнений, описывающих систему. Не представляется также возможным решение данной задачи известными методами динамического программирования (Р. Беллмана) вследствие большого числа переменных.

В приведенной выше постановке за счет разбивки планируемого периода на дискретные интервалы времени (годы) задача сведена к неклассической задаче на условный экстремум функции многих переменных. В принципе она может быть решена методами нелинейного программирования (нелинейность задачи обуславливается зависимостью экономических показателей u_{ist} , u_{it} и k_{ist} от варианта развития производства). Однако ввиду очень большой размерности задачи применение для ее решения методов нелинейного программирования может оказаться практически неосуществимым.

Представляется целесообразным применить для решения полученной задачи метод неопределенных множителей Лагранжа. В ряде случаев, когда условный экстремум функции находится вне области допустимых значений переменных, и точка, соответствующая возможному минимуму или максимуму, лежит поэтому где-то на границе допустимой области, метод множителей Лагранжа может оказаться весьма эффективным. С его помощью можно получить критерии, характеризующие относительный эффект от изменения значений той или иной переменной и облегчающие нахождение решения. Недостатком метода является необходимость итеративного подбора численного значения множителей Лагранжа. Однако этот недостаток компенсируется тем обстоятельством, что полученные значения множителей являются по существу нормативами эффективности дефицитных ресурсов, т. е. весьма важными экономическими показателями, которые требуются при корректировках плана и различного рода частных плано-проектных работах.

Перейдем к математическому решению задачи. Сформулируем ее как задачу на условный экстремум: найти минимум функции (27) при дополнительных условиях (28) и (29). Составим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_i} u_{ist} x_{ist} + \sum_{t=1}^T \lambda_{ht} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{s=1}^{S_i} k_{ist} \dot{x}_{ist+1} - V_t - R_t - \right]$$

$$- \delta \Phi_t + W_t + \Delta \Phi_t \Big] + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I \lambda_{it} \left[w_{it} + \sum_{j=1}^I \sum_{s=1}^{S_j} (a_{ijs} x_{jst} + \right. \\ \left. + b_{ijs} \dot{x}_{jst+1} + a_{ijs} \dot{x}_{jst+1}) - \sum_{s=1}^{S_i} x_{ist} \right], \quad (30)$$

где λ_{ht} и λ_{it} — неопределенные множители Лагранжа.

Независимыми переменными, как уже отмечалось выше, в нашей задаче являются приросты $\dot{x}_{ist}$ мощностей отдельных способов производства (предприятий) в каждом году планируемого периода. Поэтому экстремум функции L будет достигаться при равенстве нулю частных производных

$$\partial L / \partial \dot{x}_{ist} = 0; \quad t = 2, 3, \dots, T; \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad s = 1, 2, \dots, S_i. \quad (31)$$

Анализируя зависимости отдельных величин, входящих в функцию L , можно установить следующие соотношения:

1) частные производные $\partial x_{jpt} / \partial \dot{x}_{ist} = 0$ при $j \neq i$ или $p \neq s$ или $\tau \neq t$;

2) частная производная $\partial x_{ist} / \partial \dot{x}_{ist} = 1$;

3) частные производные $\partial x_{jpt} / \partial \dot{x}_{ist} = 0$ при $j \neq i$ или $p \neq s$, а также при $\tau < t$;

4) частные производные $\partial x_{ist} / \partial \dot{x}_{ist} = 1$ при $\tau \geq t$, так как прирост мощностей $\dot{x}_{ist}$ s -го предприятия в t -м году увеличивает мощности данного предприятия во все последующие годы $\tau \geq t$;

5) частные производные по $\dot{x}_{ist}$ от всех остальных величин, входящих в функцию L , будут равны нулю.

С учетом указанных соотношений частная производная функции L по какой-нибудь независимой переменной $\dot{x}_{ist}$ будет равна

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ist}} = \sum_{\tau=t}^T u_{ist\tau} + \lambda_{ht-1} k_{ist-1} + \sum_{\tau=t}^T \sum_{j=1}^I \lambda_{i\tau-1} a_{jis} + \sum_{j=1}^I \lambda_{jt-1} b_{jis} - \sum_{\tau=t}^T \lambda_{i\tau}. \quad (32)$$

Представим себестоимость u_{ist} в виде (12) суммы ее слагающих, приравняем выражение (32) нулю и перенесем последний его член (последнюю сумму) в правую часть получившегося равенства.

При этом будем иметь

$$\lambda_{ht} k_{ist} + \sum_{j=1}^I \lambda_{jt} b_{jis} + \sum_{\tau=t+1}^T \left[r_{is}^u + v_{is}^u + \sum_{j=1}^I (u_{j\tau-1} + \lambda_{j\tau-1}) a_{jis} \right] = \sum_{\tau=t+1}^T \lambda_{i\tau}. \quad (33)$$

Аналогичные равенства можно получить для всех предприятий i -й отрасли ($s = 1, 2, \dots, S_i$). Правые части всех таких равенств, записанных для одного года и одной отрасли, будут одинаковы. Поэтому можно приравнять между собой левые части, которые мы будем обозначать буквой z_{ist} . При этом получим следующие равенства, которые являются условиями оптимальности плана развития производства:

$$z_{i1t} = z_{i2t} = \dots = z_{iS_i t}; \quad i = 1, 2, \dots, I; \quad t = 2, 3, \dots, T. \quad (34)$$

Экономический смысл этих равенств состоит в требовании, чтобы величины z всех предприятий, входящих в одну отрасль, в каждом году планируемого периода были равны между собой. Если величину z назвать

«удельными расчетными затратами» (по аналогии с критерием $\sigma K + U$), то смысл равенств (34) можно интерпретировать как требование равенства удельных расчетных затрат (у.р.з.) для всех предприятий отрасли в каждом году периода.

Практически равенства (34), как правило, не могут быть реализованы — каждое предприятие будет иметь свое значение у.р.з., большее или меньшее, чем у других предприятий. Однако величина удельных расчетных затрат может использоваться как критерий для оценки эффективности отдельных предприятий при составлении плана развития производства. Наиболее эффективными будут те предприятия отрасли, у которых значения у.р.з. в данном году минимальные. Эти предприятия и следует выбирать для первоочередного строительства (если это позволяет срок t_{nc}^c).

Критерий z_{ist} может использоваться также для оценки эффективности действующих предприятий при проверке целесообразности их дальнейшей эксплуатации. В этом случае в выражении у.р.з. (33) будут отсутствовать члены с k_{ist} и b_{jis} . Какое-либо действующее предприятие следует оставить в эксплуатации, если полученное значение z_{ist} меньше значений у.р.з. новых предприятий, которые могут быть приняты к строительству, и следует демонтировать в противном случае.

В связи с тем, что в выражение (33) для у.р.з. входят неопределенные множители Лагранжа λ_{ht} и λ_{it} , численное значение у.р.з. нельзя определить заранее. Это вызывает необходимость вести расчет оптимального плана способом последовательных приближений, причем значения множителей λ_{ht} и λ_{it} для каждой итерации должны приниматься в соответствии с результатами, полученными в предыдущей итерации. При соответствующем выборе алгоритма данный процесс будет сходящимся, а для подбора с достаточной для практики степенью точности оптимального варианта плана потребуется, по-видимому, не более 10 итераций.

Возможный алгоритм решения рассматриваемой задачи может быть примерно следующим (см. блок-схему на рис. 2).

1. Принимается некоторый исходный вариант развития производства — достаточно произвольно намечаются объемы производства каждого вида продукции во всех годах планируемого периода

$$x_{it}^I; i = 1, 2, \dots, I; t = 2, 3, \dots, T$$

и определяются соответствующие годовые приросты

$$\dot{x}_{it}^I = x_{it}^I - x_{it-1}^I.$$

2. Выбираются некоторые исходные значения множителей λ_{ht}^I и λ_{it}^I (например, $\lambda_{ht}^I = 1$ и $\lambda_{it}^I = 0$ для всех лет и всех видов продукции).

3. Производится выбор предприятий для обеспечения принятых приростов $\dot{x}_{it}^I$ во всех годах последовательно, начиная со второго года (прирост первого года предполагается уже обеспеченным тем строительством, которое велось до начала планируемого периода). Во всех отраслях в первую очередь выбираются те предприятия, удельные расчетные затраты которых получаются наименьшими. В первом приближении ввиду неизвестности пока еще экономических показателей будущих лет у.р.з. можно определять по приближенному выражению

$$z_{ist}^I = \lambda_{ht}^I k_{is0} + (T - t) u_{is0}, \quad (35)$$

где k_{is0} и u_{is0} — удельные капиталовложения и себестоимость соответствующих предприятий в ценах на начало периода, которые известны.

При выборе предприятий должны проверяться сроки t_{is}^{nc} , которые могут задерживать начало строительства некоторых более эффективных

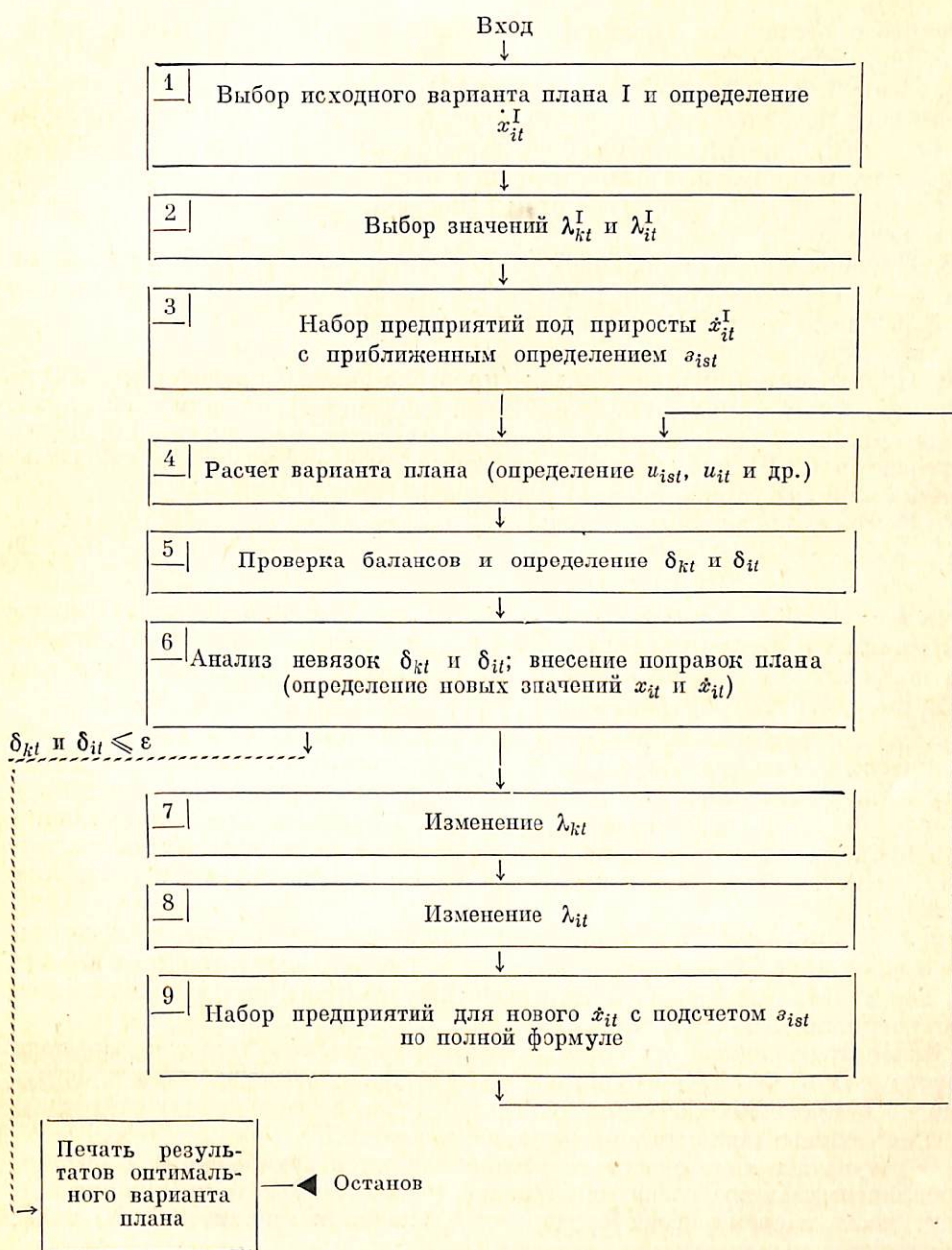


Рис. 2. Блок-схема расчета оптимального плана развития производства

предприятий, а также привести к тому, что развитие какой-либо отрасли будет целиком определяться этими сроками (развитие отрасли будет ограничиваться из-за общего недостатка предприятий, выпускающих данный продукт).

Набор предприятий можно осуществлять дискретно — по фактическим мощностям имеющихся предприятий или их очередей.

Наряду с выбором новых предприятий проверяется эффективность действующих. Если при этом окажется, что $(T-t)u_{iso} > \dot{a}_{ipt}^I$, то дей-

ствующее предприятие s должно демонтироваться, а вместо него строиться предприятие p .

4. Выполняется расчет полученного плана развития — последовательно для всех лет, начиная с первого, определяются: себестоимость продукции всех предприятий u_{ist} , среднеотраслевая себестоимость u_{it} , удельные капиталовложения k_{ist} , стоимость фонда потребления W_t и другие показатели ($\Delta\Phi_t$, $\delta\Phi_t$, R_t , K_t'). При этом используются зависимости, полученные в разделе 1.

5. Проверяются капитальный (29) и материальные (28) балансы во всех годах периода — определяются невязки δ_{ht}^I и δ_{it}^I , представляющие собой разности правых и левых частей соответствующих балансовых равенств.

6. Производится анализ невязок (проверка знака, определение их суммы за все T лет и др.) и вносятся соответствующие поправки в исходный вариант плана — устанавливаются новые значения годовых объемов (x_{it}^{II}) и приростов ($\dot{x}_{it}^{II}$) для каждой отрасли, которые представляют собой следующий вариант (приближение) плана развития.

7. Изменяются значения множителей λ_{ht} :

$$\lambda_{ht}^{II} = \lambda_{ht}^I \pm \Delta\lambda_h,$$

причем знак плюс принимается, если $\delta_{ht}^I > 0$ (дефицит капиталовложений), а знак минус — если $\delta_{ht}^I < 0$ (избыток капиталовложений). Значение поправки $\Delta\lambda_h$ можно выбрать на основании специальных расчетов (например, по способу Ньютона).

8. Для тех отраслей, развитие которых ограничивается сроками t_{is}^{nc} , множители λ_{it} соответствующим лет увеличиваются на некоторую величину $\Delta\lambda_{it}$. То же самое производится в первом году для тех отраслей, у которых $\delta_{it}^I < 0$ (дефицит i -го продукта). Поправки $\Delta\lambda_{it}$ можно принимать пропорционально относительной величине дефицита и среднеотраслевой себестоимости, либо определять каким-нибудь другим подходящим способом.

9. Вновь набираются предприятия для обеспечения полученных во втором приближении приростов ($\dot{x}_{it}^{II}$) всех отраслей. Осуществляется это так же, как указано выше в п. 3, но эффективность предприятий оценивается уже по полной формуле у.р.з. (33).

Далее повторяются операции пунктов (блоков) 4—9 до тех пор, пока в очередной итерации не будет достигнуто уменьшение невязок до практически допустимых размеров (блок 6). После этого печатаются результаты последнего варианта и расчет заканчивается.

В результате такого расчета устанавливаются оптимальные и сбалансированные размеры развития отраслей (годовые объемы продукции x_{it}), очередность и сроки ввода предприятий, значения множителей λ_{ht} и λ_{it} , а также другие желаемые показатели.

Следует отметить особую роль множителей λ_{ht} и λ_{it} , выражающих ограниченность капитальных вложений и дефицитных продуктов.

Эти множители должны использоваться при проектных и плановых работах для оценки эффективности объектов строительства или различного рода производственных мероприятий. В настоящее время для этих целей используются нормативный срок окупаемости дополнительных капиталовложений, а также различные показатели, например расход дефицитных материалов на единицу продукции. Действительно, обоснованные значения показателей λ_{ht} и λ_{it} или им подобных других показателей можно определить только расчетами развития всего народного хозяйства. Какие-либо другие методы их «нормирования» неизбежно снижают точность планирования.

Следует подчеркнуть, что показатели λ_{ik} и λ_{it} , так же как и нормативный срок окупаемости [8] или объективно обусловленные оценки [1], должны использоваться лишь в качестве «расчетных» критериев — при плано-проектных проработках для оценки эффективности вариантов. Устанавливать на основании этих показателей цены продуктов производства было бы, по-видимому, неправильно, так как это исказило бы учет фактических затрат труда. Между тем, не зная этих затрат, нельзя определить и сами «расчетные» критерии. Цены на продукты производства следует устанавливать по среднеотраслевой себестоимости, ежегодно корректируя их в соответствии со статической отчетностью.

Одновременно показатели λ_{it} , выражающие народнохозяйственную эффективность дефицитных средств производства, могут использоваться при оценке хозрасчетной деятельности предприятий, способствуя осуществлению принципа демократического централизма в управлении производством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
3. В. С. Немчинов. Экономико-математические методы и модели. М., Соцэкгиз, 1962.
4. В. В. Новожилов. Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве. В Сб. Применение матем. в эконом. исслед. М., Соцэкгиз, 1959.
5. Б. Н. Михалевский. Перспективные расчеты на основе простых динамических моделей. М., «Наука», 1964.
6. В. С. Дадаян. Однопродуктовая модель оптимального перспективного развития. В сб. Эконом.-матем. методы, вып. 1. М., Изд-во АН СССР, 1963.
7. В. Ф. Пугачев. О критерии оптимальности экономики. В сб. Эконом.-матем. методы, вып. 1. М., Изд-во АН СССР, 1963.
8. Типовая методика определения экономической эффективности капитальных вложений и новой техники в народном хозяйстве СССР. М., Госпланиздат, 1960.

Поступила в редакцию
22 I 1965