ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1965
том I, вып. 5

ИЗМЕРЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ В МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

И. З. КАГАНОВИЧ

(*Таллин*)

ДВУХОТРАСЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

Дана система, описываемая линейными уравнениями (1) с переменными x_1, x_2 и свободными членами y_1, y_2 (те и другие будем считать элементами системы)

$$x_1 = a_{12}x_2 + y_1,$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + y_2. \qquad (1)$$

Рассмотрим схему связей (зависимостей) между этими элементами, изображенную на рис. 1.

Стрелки на схеме указывают направление связей. В начале стрелки (на выходе) находится источник воздействия, в конце стрелки (на вхо-

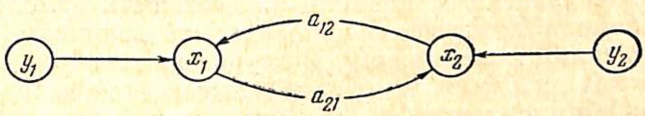

Рис. 1

де) — объект воздействия. Интенсивность связи характеризуют коэффициенты пропорциональности a_{12}, a_{21}. Для связей $y_1 \to x_1$, $y_2 \to x_2$ коэффициент равен единице. Если связь осуществляется через промежуточные элементы, соответствующие коэффициенты перемножаются. Так, связь $y_1 \to x_1 \to x_2$ количественно выражается как $a_{21}y_1$ (для связи $y_1 \to x_1$ коэффициент 1, для $x_1 \to x_2$ коэффициент a_{21}).

Если к переменной направлено несколько стрелок, то представляемые ими выражения зависимостей алгебраически складываются. Например, сумма $y_2 + a_{21}y_1$ характеризует совокупность связей $y_2 \to x_2 \leftarrow x_1 \leftarrow y_1$.

Связи, соединяющие лишь разные, т. е. неповторяющиеся элементы системы, являются прямыми. К другому типу связей принадлежат такие, при которых цепочка связей оканчивается элементом системы, из которого исходит. В нашем примере каждое изменение x_1 влечет за собой изменение x_2, что в свою очередь оказывает обратное воздействие на x_1. Образуются циклические соединения элементов — обратные связи. В случае обратной связи переменная воздействует на саму себя (здесь — через посредство другой переменной). Таковы в нашей схеме связи $x_1 \to x_2 \to x_1$, $x_2 \to x_1 \to x_2$.

Пользуясь рассмотренным принципом характеристики внутренних связей системы, опишем совокупность связей переменных $x_i\,(i = 1, 2)$.

Величина x_1 находится под воздействием y_1 (связь $y_1 \to x_1$), y_2 (связь $y_2 \to x_2 \to x_1$) и самой себя (связь $x_1 \to x_2 \to x_1$). Связи переменной x_2 аналогичны.

Следовательно,

$$x_1 = y_1 + a_{12}y_2 + a_{12}a_{21}x_1, \quad x_2 = y_2 + a_{21}y_1 + a_{12}a_{21}x_2. \tag{2}$$

Система (2) фиксирует промежуточную стадию обратного линейного преобразования системы (1).

Величина x_i в уравнениях (2) разделена на две части. Одна часть $a_{12}a_{21}x_i$ — результат обратных связей x_i, другая — количественное выражение прямых связей переменной, ее значение *на входе*.

В уравнениях (3) входные величины переменных x_i выражены через y_j $(j = 1, 2)$:

$$x_1(1 - a_{12}a_{21}) = y_1 + a_{12}y_2, \quad x_2(1 - a_{21}a_{21}) = a_{21}y_1 + y_2. \tag{3}$$

В уравнениях (4)—(5) через y_j выражены значения переменных *на выходе*, учитывающие и прямые связи и «внутренний оборот» системы. Тем самым завершено обратное линейное преобразование системы (1).

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (y_1 + a_{12}y_2)\cdot 1 \,/\, (1 - a_{12}a_{21}) \\ x_2 &= (a_{21}y_1 + y_2)\cdot 1 \,/\, (1 - a_{12}a_{21}) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1\cdot 1 \,/\, (1 - a_{12}a_{21}) + y_2\cdot a_{12} \,/\, (1 - a_{12}a_{21}) \\ x_2 &= y_1\cdot a_{21} \,/\, (1 - a_{12}a_{21}) + y_2\cdot 1 \,/\, (1 - a_{12}a_{21}) \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Обратная связь в системе (1) является жесткой, т. е. ее воздействие на переменные не зависит от времени или скорости изменения выходной величины; последняя пропорциональна входной величине и воспроизводит ее без отставаний и искажений. В случае жесткой обратной связи отношение выходной величины ко входной называется передаточным коэффициентом, коэффициентом усиления или мультипликатором. В дальнейшем будем использовать термин «передаточный коэффициент» (п.к.), обозначая его в формулах буквой R.

В системе (4)

$$R = \frac{1}{1 - a_{12}a_{21}}. \tag{6}$$

Как видно, п.к. инвариантен по отношению к переменным и их входным величинам и целиком определяется матрицей коэффициентов системы, т. е. ее внутренней организацией.

В уравнениях (4) п.к. «домножает» величину переменной на входе до ее значения на выходе. Таким же множителем п.к. служит и для коэффициентов системы (1), которые он преобразует в коэффициенты системы (5) (элементы обратной матрицы). Обозначив последние через b_{ij}, запишем это преобразование в следующем виде:

$$b_{ij} = Ra_{ij} \text{ при } i \neq j; \quad b_{ii} = R \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2). \tag{7}$$

Величина, обратная п.к., представляет собой определитель системы (1). Следовательно, определитель выражает в данном случае отношение входной и выходной величин или — что то же — элементов прямой и обратной матриц:

$$\frac{a_{ij}}{b_{ij}} = 1 - a_{12}a_{21} = \Delta \qquad (i \neq j), \tag{8}$$

где Δ — определитель системы (1).

В формуле (6) п.к. представлен в виде функции параметра $a_{12}a_{21}$. Это, как явствует из выражения (3), доля величины x_i на выходе, передаваемая в силу обратной связи на вход. Такой показатель носит наименование коэффициента обратной связи.

Поскольку в данном случае $b_{ij} = Ra_{ij} = a_{ij} / (1 - v)$ $(i = 1, 2;$ $j = 1, 2;$ $i \neq j)$, где $v = a_{12}a_{21}$ — коэффициент обратной связи, то

$$v = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{b_{ij}}. \tag{9}$$

График п.к. (рис. 2) представляет собой равностороннюю гиперболу с асимптотами $R = 0$ и $v = 1$. Точка (0; 1) выражает равенство состояния системы на входе и на выходе, т. е. отсутствие в ней обратных связей. Суммарная интенсивность связей в системе принята, таким образом, за единицу. При $v = 0$ связи целиком осуществляются как прямые $(R = 1)$; по мере роста величины v роль обратных связей увеличивается, но полностью заместить прямые они не могут без разрыва связей, т. е. без превращения системы в несовместную или неопределенную (при $v = 1$ $\Delta = 0$).

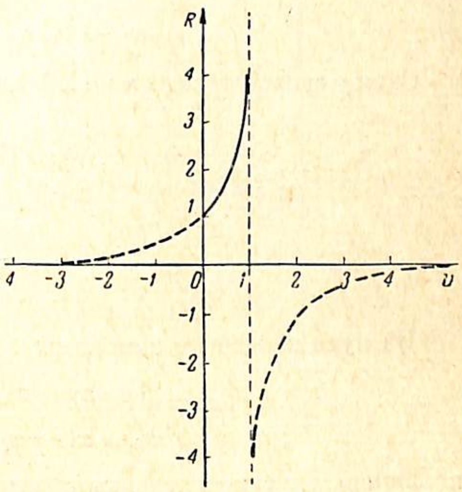

Рис. 2

Наложим теперь на переменные в системе (1) ограничения и дадим ей экономическую интерпретацию: $x_i \geqslant 0$ — валовой выпуск (валовой продукт) i-й отрасли, включая ввоз $(i = 1, 2)$; $y_i \geqslant 0$ — конечный продукт i-й отрасли; $a_{ij} \geqslant 0$ — коэффициенты прямых затрат продукции i-й отрасли на единицу продукции j-й отрасли $(j = 1, 2)$. Существуют такие $x_i > 0$, что $y_i > 0$.

Таким образом, мы будем иметь дело с двухотраслевой моделью межотраслевого баланса при $a_{ii} = 0$.

Входную величину переменной x_i в уравнениях (3) будем именовать прямыми затратами $(y_1 + a_{12}y_2;$ $a_{21}y_1 + y_2)$, а величину $a_{12}a_{21}x_i$ — обратными затратами.

Определим область существования п.к. и коэффициента обратной связи в данной модели.

Из формулы п.к. $R = 1 / (1 - v)$ следует, что $R \neq 0$.

По условию матрица $A = (a_{ij})$ неотрицательна, так что при $y_i > 0$ прямые затраты (3) положительны. Значит $R < 0$ невозможно, ибо нарушало бы требование неотрицательности вектора X, как это хорошо видно в выражении (4).

В силу тех же условий $v = a_{12}a_{21} \geqslant 0$. Обобщая результаты $R > 0$ и $v \geqslant 0$, получим

$$R \geqslant 1; \quad 0 \leqslant v < 1. \tag{10}$$

В таких границах п.к. служит мерой увеличения затрат на единицу конечной продукции за счет обратных связей. Поскольку выпуск меняется в том же направлении, что и затраты, данная система обладает *положительной* обратной связью. График п.к., соответствующий условиям (10), изображен на рис. 2 сплошной линией (часть гиперболы в 1 квадранте).

В рассмотренной модели межотраслевых связей валовая продукция отрасли совпадает с ее товарной продукцией ввиду отсутствия затрат на собственные нужды отрасли.

Допустим теперь, что коэффициент товарности принимает значения $0 < 1 - a_{ii} \leqslant 1$, где $0 \leqslant a_{ii} < 1$ — коэффициенты затрат на собственные нужды i-й отрасли.

Получим систему

$$\begin{aligned}(1 - a_{11})x_1 &= a_{12}x_2 + y_1,\\ (1 - a_{22})x_2 &= a_{21}x_1 + y_2\end{aligned} \tag{11}$$

или

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1,\\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2.\end{aligned} \tag{12}$$

Схема связей в системе (12) показана на рис. 3.

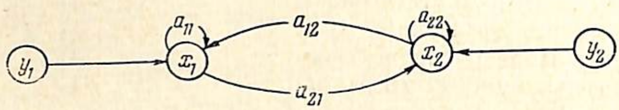

Рис. 3

На пути знакомых нам по рис. 1 связей

$$y_1 \to x_1 \to x_2, \qquad y_2 \to x_2 \to x_1,$$
$$x_2 \to x_1 \to x_2, \qquad x_1 \to x_2 \to x_1$$

появились внутриотраслевые обратные связи $x_1 \to x_1$ и $x_2 \to x_2$.

Например, линия связи от y_1 к x_2 делает теперь петлю

$$y_1 \to x_1 \to x_1 \to x_2.$$

Внутриотраслевые обратные связи будем считать обратными связями первого порядка, а межотраслевые в системе (12) — второго порядка соответственно порядку матрицы A.

Коэффициент обратной связи первого порядка $v_j^{(1)}$ для x_j есть a_{jj}, соответственно п.к. первого порядка —

$$r_j = \frac{1}{1 - v_j^{(1)}} = \frac{1}{1 - a_{jj}} \qquad (j = 1, 2). \tag{13}$$

На п.к. (13) умножаются все коэффициенты прямых затрат, что имеет ясный экономический смысл. Валовой продукт первой отрасли, например, расходуется на единицу валового продукта второй в количестве a_{12} единиц. Но часть продукта второй отрасли затрачена в ее пределах: a_{22} единиц на единицу валового продукта, так что за пределы отрасли выходит $1 - a_{22}$. Отсюда затраты продукции первой отрасли на единицу товарного продукта второй составляют $a_{12} / (1 - a_{22})$.

Роль п.к., учитывающего обратные связи второго порядка, в общем та же. Он домножает коэффициенты прямых затрат соответственно исключению из счета конечной продукции отрасли-потребителя того количества продукции последней, которое используется для производственного потребления внутри системы или ее части.

Теперь на основании схемы (рис. 3) опишем внутренние связи системы (12). Это описание будет отличаться от выражения (2) тем, что в числе затрат, на которые разлагается валовой продукт x_i, появляется $a_{ii}x_i$ (связь $x_i \to x_i$) и что коэффициенты прямых затрат a_{ij} и коэффициент обратной связи должны быть умножены на п.к. первого порядка (13).

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + a_{12}\frac{1}{1-a_{22}}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}a_{21}\frac{1}{1-a_{22}}x_1, \\ x_2 &= y_2 + a_{21}\frac{1}{1-a_{11}}y_1 + a_{22}x_2 + a_{12}a_{21}\frac{1}{1-a_{11}}x_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Преобразовав выражения (14), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \frac{a_{12}}{1-a_{22}}y_2 + \left(a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1-a_{22}}\right)x_1 \\ x_2 &= y_2 + \frac{a_{21}}{1-a_{11}}y_1 + \left(a_{22} + \frac{a_{12}a_{21}}{1-a_{11}}\right)x_2 \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \left(y_1 + \frac{a_{12}}{1-a_{22}}y_2\right)\frac{1}{1-\left(a_{11}+\dfrac{a_{12}a_{21}}{1-a_{22}}\right)} \\ x_2 &= \left(\frac{a_{21}}{1-a_{11}}y_1 + y_2\right)\frac{1}{1-\left(a_{22}+\dfrac{a_{12}a_{21}}{1-a_{11}}\right)} \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

В выражении (16) получили п. к. второго порядка ($R_i^{(2)}$):

$$\begin{aligned} R_1^{(2)} &= \frac{1}{1-\left(a_{11}+\dfrac{a_{12}a_{21}}{1-a_{22}}\right)} = \frac{1}{1-(a_{11}+r_2a_{12}a_{21})} = \frac{1}{1-w_1^{(2)}}, \\ R_2^{(2)} &= \frac{1}{1-\left(a_{22}+\dfrac{a_{12}a_{21}}{1-a_{11}}\right)} = \frac{1}{1-(a_{22}+r_1a_{12}a_{21})} = \frac{1}{1-w_2^{(2)}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $w_1^{(2)}$ и $w_2^{(2)}$ — приведенные коэффициенты обратной связи второго порядка.

П. к. второго порядка (17) в двухотраслевой модели представляют собой, как это видно, коэффициенты полных затрат, расположенные на главной диагонали матрицы $B = (E-A)^{-1}$,

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{1-w_i^{(2)}} = \frac{A_{ii}}{\Delta_2} = b_{ii} \qquad (i = 1, 2), \tag{18}$$

где Δ_2 — определитель матрицы $E - A$ второго порядка; A_{ii} — алгебраическое дополнение элемента $1 - a_{ii}$ этой матрицы.

В уравнениях (16) используем символы соответствующих п.к. и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1^{(2)}\,y_1 + R_1^{(2)}\,r_2a_{12}y_2, \\ x_2 &= R_2^{(2)}\,r_1a_{21}y_1 + R_2^{(2)}\,y_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Перемножим п.к. при a_{ij}:

$$R_1^{(2)} r_2 = \frac{1 - a_{22}}{\Delta_2} \cdot \frac{1}{1 - a_{22}} = \frac{1}{\Delta_2},$$
$$R_2^{(2)} r_1 = \frac{1 - a_{11}}{\Delta_2} \cdot \frac{1}{1 - a_{11}} = \frac{1}{\Delta_2}. \tag{20}$$

П.к. второго порядка, равный определителю матрицы $(E - A)^{-1}$, будем обозначать $R^{(2)}$, т. е. без нижнего индекса.

Итак,

$$x_1 = R_1^{(2)} y_1 + R^{(2)} a_{12} y_2,$$
$$x_2 = R^{(2)} a_{21} y_1 + R_2^{(2)} y_2, \tag{21}$$

$$b_{ij} = R^{(2)} a_{ij} \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{22}$$

Область существования п.к. для системы (12) такова же, как и для системы (1):

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{1 - w_i^{(2)}} \geqslant 1,$$
$$0 \leqslant w_i^{(2)} < 1, \tag{23}$$
$$R^{(2)} = \frac{1}{\Delta_2} \geqslant 1.$$

$R^{(2)} = R_i^{(2)} = 1$ $(i = 1, 2)$, если матрица $E - A$ единичная или треугольная с элементами главной диагонали, равными единице.

Чтобы имело место $R_i^{(2)} = 1$, достаточно равенство нулю элементов i-й строки (столбца) матрицы A.

Как мы видели, связи элементов двухотраслевой модели хорошо обозримы и просты. Вместе с тем она образует ячейку более сложных систем, и результаты ее анализа послужат отправным пунктом для подхода к последним.

ТРЕХОТРАСЛЕВАЯ МОДЕЛЬ

На рис. 4 представлена схема связей в трехотраслевой модели производства и распределения продукции

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j + y_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{24}$$

Эта схема смонтирована из трех блоков, каждый из которых, подобно двухотраслевой модели (рис. 3), изображает связи двух переменных. Притом образуются новые связи. Рассмотрим для примера связи переменной x_1 в системе (24). На x_1 воздействуют: y_1, y_2 через x_2 и x_3; y_3 через x_3; y_3 через x_3 и x_2 (прямые связи); x_1 непосредственно, а также через x_2, через x_2 и x_3, через x_3, через x_3 и x_2 (обратные связи первой отрасли). На пути этих связей с первой отраслью (с x_1) возникают обратные связи второй отрасли и обратные связи третьей отрасли: $x_2 \to x_2$, $x_3 \to x_3$ — обратные связи первого порядка; $x_2 \to x_3 \to x_2$, $x_3 \to x_2 \to x_3$ — обратные связи второго порядка (порядок связей соответствует порядку определяющей их матрицы или подматрицы).

На фигуре, изображающей трехотраслевую модель, петли этих обратных связей опосредуют любой путь к x_1, проходящий через другой элемент системы. Так, линия связи, соединяющая y_2 с x_1 через x_2, делает виток $y_2 \to x_2 \to x_2 \to x_3 \to x_3 \to x_2 \to x_2 \to x_1$.

Обратная связь x_1 через x_2 осуществляется следующим путем: $x_1 \to x_1 \to \to x_2 \to x_2 \to x_3 \to x_3 \to x_2 \to x_2 \to x_1$.

Обратные связи, присущие системе (24), порождены тем ее свойством, что между любыми двумя переменными существует *двусторонняя* связь (рис. 4). Система (25), изображенная на рис. 5, не обладает этим свойством. Между ее переменными имеют место лишь *односторонние* связи, что исключает возникновение межотраслевых обратных связей:

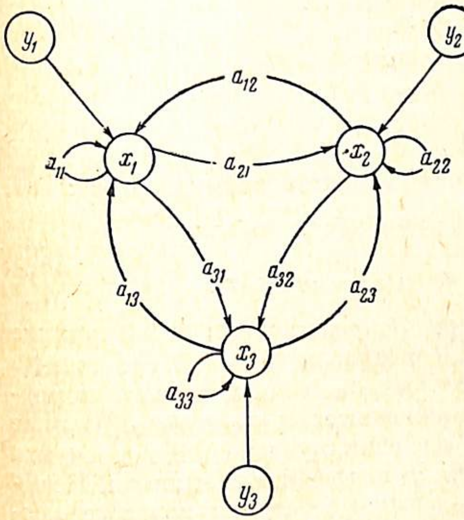

Рис. 4

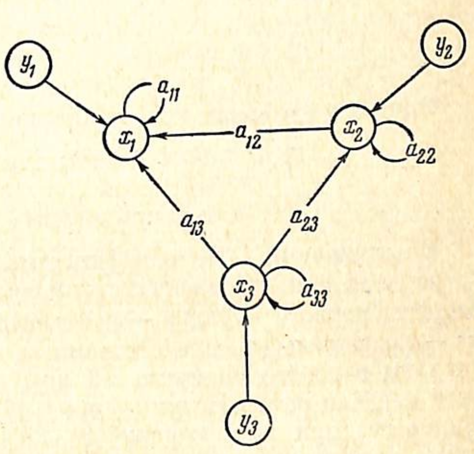

Рис. 5

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1,\\
x_2 &= \qquad\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2,\\
x_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + y_3.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Но и картина прямых связей в системе (25) существенно отлична от той, которая свойственна системе (24) — см. рис. 4 и 5. Помимо прямых связей типа $x_2 \to x_1$, с которыми мы встречались, рассматривая двухотраслевую модель, в системах с более чем двумя переменными образуются опосредованные прямые связи переменных, такие, как $x_3 \to x_2 \to x_1$ (расход одного продукта на производство другого, который служит в свою очередь для изготовления третьего, т. е. косвенные затраты первого продукта на третий). Если в трехотраслевой модели без обратных связей (рис. 5) образуется *одна* опосредованная прямая связь, то в случае с обратными связями (рис. 4) опосредованными прямыми связями соединены *все* переменные. Таким образом, взаимозависимость элементов системы не только порождает в ней обратные связи, но развивает и обогащает сеть прямых связей.

Совокупность всех прямых и обратных связей j-й отрасли с i-й — материальных потоков между ними — количественно результируется коэффициентом полных затрат b_{ij}.

Перечислим связи переменной x_1 в системе (24), исключая пока обратные связи второй и третьей отраслей:

$$
\begin{aligned}
&y_1 \to x_1\\
&y_2 \to x_2 \to x_1\\
&y_2 \to x_2 \to x_3 \to x_1\\
&y_3 \to x_3 \to x_1\\
&y_3 \to x_3 \to x_2 \to x_1\\
&x_1 \to x_1\\
&x_1 \to x_2 \to x_1\\
&x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1\\
&x_1 \to x_3 \to x_1\\
&x_1 \to x_3 \to x_2 \to x_1.
\end{aligned}
$$

Опишем эти связи x_1 при помощи коэффициентов прямых затрат:

$$
\begin{aligned}
&y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}a_{32}y_2 + a_{13}y_3 + a_{12}a_{23}y_3 + a_{11}x_1 +\\
&+ a_{12}a_{21}x_1 + a_{13}a_{32}a_{21}x_1 + a_{13}a_{31}x_1 + a_{12}a_{23}a_{31}x_1.
\end{aligned} \tag{26}
$$

В выражении (26) коэффициенты при y_j представляют собой прямые затраты на единицу конечного продукта j-й отрасли ($j = 1, 2, 3$): прямые затраты первого порядка — непосредственные, a_{12} и a_{13}, и второго порядка — косвенные (опосредствованные, сопряженные), $a_{13}a_{32}$ и $a_{12}a_{23}$. Прямые затраты валового продукта i-й отрасли на единицу конечного продукта этой отрасли равны единице; поэтому при y_1 коэффициент единица. Коэффициенты при x_1 в выражении (26) — обратные затраты валового продукта первой отрасли на единицу валового продукта этой отрасли, в том числе a_{11} — обратные затраты первого порядка, $a_{12}a_{21}$ и $a_{13}a_{31}$ — второго порядка, $a_{13}a_{32}a_{21}$ и $a_{12}a_{23}a_{31}$ — третьего порядка. Обратные затраты порядка более чем первого являются сопряженными.

Сумму прямых затрат, непосредственных и сопряженных, валового продукта i-й отрасли на единицу конечного продукта j-й отрасли будем называть коэффициентами прямой связи и обозначать d_{ij}.

В выражении (26)

$$
\begin{aligned}
d_{11} &= 1,\\
d_{12} &= a_{12} + a_{13}a_{32},\\
d_{13} &= a_{13} + a_{12}a_{23}.
\end{aligned} \tag{27}
$$

В двухотраслевой модели при $i \neq j$ $d_{ij} = a_{ij}$; $d_{ii} = 1$.

Сумма обратных затрат всех порядков на единицу валового продукта i-й отрасли представляет собой коэффициент обратной связи.

В выражении (26) это

$$
v_1^{(3)} = a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}; \tag{28}
$$

здесь $v_1^{(3)}$ — коэффициент обратной связи третьего порядка для первой отрасли.

Коэффициенты обратной связи для системы (12) —

$$
\begin{aligned}
v_1^{(2)} &= a_{11} + a_{12}a_{21},\\
v_2^{(2)} &= a_{22} + a_{12}a_{21}.
\end{aligned}
$$

Чтобы учесть обратные затраты второй и третьей отраслей, которых выражение (26) не содержит, нужно в него ввести соответствующие п.к.

второго порядка, подобно тому как это было сделано в уравнениях (14) с п.к. первого порядка.

П.к. второго порядка в трехотраслевой модели определяются по формулам

$$R_{pq}^{(2)} = \frac{A_{pp,\,qq}}{A_{pp}},\qquad R_{pqt}^{(2)} = \frac{1}{A_{pp}}, \tag{29}$$

где p, q, t — неповторяющиеся номера в индексах тех коэффициентов прямых затрат и их произведений, которые умножаются на данный п.к. (в трехотраслевой модели может быть не более трех неповторяющихся номеров в любом сочетании коэффициентов a_{ij}); A_{pp} — алгебраическое дополнение элемента $1 - a_{pp}$ матрицы $E - A$ $(p = 1, 2, 3)$; $A_{pp,\,qq}$ — алгебраическое дополнение элементов $1 - a_{pp}$ и $1 - a_{qq}$ $(q = 1, 2, 3)$ этой матрицы*. Например, п.к. второго порядка для a_{12} и для a_{13} соответственно равны

$$R_{12}^{(2)} = \frac{A_{11,\,22}}{A_{11}} = \frac{1 - a_{33}}{A_{11}},\qquad R_{13}^{(2)} = \frac{A_{11,\,33}}{A_{11}} = \frac{1 - a_{22}}{A_{11}}. \tag{30}$$

П.к. для $a_{13}a_{32}$ и $a_{13}a_{32}a_{21}$

$$R_{132}^{(2)} = \frac{1}{A_{11}}. \tag{31}$$

Умножив каждое слагаемое выражения (26), кроме y_1 и $a_{11}x_1$, на свой п.к. второго порядка, получим величину x_1 (y_1 и $a_{11}x_1$ представляют исключения по той причине, что связи $y_1 \to x_1$ и $x_1 \to x_1$ не опосредованы обратными связями второй отрасли и обратными связями третьей отрасли).

После упрощений придем к следующему выражению, содержащему п.к. третьего порядка ($R^{(3)}\ldots$):

$$x_1 = R_1^{(3)} y_1 + (R_{12}^{(3)} a_{12} + R^{(3)} a_{13}a_{32})\, y_2 + (R_{13}^{(3)} a_{13} + R^{(3)} a_{12}a_{23})\, y_3. \tag{32}$$

Здесь

$$R^{(3)} = \frac{1}{\Delta_3};\qquad R_1^{(3)} = \frac{A_{11}}{\Delta_3};\qquad R_{12}^{(3)} = \frac{A_{11,\,22}}{\Delta_3};\qquad R_{13}^{(3)} = \frac{A_{11,\,33}}{\Delta_3}. \tag{33}$$

Мы видим, что п.к. преобразуют коэффициенты прямых связей d_{ij} в коэффициенты полных затрат:

$$R_1^{(3)} = b_{11},$$
$$R_{12}^{(3)} a_{12} + R^{(3)} a_{13}a_{32} = \frac{(1 - a_{33})\, a_{12}}{\Delta_3} + \frac{a_{13}a_{32}}{\Delta_3} = \frac{A_{21}}{\Delta_3} = b_{12}, \tag{34}$$
$$R_{13}^{(3)} a_{13} + R^{(3)} a_{12}a_{23} = \frac{(1 - a_{22})\, a_{13}}{\Delta_3} + \frac{a_{12}a_{23}}{\Delta_3} = \frac{A_{31}}{\Delta_3} = b_{13}.$$

Заметим, что к выражению п.к. можно прийти, выполнив преобразование (34) в обратном порядке, т. е. последовательно разлагая по строкам данное алгебраическое дополнение, например A_{21}, до тех пор, пока не

---

* Алгебраическое дополнение любого числа диагональных элементов матрицы имеет тот же знак, что и соответствующий минор.

будет получено алгебраическое дополнение диагональных элементов матрицы $E - A$, которое и является числителем в выражении п.к. Этот числитель равен единице, если разложение приводит к произведению недиагональных элементов матрицы. Нетрудно доказать, что в данных условиях п.к. третьего порядка, как и второго, принимают значения, не меньшие единицы.

В этом находит выражение, в частности, тот очевидный факт, что на единицу конечного продукта p-й отрасли расходуется не менее единицы валового продукта этой отрасли ($R_p{}^{(3)} = b_{pp} \geqslant 1$). $R^{(3)} = R_p{}^{(3)} = R_{pq}{}^{(3)} = 1$ ($p, q = 1, 2, 3$; $p \neq q$); если матрица $E - A$ единичная или треугольная с элементами главной диагонали, равными единице. Кроме того, $R_p{}^{(3)} = 1$, если элементы по крайней мере p-й строки (столбца) матрицы A равны нулю. $R_{pq}{}^{(3)} = 1$ при равенстве нулю элементов по крайней мере p-й и q-й строк (столбцов) матрицы A.

Разделим коэффициенты полных затрат b_{12} и b_{13} из выражения (34) на соответствующие им коэффициенты прямых связей d_{12} и d_{13} из выражения (27):

$$\begin{aligned} \frac{b_{12}}{d_{12}} &= \frac{R_{12}^{(3)} a_{12} + R^{(3)} a_{13} a_{32}}{a_{12} + a_{13} a_{32}} = \hat{R}_{12}, \\ \frac{b_{13}}{d_{13}} &= \frac{R_{13}^{(3)} a_{13} + R^{(3)} a_{12} a_{23}}{a_{13} + a_{12} a_{23}} = \hat{R}_{13}. \end{aligned} \tag{35}$$

Получили средневзвешенные п.к. $\hat{R}_{ij}$. Весами в формулах (35) служат коэффициенты прямых затрат разных порядков — слагаемые коэффициента прямых связей.

$\hat{R}_{ij} \geqslant 1$, причем $\hat{R}_{ij} = 1$, если матрица $E - A$ единичная или треугольная с элементами $1 - a_{ii} = 1$. Из этого следует, что коэффициент полных затрат по величине не может быть меньше соответствующих коэффициентов прямых связей и прямых затрат.

Для характеристики роли косвенных (сопряженных) затрат в составе полных обычно находят отношение коэффициентов полных и прямых затрат («во сколько раз коэффициент полных затрат больше прямых»). В аналитических целях этот показатель можно разложить на сомножители, один из которых характеризует роль прямых сопряженных затрат, а другой — обратных затрат в преобразовании коэффициентов a_{ij} в b_{ij}.

Из выражения (35) получим

$$b_{ij} = \hat{R}_{ij} d_{ij}. \tag{36}$$

Отсюда

$$\frac{b_{ij}}{a_{ij}} = \frac{d_{ij}}{a_{ij}} \cdot \hat{R}_{ij} \quad (i \neq j). \tag{37}$$

При $i = j$ сравнение коэффициентов матриц B и A выполняется следующим образом:

$$(b_{ii} - 1) / a_{ii}. \tag{38}$$

ОБОБЩЕНИЯ

Преобразования, подобные выполненным для трехотраслевой модели, могут быть произведены при любом порядке матрицы $E - A$, так что любой коэффициент полных затрат можно выразить через определяющие его показатели прямых и обратных связей в n-отраслевой балансовой модели.

Представим коэффициенты прямых связей в общем виде:

$$d_{pp} = 1,$$

$$d_{pq} = a_{pq} + \sum_{\substack{t \\ t \neq p,\, q}} a_{pt}a_{tq} + \sum_{\substack{t,\, u \\ t \neq p,\, q,\, u \\ u \neq p,\, q,\, t}} a_{pt}a_{tu}a_{uq} + \ldots + \sum_{\substack{t,\, u, \ldots,\, s \\ t \neq p,\, q,\, u, \ldots,\, s \\ u \neq p,\, q,\, t, \ldots,\, s \\ s \neq p,\, q,\, u,\, t, \ldots}} a_{pt}a_{tu} \ldots a_{sq} \qquad (39)$$

при $p, q, t, u, \ldots, s = 1, 2, \ldots, n$; $p \neq q$.

В выражении коэффициентов d_{pq} первый член — прямые затраты первого порядка, второй — сумма прямых затрат второго порядка, состоящая из $n-2$ слагаемых, соответственно числу размещений $n-2$ номеров t по одному (P^1_{n-2}). Сумма прямых сопряженных затрат третьего порядка включает $(n-2)(n-3)$ слагаемых — по числу размещений P^2_{n-2} и т. д. Наивысший порядок прямых затрат n — 1-й (n — 1 сомножитель), число слагаемых при этом $(n-2)!$, т. е. количество перестановок P^{n-2}_{n-2}.

Число слагаемых резко возрастает по мере увеличения степени сопряженности прямых затрат. Прямые затраты второго порядка, важнейшие среди сопряженных, определяются весьма просто. Матрица этих показателей, как видно из формулы (39), получается возведением в квадрат матрицы A, в которой элементы главной диагонали заменены нулями, причем в матрице A^2 на главной диагонали также ставятся нули.

Перейдем к выражениям передаточных коэффициентов n-го порядка. Они имеют вид

$$R^{(n)}_{pqtu\ldots} = \frac{A_{pp,\, qq,\, tt,\, uu \ldots}}{\Delta_n},$$

$$R^{(n)} = \frac{1}{\Delta_n} \quad (p, q, t, u \ldots = 1, 2, \ldots, n), \qquad (40)$$

где Δ_n — определитель матрицы $E - A$ n-го порядка; $p, q, t, u, \ldots$ — неповторяющиеся номера в индексах соответствующих коэффициентов прямых затрат.

Например, в формулах (33)—(34) для расчета $R^{(3)}_{12}$ в числителе ставится алгебраическое дополнение элементов $1 - a_{11}$ и $1 - a_{22}$ матрицы $E - A$, т. е. $A_{11,22} = 1 - a_{33}$.

Если существуют такие $x_i > 0$, что $y_i > 0$, то п. к. любого порядка принимают значения, не меньшие единицы, а определитель матрицы $E - A$ и все алгебраические дополнения любого числа элементов ее главной диагонали — положительные величины, не превосходящие единицы.

Дадим экономическую интерпретацию определителей матрицы $E - A$ и $(E - A)^{-1}$. Определитель матрицы Леонтьева n-го порядка характеризует долю прямых затрат n — 1-го порядка в соответствующем слагаемом коэффициента полных затрат, тогда как определитель обратной матрицы, будучи по величине не меньше единицы, является для прямых затрат множителем («мультипликатором», «коэффициентом усиления»), учитывающим обратные затраты n-го порядка. Об этом можно судить, например, по выражению (32), содержащему п.к. $R^{(3)} = 1 / \Delta_3$.

Алгебраическое дополнение A_{pp} n — 1-го порядка показывает, какова доля прямых затрат того же порядка в слагаемом коэффициента полных затрат p-й отрасли, исключая обратные затраты последней.

Ясно, что без прямых межотраслевых затрат единство экономической системы невозможно ($\Delta = 0$), но без обратных затрат оно сохраняется (в этом случае $\Delta = 1$).

Рассмотрим условия, при которых п.к. равны единице. Такое значение принимают все п.к. n-отраслевой системы, если элементами главной диагонали матрицы $E - A$ являются единицы, а сама эта матрица треугольная или единичная (т. е. матрица A нулевая или имеет вырожденную треугольную форму).

Это условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $R^{(n)} = 1 / \Delta_n = 1$, и достаточное для равенства единице остальных п.к. системы.

Для выполнения $R_p^{(n)} = A_{pp} / \Delta_n = b_{pp} = 1$ необходимо, чтобы все элементы p-й строки (столбца) матрицы A равнялись нулю.

Иными словами, продукция p-й отрасли либо не расходуется внутри системы и является конечной, либо не требует для своего производства затрат продукции, вырабатываемой данной системой. В этом случае, например, при $a_{pj} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определитель матрицы $E - A$ равен алгебраическому дополнению элемента $1 - a_{pp}$ этой матрицы ($\Delta_n = A_{pp}$) и $R_p^{(n)} = 1$. $R_{pq}^{(n)} = A_{pp,\,qq} / \Delta_n = 1$, если равны нулю все элементы по крайней мере p-й и q-й строк (столбцов) матрицы A и т. д.

Если матрица A n-го порядка не треугольная и ни одна из ее строк (столбцов) не нулевая, то имеют место соотношения:

$$R_1^{(n)} = \frac{A_{11}}{\Delta_n} > 1, \quad A_{11} > \Delta_n > 0;$$

$$R_{12}^{(n-1)} = \frac{A_{11,22}}{A_{11}} > 1, \quad A_{11,22} > A_{11} \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$0 < \Delta_n < A_{11} < A_{11,12} < \ldots < 1 - a_{nn} < 1\,^*. \tag{41}$$

До сих пор мы анализировали внутри- и межотраслевые обратные связи совместно. Представляет интерес раздельное измерение тех и других. Выделим из общей системы связей внутриотраслевые путем умножения коэффициентов прямых затрат $a_{ij} (i \neq j)$ на п.к. первого порядка $r_i = 1 / (1 - a_{ii})$, означающий расход валового продукта i-й отрасли на единицу ее товарного продукта. Иными словами, мы разрешаем каждое уравнение межотраслевого баланса относительно x_i, приведя в нем предварительно подобные члены:

$$x_i - a_{ii}x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{1 - a_{ii}} x_j + \frac{1}{1 - a_{ii}} y_i. \tag{43}$$

Благодаря этому внутриотраслевые затраты каждой отрасли оказались включенными в коэффициенты межотраслевых затрат при x_j в системе (43).

Если теперь, преобразуя систему (43), получить коэффициенты прямых и обратных связей, то это будут показатели межотраслевых связей. В качестве обратных эти показатели учитывают лишь обратные *сопряженные* затраты, т. е. опосредованные межотраслевым обменом.

---

* Одна из оценок величины Δ_n получена М. Юсуповым (см. его работу «Некоторые свойства матриц с неотрицательными элементами и их приложения к матрицам межотраслевых балансов». СО АН СССР. Новосибирск, 1962).

Обратные затраты первого порядка (a_{ii}) при таком подходе включены в *коэффициенты прямых и внутриотраслевых связей* (c_{ij}) вследствие пересчета всех коэффициентов прямых затрат, как это видно из формул для c_{ij} в трехотраслевой модели:

$$c_{11} = \frac{1}{1 - a_{11}},$$

$$c_{12} = \frac{a_{12}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22})} + \frac{a_{13}a_{32}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22})(1 - a_{33})}, \qquad (44)$$

$$c_{13} = \frac{a_{13}}{(1 - a_{11})(1 - a_{33})} + \frac{a_{12}a_{23}}{(1 - a_{11})(1 - a_{22})(1 - a_{33})}$$

Межотраслевые п.к. отличаются тем, что в их числителе, помимо алгебраического дополнения, стоит произведение тех элементов главной диагонали матрицы $E—A$, для которых образовано это алгебраическое дополнение:

$$S^{(n)}_{p, q, t, u, \ldots} = \frac{\left[\prod\limits_{i=p, q, t, u, \ldots} (1 - a_{ii})\right] A_{pp, qq, tt, uu, \ldots}}{\Delta_n} \qquad (45)$$

$$(p, q, t, u \ldots = 1, 2, \ \ldots, \ n).$$

$$S^{(n)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - a_{ii})}{\Delta_n}, \qquad (46)$$

где $S^{(n)} \ldots$ — передаточный коэффициент межотраслевой обратной связи (межотраслевой п.к.) n-го порядка.

В частности,

$$S_p^{(n)} = \frac{(1 - a_{pp}) A_{pp}}{\Delta_n} = (1 - a_{pp}) b_{pp}. \qquad (47)$$

Межотраслевые п.к. принимают значения, не меньшие единицы. Из этого следует, что произведение p-х элементов главной диагонали прямой и обратной матриц также должно быть больше или равно единице.

Неравенство

$$(1 - a_{pp}) b_{pp} \geqslant 1 \qquad (48)$$

удобно использовать при контроле правильности обращения матрицы $E - A$ *. Случай $S^{(n)} = 1$ означает, что коэффициенты полных затрат на главной диагонали матрицы B являются обратными величинами соответствующих коэффициентов матрицы $E - A$. Это имеет место, если ее определитель равен произведению элементов главной диагонали, т. е. если матрица $E - A$ диагональная или треугольная. Последнее свидетельствует об отсутствии межотраслевых обратных связей, но не исключает внутриотраслевые (при $a_{ii} > 0$). Исходя из этого, п.к., вычисляемый по формуле (46), назовем индексом триангуляции. Его величина тем ближе к единице, чем меньшую абсолютную величину имеют коэффициенты матрицы $E - A$ по одну сторону главной диагонали.

$S_p^{(n)} = 1$, если по крайней мере p-я строка (столбец) матрицы A имеет все элементы, равные нулю, кроме элемента $a_{pp} \geqslant 0$. Средневзвешенный

* При помощи этого критерия обнаружены погрешности в ряде публикаций материалов межотраслевых балансов.

п.к. межотраслевой обратной связи ($\hat{S}_{ij}$) образуется по уже знакомому нам принципу — см. выражения (35). Соотношение между $\hat{R}_{ij}$ и $\hat{S}_{ij}$ таково:

$$\hat{R}_{ij} = \hat{S}_{ij} c_{ij} / d_{ij}. \tag{49}$$

$\hat{S}_{ij} \geqslant 1$, откуда следует, что $b_{ij} \geqslant c_{ij}$, т. е. что

$$\begin{gathered} b_{ii} \geqslant c_{ii} = 1 / (1 - a_{ii})^*, \\ b_{ij} \geqslant c_{ij} \geqslant a_{ij} / (1 - a_{ii})(1 - a_{jj}) \quad \text{при} \quad i \neq j. \end{gathered} \tag{50}$$

* * *

На основе рассмотренных предложений проведен анализ семиотраслевой модели затраты — выпуск по Эстонской ССР за 1961 г. Установлено, что в среднем по отраслям материального производства Эстонии доля прямых затрат всех порядков (коэффициентов прямых связей) в полных затратах составляет 52,4%, колеблясь от 21,7% в затратах промышленной продукции на продукцию сельского и лесного хозяйства до 85% в затратах продукции строительства и промышленности стройматериалов на собственные нужды.

Прямые сопряженные затраты валового продукта невелики по сравнению с непосредственными затратами. В значениях коэффициентов прямых связей на затраты 1-го порядка, т. е. на коэффициенты a_{ij}, в среднем приходится 87,00%, на прямые затраты 2-го порядка — 11,57%, 3-го порядка — 1,34%, 4-го — 6-го порядков — 0,09%.

Доля, с которой прямые затраты 6-го порядка входят в состав соответствующего слагаемого коэффициента полных затрат, равна 3,9% ($\Delta_7 = 0{,}0390$). По отношению ко всему значению коэффициента это не превосходит 10^{-5}%. Индекс триангуляции матрицы $E - A$ составил 1,0538.

Внутриотраслевые затраты, вводимые при помощи п.к. первого порядка, делают значения коэффициентов прямых и внутриотраслевых связей c_{ij} в среднем в 2,33 раза большими, чем коэффициенты прямых связей d_{ij}. Межотраслевые п.к. $\hat{S}_{ij}$ находятся в пределах от 1,0057 до 1,0330, что характеризует межотраслевые обратные связи как малосущественные**. Следовательно, если ими и пренебречь, можно прийти к показателям, близким к коэффициентам полных затрат.

На этом основании выработан нетрудоемкий алгоритм обращения матрицы $E - A$, сущность которого состоит в следующем.

Определяются коэффициенты прямых и внутриотраслевых связей первого либо первого и второго порядков — по формулам типа (44). Полученная таким путем матрица C_0 рассматривается как приближенная матрица $(E - A)^{-1}$, если выполнено условие, что норма матрицы $E - (E - A) C_0$ меньше единицы. Далее, путем последовательного исправления элементов матрицы C_0 по методу Хотеллинга*** они доводятся до значений коэффициентов полных затрат с заданной точностью и при быстрой сходимости итерационного процесса.

Поступила в редакцию
1 II 1965

* Отмечено, что $b_{ii} \approx 1 / (1 - a_{ii})$.

** Тот же вывод был получен в результате триангуляции матрицы межотраслевого баланса СССР. См. статью Лейбкинда Ю. Р. «Применение блочных матриц для приближенных плановых расчетов». В сб. Экономико-математические методы. Выпуск 1. М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 176.

*** Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., Физматгиз, 1963, стр. 193—196.