ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1965 том I, вып. 5

ИСЧИСЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЦЕН НА ОСНОВЕ СОВРЕМЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

(в порядке обсуждения)

В. БЕЛКИН, А. КРОНРОД, Ю. НАЗАРОВ, В. ПАН

(*МОСКВА*)

Предмет предлагаемой работы — построение рациональной системы цен, являющихся, по-видимому, наиболее доступным на основе современной экономической информации приближением к ценам оптимального плана. Это информация — межотраслевые балансы продукции, производственных основных фондов и оборотных средств всего народного хозяйства и территориальные балансы продукции отдельных отраслей или комплексов отраслей. В настоящей статье содержатся: экономическая постановка задачи исчисления цен производства социалистического хозяйства с учетом ренты, принципы и алгоритм ее решения, доказательство, что на основе межотраслевых балансов всегда могут быть исчислены цены производства социалистического хозяйства без учета ренты, условия существования таких цен, включающих неотрицательные ренты.

Авторами статьи по разделам являются: I — В. Белкин, II — Ю. Назаров, III — А. Кронрод, IV — В. Пан.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРИНЦИПЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В советской и зарубежной литературе по применению математических методов в экономике всеобщее признание получил совершенно бесспорный принцип построения идеальных цен на основе решения системы «оптимальный план-цены».

Однако в основу такой системы должна быть положена экономическая информация, формирование которой наталкивается на существенные трудности не только организационно-технического, но и принципиального характера. Сюда относится, прежде всего, конструирование более или менее достоверных и подробных гипотез технического прогресса как базы динамических моделей народного хозяйства.

В этих условиях решение проблемы ценообразования должно состоять в том, чтобы из всех концепций планового ценообразования, которые могут быть реализованы при существующей информации, выбрать ту, которая в наибольшей степени соответствует принципу оптимальности в народном хозяйстве. Иными словами, это должны быть такие цены, руководствуясь которыми на каждом участке целесообразно и выгодно вести хозяйство наиболее близким к оптимальному способом. Это означает, что, руководствуясь другими доступными ценами, можно избрать лишь менее близкий к оптимальному способ ведения хозяйства.

Сравнение обсуждаемых в настоящее время различных концепций планового ценообразования, предпринятого Л. Постышевым, показало, что из цен, основанных на современной информации, в наибольшей степени принципу оптимальности соответствуют цены производств социалистического хозяйства. Математическая трактовка цен производства как цен оптимального плана дана В. Волконским*.

Цена производства социалистического хозяйства состоит из себестоимости и прибыли, часть которой, соответствующая общественным фондам потребления, пропорциональна заработной плате, а другая, бóльшая, часть — пропорциональна производственным основным фондам и оборотным средствам. При этом основные фонды оцениваются по восстановительной стоимости текущего периода, т. е. по стоимости воспроизводства современных фондов аналогичного назначения в настоящее время.

Цена производства социалистического хозяйства на продукцию добывающей промышленности и сельского хозяйства, наряду с прибылью, должна включать также часть прибавочного продукта в виде дифференциальной ренты.

Условием образования дифференциальной ренты является ограниченность лучших и средних месторождений полезных ископаемых и земельных угодий. Поскольку процесс производства продукции заканчивается лишь тогда, когда она доведена до потребления, в затраты на производство любой продукции входит доставка ее потребителю. Отсюда качество месторождений природных ресурсов и земельных угодий (в экономическом значении этого слова) определяется также их удаленностью от пунктов потребления и условиями транспортировки.

Цены производства социалистического хозяйства (без учета рент) исчисляются по данным межотраслевых балансов продукции, производственных основных фондов и материальных оборотных средств [1]. Эти балансы характеризуют сложившиеся в народном хозяйстве межотраслевые связи. Хотя межотраслевые связи выражают потоки продукции между предприятиями различных отраслей, дислоцированными на определенной территории, пространственной характеристики потоков межотраслевые балансы не дают.

Для определения дифференциальной ренты информации, содержащейся в межотраслевых балансах, недостаточно. Для этой цели требуется дополнительная информация, характеризующая затраты на производство продукции в территориальном разрезе.

В этой статье методы расчета дифференциальной ренты в составе цен производства социалистического хозяйства рассмотрены на примере топливно-энергетических отраслей. Речь идет об исчислении цен производства социалистического хозяйства по всему общественному продукту с учетом ренты на продукцию топливно-энергетической промышленности. Однако аналогичными методами могут быть исчислены цены производства социалистического хозяйства, включающие дифференциальную ренту рудной, лесной и других отраслей добывающей промышленности, а также сельского хозяйства.

Расчет цен производства социалистического хозяйства с учетом дифференциальных рент на топливо и энергию базируется на информации двух видов: межотраслевых балансах продукции и производственных средств и топливно-энергетическом балансе (ТЭБ).

В отличие от межотраслевых балансов, которые используются в расчетах цен производства непосредственно, ТЭБ должен быть предварительно

* В. А. Волконский. Схема перспективного планирования и оценки ресурсов. В сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. 3, М., «Мысль», 1965.

оптимизирован. Необходимость его оптимизации для расчета рент продиктована следующими обстоятельствами. Цена одной эффективной единицы топлива, скажем, одной тонны условного топлива, франко-поставщик (при условии равноэффективного его использования) независимо от того, куда поставляется это топливо, должна быть одинаковой. Цена единицы топлива франко-потребитель независимо от того, откуда поставляется это топливо, также должна быть одинаковой. Такими ценами, как показано в [2], являются цены оптимального ТЭБ.

Отправной ТЭБ оптимизируется на основе открытой модели транспортной задачи линейного программирования. Это значит, что возможное производство топлива задается в размерах, превышающих потребности. В результате расчета оптимального ТЭБ топливо и энергия наихудших месторождений остаются неиспользованными или используются частично.

Необходимость расчета оптимального ТЭБ на основе открытой модели обусловлена причинами двоякого характера.

Во-первых, цены на продукцию добывающей промышленности и сельского хозяйства должны определяться затратами на тех месторождениях и земельных угодьях, на которых возможно и рационально дальнейшее расширение производства. Эти месторождения и земельные угодья являются худшими из эксплуатируемых или лучшими из неосвоенных лишь в оптимальном плане. Так как в настоящее время условие оптимальности не выполняется, может оказаться, что в эксплуатацию введены месторождения, разработка которых нерациональна. Определение цен и рент по затратам на месторождениях столь плохого качества приведет к чрезмерному и необоснованному их повышению. Это особенно скажется на ценах и рентах на топливо и энергию, поскольку в существующих условиях все месторождения и источники топливно-энергетических ресурсов и все потребители взаимосвязаны — либо поставками из разных месторождений в один и тот же район, либо поставками из одного месторождения в разные районы. Отсюда уровень цен на топливо и энергию, а значит, и ренты будет определяться по худшему месторождению, что приведет к чрезмерному повышению цен и рент на топливо.

В результате расчета по открытой модели образуется несколько обособленных районов производства и потребления топлива и энергии, в каждом из которых имеется свое худшее месторождение с нулевой рентой ($R = 0$).

Дифференциация месторождений в каждом из районов значительно меньше, чем в целом по всей территории страны. Отсюда ниже и дифференциальные ренты, чем при их расчете по закрытой модели. Повышение цен на топливо и энергию за счет рент в этом случае происходит в разумных пределах.

Во-вторых, расчет оптимального ТЭБ для определения рент и цен по открытой схеме правомерен постольку, поскольку пересмотр оптовых цен в народном хозяйстве осуществляется раз в пять-семь лет, два-три года продолжается подготовка к пересмотру. За это время ТЭБ претерпевает существенные изменения. Вполне обоснованно предполагать, что эти изменения будут идти по линии оптимизации ТЭБ.

После расчета оптимального ТЭБ на основе открытой модели последняя «закрывается» (мощности теперь уже равны потребностям). Далее исчисление цен сводится к следующему.

В межотраслевом балансе продукции (в денежном выражении) затраты различных отраслей i на топливо и энергию заменяются неизвестными D_i, которые определяются из оптимального ТЭБ. D_i, таким образом,— сумма, которую отрасль i затрачивает на топливо и энергию.

Тогда система уравнений для цен производства социалистического хозяйства будет иметь следующий вид:

$$U_iX_i = \sum_j a_{ij}\theta_{ij}X_j + p' \sum b_{ij}\theta_{ij}X_j + d'_i(1+\beta) + D_i, \qquad (1)$$

$$\Pi = \sum a_{\text{п}i}\theta_{ij}X_i + D_{n+1}, \qquad (2)$$

$$\theta_{ij} = \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ij}^{q}(1+p')^{(q-1)}, \qquad (3)$$

где $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — число всех отраслей;

U_i — объем продукции i-й отрасли в денежном выражении (в действующих ценах);

X_i — индекс цен производства социалистического хозяйства на продукцию i-й отрасли к действующим ценам (коэффициент удорожания);

a_{ij} — продукция j-й отрасли, затрачиваемая на продукцию i-й отрасли, включая амортизационные отчисления в денежном выражении (в действующих ценах);

p' — норма прибыли;

θ_{ij} — коэффициент удорожания основных фондов i-й отрасли вследствие продолжительности их создания в j-й отрасли, вычисляемый по формуле сложных процентов;

b_{ij} — продукция j-й отрасли, которая содержится в производственных основных фондах и оборотных средствах i-й отрасли;

d_i' — заработная плата в i-й отрасли;

β — отношение выплат и льгот в денежной оценке, получаемых работниками производственной сферы из общественных фондов потребления, к их заработной плате;

Π — объем продукции и услуг, приобретаемых населением (в действующих ценах);

α_{ij}^{l} — доля затрат продукции j-й отрасли в общем объеме затрат продукции этой отрасли на основные фонды i-й отрасли в q-м году до момента ввода их в действие ($\alpha \leqslant 1$; $q = 1, 2, \ldots, t$, где t — общая продолжительность, число лет создания фондов).

Подробная экономическая интерпретация и обоснование приведенной системы уравнений содержится в [1]. Здесь лишь отметим, что на каждом шаге решения системы коэффициенты X_i, p', а также D_i итеративно пересчитываются и в результате единообразно определяются цены производства социалистического хозяйства на продукцию всех отраслей при условии неизменного реального содержания денежных доходов населения.

Величина D_i определяется из оптимального ТЭБ. Пусть в модели ТЭБ имеется K предприятий, производящих топливо, и L районов потребления. Обозначим:

M_k — годовая мощность предприятия k в тоннах условного топлива (*тут*);

A_l — годовая потребность l-го района в *тут*;

S_k — действующая цена на 1 *тут* продукции k-го предприятия на месте производства;

t_{kl} — затраты на транспортировку 1 *тут* от k-го предприятия в l-й район потребления в действующих ценах;

R_k — рента k-го предприятия;

C_l — цена оптимального плана за 1 *тут* в l-м районе потребления;

Y_k — удорожание продукции k-го предприятия на месте производства.

Способ вычисления величин Y_k будет указан во втором разделе статьи. Сейчас только отметим, что 1) если предприятия k_1 и k_2 производят одинаковое топливо или энергию, то $Y_{k_1} = Y_{k_2}$; 2) величины Y_k отличаются от приведенных в уравнениях коэффициентов удорожаний X_i, так как последние учитывают расходы не только на производство, но и на транспортировку топлива и энергии.

Условие оптимальности ТЭБ дает ряд уравнений вида

$$C_l = S_k Y_k + t_{kl} X_t + R_k, \tag{4}$$

где X_t — удорожание продукции отрасли «транспорт». Приняв в качестве условия, что для худших месторождений рента равняется нулю ($R_0 = 0$), из системы уравнений такого вида можно определить все другие ренты R_k и цены на топливо в каждом районе C_l.

Если для каждого l-го района заданы доли P_{il} топлива, потребляемого в этом районе в i-й отрасли, то сумма, которую i-я отрасль заплатит за потребленное топливо, составит

$$D_i = \sum_{l=1}^{L} C_l \cdot P_{il}. \tag{5}$$

Возникает вопрос: если цены производства, включающие ренты, использовать в качестве критериев оптимизации ТЭБ, то останется ли первоначально исчисленный по ценам без учета рент ТЭБ по-прежнему оптимальным. На этот вопрос частично отвечает доказанная Ю. Назаровым теорема, в соответствии с которой оптимальный ТЭБ, исчисленный по закрытой модели транспортной задачи, остается таковым и при новых критериях оптимизации.

Но как обстоит дело с отправным ТЭБ, оптимизируемым по открытой схеме, не должны ли цены, используемые в качестве критериев оптимизации этого баланса, включать дифференциальную ренту? Если должны, то в каких размерах? Как повлияет включение ренты на оптимальный план?

По нашему мнению, расчет отправного оптимального ТЭБ по открытой модели должен базироваться на ценах без учета рент. Включение рент привело бы к снижению норматива эффективности производственных фондов. Это означало бы экономию природных ресурсов за счет дополнительных капитальных вложений.

Заметим, что в ходе расчета описанными здесь методами по отраслям, где рассчитывается рента, достигается известная оптимизация межотраслевого баланса, что само по себе является весьма существенным результатом расчета.

Изложенными здесь методами в Институте электронных управляющих машин выполнены на ЭВМ экспериментальные расчеты цен производства социалистического хозяйства с учетом ренты. Программа по описанному ниже алгоритму была составлена Ю. Назаровым, исходные данные подготовлены по межотраслевым балансам Н. Бузовой, по ТЭБ — А. Третьяковой.

Расчеты показали возможность практической реализации предлагаемых методов определения цен на основе существующей или доступной информации.

II. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЦЕН ЕДИНОГО УРОВНЯ С УЧЕТОМ РЕНТЫ

Как было показано ранее, балансовые соотношения в ценах единого уровня дают уравнения:

$$U_i X_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} a_{ij} X_j + p' \sum \vartheta_{ij} b_{ij} X_j + d_i + D_i, \tag{6}$$

$$\Pi = \sum_i a_{\Pi i} X_i + D_{n+1}. \tag{7}$$

Заметим, что $d_i = d'_i(1 + \beta)$.

Предположим, что отрасли, производящие q различных видов топлива, имеют в межотраслевом балансе номера от 1 до q; отрасль «транспорт» имеет номер $q + 1$.

Величины D_i, которые входят в эти уравнения, а также ренты R_k и порайонные цены на топливо C_l определяются из оптимального топливно-энергетического баланса.

Модель топливно-энергетического баланса (ТЭБ) строится как транспортная задача, а именно, имеется K предприятий, производящих топливо (каждое предприятие производит один из видов топлива), и L районов потребления.

M_k — годовая мощность k-го предприятия в *тут*;

A_l — годовая потребность l-го района в *тут*;

S_k — цена за 1 *тут* продукции k-го предприятия на месте производства;

δ_{kl} — затраты на транспортировку 1 *тут* от k-го предприятия в l-й район потребления;

Z_{kl} — планируемая поставка k-го предприятия в l-й район.

Мы предполагаем, что $\sum_{k=1}^{K} M_k = \sum_{l=1}^{L} A_l$, т. е. модель закрытая. План — это такая системы поставок $\{Z_{kl}\}$, для которой

$$\sum_l Z_{kl} = M_k, \quad \sum_k Z_{kl} = A_l, \tag{8}$$

а для оптимального плана сверх этого

$$\sum_{k,\, l} Z_{kl}(S_k + \delta_{kl}) = \min. \tag{9}$$

Матрицу $\|S_k + \delta_{kl}\|$ будем для краткости называть матрицей критериев.

Теорема 1. *Пусть* $\|S_k + \delta_{kl}\|$ *и* $\|\bar{S}_k + \gamma\delta_{kl}\|$ — *две матрицы критериев. Тогда им соответствует один и тот же оптимальный план.*

Доказательство. Пусть $\{Z_{kl}\}$ — какой-нибудь план, тогда значение функционала для первой задачи

$$L_1 = \sum_{k,\, l} Z_{kl}(S_k + \delta_{kl}) = \sum_{k,\, l} Z_{kl} S_k + \sum_{k,\, l} Z_{kl}\delta_{kl} = \sum_k M_k S_k + \sum_{k,\, l} Z_{kl}\delta_{kl} \tag{10}$$

и для второй задачи

$$L_2 = \sum_{k,l} Z_{kl}(\bar{S}_k + \gamma\delta_{kl}) = \sum_k M_k \bar{S}_k + \gamma \sum_{k,l} Z_{kl}\delta_{kl}. \tag{11}$$

Поскольку $\sum_k M_k S_k$ и $\sum_k M_k \overline{S}_k$ — постоянные величины, не зависящие от выбора плана, то $L_1 = \min$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k,l} Z_{kl}\delta_{kl} = \min$ и аналогично, $L_2 = \min$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k,l} Z_{kl}\delta_{kl} = \min$. Это доказывает, что всякий план, оптимальный для одной задачи, оптимален и для другой задачи.

Рассмотрим, как изменяется матрица критериев при переходе к ценам единого уровня.

Обозначим:

$\widetilde{\delta}_{kl}$ — транспортные расходы в ценах единого уровня;

$\widetilde{S}_k$ — цена за один *тут* k-го предприятия при переходе к ценам единого уровня;

t — номер отрасли «транспорт», $t = q + 1$;

$i(k)$ — функция, которая предприятию k ставит в соответствие номер i топливной отрасли, к которой относится это предприятие ($i(k)$ может принимать значения $1, \ldots, q$);

$\widetilde{\delta}_{kl}$ естественно определить формулой $\widetilde{\delta}_{kl} = X_t\delta_{kl}$.

Тогда матрица критериев в ценах единого уровня имеет вид $||\widetilde{S}_k + X_t\delta_{kl}||$ и, в соответствии с теоремой 1, оптимальный план для нее тот же, что и при расчете ТЭБ в действующих ценах. Для величин $\widetilde{S}_k$ естественно потребовать, чтобы $\widetilde{S}_k = Y_{i(k)}S_k$, т. е. чтобы эти величины были пропорциональны величинам S_k с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от вида топлива. Однако было бы неправильно полагать $Y_{i(k)} = X_{i(k)}$, так как введенные в разделе 1 удорожания X_i относятся к ценам на месте потребления.

Пусть μ — номер некоторой топливной отрасли, тогда в действующих ценах потребители платят за ее продукцию

$$\sum_{i(k)=\mu} (S_k + \delta_{kl}) Z_{kl},$$

а в ценах единого уровня в X_μ раз больше $X_\mu \sum_{i(k)=\mu} (S_k + \delta_{kl}) Z_{kl}$. Так как расходы на транспортировку в ценах единого уровня составляют $X_t \sum_{i(k)=\mu} \delta_{kl}Z_{kl}$, то на месте производства эта же продукция в ценах единого уровня стоит $X_\mu \sum_{i(k)=\mu} (S_k + \delta_{kl}) Z_{kl} - X_t \sum_{i(k)=\mu} \delta_{kl}Z_{kl}$, но в действующих ценах эта величина составляет $\sum_{i(k)=\mu} S_k Z_{kl}$ окончательно

$$Y_\mu = \frac{X_\mu \sum_{i(k)=\mu} (S_k + \delta_{kl}) Z_{kl} - X_t \sum_{i(k)=\mu} \delta_{kl}Z_{kl}}{\sum_{i(k)=\mu} S_k Z_{kl}}.$$

Таким образом, в ценах единого уровня матрица критериев $||\widetilde{S}_k + \widetilde{\delta}_{kl}||$ имеет вид $||A_k X_{i(k)} + X_t \alpha_{kl}||$, где коэффициенты A_k и α_{kl} могут быть определены через величины S_k, δ_{kl}, Z_{kl}.

Следуя [2], коммуникацию (k, l), по которой в оптимальном плане может быть произведена поставка, будем называть кружком. Будем говорить, что он расположен в строке k и столбце l. Последовательность кружков назовем цепью, если два соседних кружка этой последовательности расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Строки (столбцы), через которые проходит цепь, назовем связанными; строку, в которой находится первый кружок цепи, назовем ведущей.

В оптимальном плане для каждого кружка (k, l) выполняется соотношение:

$$C_l = a_{kl} + R_k, \tag{12}$$

где a_{kl} — элемент матрицы критериев. Система таких уравнений для кружков, связанных одной цепью, позволяет определить ренты и цены, если рента ведущей строки известна. При этом ренты и цены линейно выражаются через ведущую ренту и коэффициенты матрицы критериев.

Пусть система кружков оптимального ТЭБ такова, что наименьшее число непересекающихся цепей, которые можно в ней выделить, равно M. Эти цепи будем называть максимальными. Можно считать, что строки занумерованы так, что сначала идут все строки, связанные первой цепью, затем второй и т. д. Таким образом, ведущие строки максимальных цепей имеют номера $k_1 = 1, k_2, \ldots, k_M$. Обозначим значения ведущих рент через $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$. Ранее было показано, что коэффициенты матрицы критериев в ценах единого уровня суть линейные функции от $X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}$. Введем целочисленную функцию $m(k)$, которая строке k ставит в соответствие номер максимальной цепи, проходящей через эту строку. Тогда для рент предприятий R_k получаем линейные выражения

$$R_k = L_k(X_1, \ldots, X_q, X_{q+1}) + \alpha_{m(k)}. \tag{13}$$

Для того, чтобы определить ведущие ренты, потребуем выполнения условий нормировки: 1) все ренты $R_k \geqslant 0$; 2) в каждой максимальной цепи есть, по крайней мере, одна нулевая рента.

Цены на топливо в каждом районе также являются линейными функциями от $X_1, \ldots, X_{q+1}$ и ведущих рент. Пусть для каждого l-го района потребления заданы числа P_{il} — доли топлива, потребленного в этом районе в i-й отрасли. Тогда имеем

$$D_i = \sum_l P_{il} C_l \sum_k Z_{kl} \quad (i = 1, \ldots\, n + 1)$$

Запишем величины D_i более подробно. Очевидно, что

$$D_i = \sum_{j=1}^{q+1} r_{ij} X_j + \sum_{m=1}^{M} \beta_{im} \alpha_m,$$

где r_{ij}, β_{im} — некоторые известные коэффициенты. Определим величины $\bar{a}_{ij}$ формулами:

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} + r_{ij} \quad (j = 1, \ldots, q + 1);$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} \text{ для всех остальных } j.$$

Окончательно запишем полную систему соотношений для расчета цен единого уровня с учетом ренты в следующем виде:

$$U_i X_i - \sum_j \theta_{ij}(p) \bar{a}_{ij} X_j - p' \sum_j \theta_{ij}(p) b_{ij} X_j = \alpha_i + \sum_{m=1}^{M} \beta_{im} \alpha_m \tag{14}$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

$$R_k = L_k(X_1, \ldots, X_{q+1}) + \alpha_{m(k)} \tag{15}$$

$$\min_{m(k)=m} R_k = 0 \quad (m = 1, \ldots, M), \tag{16}$$

$$\Pi - \sum_j \bar{a}_{\text{п}j} X_j - \sum_{m=1}^{M} \beta_{\text{п},m} \alpha_m = 0. \tag{17}$$

Из этой системы находим p', $X_1, \ldots, X_n$ — все искомые величины.

Расчет производится так. Сначала задаем какое-либо значение $p' > 0$. Затем $(M + 1)$ раз решаем систему

$$U_i X_i - \sum \theta_{ij} \bar{a}_{ij} X_j - p' \sum \theta_{ij} b_{ij} X_j = \alpha_0 d_i + \sum_{m=1}^{M} \beta_{im} \alpha_m \tag{18}$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

полагая вектор $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M$ равным векторам $l_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $l_1 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, l_M = (0, 0, \ldots, 1)$. Получим $M + 1$ решение $\{X_i^0\}$, $\{X_i^1\}, \ldots, \{X_i^M\}$. Очевидно, что векторы $\{X_i^0, 0, 0, \ldots, 0\}$, $\{X_i^1, 1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \{X_i^M, 0, 0, \ldots, 1\}$ образуют фундаментальную систему решений для уравнений (14), (15) при фиксированном p'.

Определим величины $R_k^0, R_k^1, \ldots, R_k^M$ формулами:

$$R_k^0 = L_k(X_1^0, \ldots, X_{q+1}^0),$$

$$R_k^\mu = L_k(X_1^\mu, \ldots, X_{q+1}^\mu) + 1, \quad \text{если } m(k) = \mu,$$

$$R_k^\mu = L_k(X_1^\mu, \ldots, X_{q+1}^\mu), \quad \text{если } m(k) \neq \mu,$$

тогда

$$R_k = R_k^0 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m R_k^m. \tag{19}$$

Возьмем некоторый набор номеров $k_1, k_2, \ldots, k_M$, такой, что выполняются соотношения

$$m(k_1) = 1, \quad m(k_2) = 2, \ldots, m(k_M) = M, \tag{20}$$

определим числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ из системы уравнений $R_{k_1} = 0$, $R_{k_2} = 0, \ldots, R_k = 0$. Подставляя полученные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ в формулы (19), проверяем, выполнены ли условия $R_k \geqslant 0$. Если эти условия не выполняются, то берем новый набор номеров, удовлетворяющий условиям (20).

Если все $R_k \geqslant 0$, то определяем X_i по формулам

$$X_i = X_i^0 + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m X_i^m$$

и вычисляем невязку в уравнении (17). Если она больше 0, то p' следует увеличить, если меньше 0, то p' следует уменьшить.

Так как

$$\Pi - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{\text{п}j} X_j - \sum_{m=1}^{M} \beta_{\text{п},m} \alpha_m = \psi(p'),$$

то для подбора p', при котором $\psi(p') = 0$, применим любой метод численного решения уравнения с одним неизвестным.

III. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЦЕН ПРОИЗВОДСТВА

Для определения величин $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и p' служит система уравнений:

$$U_i X_i = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} + \frac{b_{ij}^{\text{осн}}\, \theta_{ij}(p')}{N_i} \right) X_j + d_i +$$

$$+ p' \left[\sum_{j=1}^{n} [b_{ij}^{\text{осн}}\, \theta_{ij}(p') + b_{ij}^{\text{обор}}\,] X_j \right]^{*}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (21)$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{\text{п}i} X_i + \frac{b_{\text{п}i}^{\text{осн}}\, \theta_{\text{п}i}(p')}{N_{\cdot}} \right) X_i, \qquad (22)$$

где N_i — срок амортизации.

Считается, что выполнены следующие предположения:

$$U_i > 0;\ a_{ij} \geqslant 0;\ b_{ij}^{\text{осн}} \geqslant 0;\ b_{ij}^{\text{обор}} \geqslant 0;\ a_{i\text{п}} \geqslant 0\, (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (23)$$

$$d_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (24)$$

$$U_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{h} + \frac{b_{ij}^{\text{осн}}}{N_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (25)$$

При любом i хотя бы для одного $j(i)$

$$b_{i,\, j}(i) > 0. \qquad (26)$$

Обозначим

$$T_j = U_j - \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij} + \frac{b_{ij}^{\text{осн}}}{N_i} \right). \qquad (27)$$

Назовем отраслями конечной продукции те отрасли, для которых

$$T_j > 0. \qquad (28)$$

Назовем отраслями продукции потребления (при этом отнюдь не предполагается, что весь конечный продукт T_j идет на потребление) те отрасли, для которых

$$a_{i\text{п}} > 0. \qquad (29)$$

Для всех i

$$T_i \geqslant a_{\text{п}i}. \qquad (30)$$

Величины $\theta_{ij}(p')$ непрерывны по p' и монотонно возрастают с ростом p'. При $p' = 0$, $\theta_{ij}(0) = 1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Наконец, считается

$$\Pi \geqslant \sum_{i=1}^{n} d_i. \qquad (31)$$

---

* В отличие от уравнений (1) и (2), в которых коэффициент удорожания θ_{ij} относился к продукции отраслей, создающих исключительно основные фонды, в уравнениях (21) и (22) коэффициент θ_{ij} относится к продукции любой отрасли j — к той ее части, из которой состоят основные фонды отрасли i.

Отмеченными ранга 0 назовем отрасли продукции потребления.

Отмеченной ранга n назовем отрасль производства j, если она не является отмеченной ранга $<n$, и в то же время существует отмеченная отрасль производства i ранга $n-1$ такая, что

$$b_{ij}^{\text{осн}} > 0. \tag{32}$$

Ограничением, достаточным для существования решений системы (21) — (22) является предположение, что все отрасли — отмеченные. Пусть величина p' и вместе с ней все $\theta_{ij}(p')$ фиксированы. Определим нормальные итерации формулами:

$$X_i^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

и

$$X_i^{(s+1)} = \frac{1}{U_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} + \frac{b_{ij}^{\text{осн}}\theta_{ij}(p')}{N_i}\right)X_j^{(s)} + \right.$$
$$\left. + d_i + p'\left[\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}^{\text{осн}}\theta_{ij}(p') + b_{ij}^{\text{обор}}\right)X_j^{(s)}\right]\right\}. \tag{34}$$

В силу предположений (23) — (24) имеем для всех s

$$X_i^{(s+1)} > X_i^{(s)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{35}$$

Следовательно, достаточно доказать ограниченность по s всех величин $X_i^{(s)}$, чтобы существовал $\lim\limits_{s\to\infty} X_i^{(s)}$, причем такой предел служил бы решением системы (21) — (22) при заданном p'.

Лемма 1. *При $p' = 0$ результаты нормальной итерации ограничены.*

Доказательство. Положим $p' = 0$. Просуммируем уравнения (34), умножив их на U_i от $i = 1$ до n, и перенесем влево все члены, содержащие X_i.

В силу (35), $\theta_{ij}(0) = 1$ и (36) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \left[U_i X_i^{(s)} - \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} + \frac{b_{ij}^{\text{осн}}}{N_i}\right)X_i^{(s-1)}\right] > \sum_{i=1}^{n}\left[U_i X_i^{(s)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} + \frac{b_{ij}^{\text{осн}}}{N_i}\right)X_i^{(s)}\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n} T_i X_i^{(s)}, \tag{36}$$

откуда следует ограниченность цен $X_i^{(s)}$ для всех отраслей конечной продукции для всех s.

Но в силу предположения об отмеченности всех отраслей из ограниченности величин $X_i^{(s)}$ для отмеченных отраслей ранга 0 следует ограниченность величин $X_i^{(s)}$ для отмеченных отраслей первого ранга, так как, если j отмеченная отрасль первого ранга, а $i(j)$ — отрасль нулевого ранга и $b^{i\,\text{осн}}_{,j\,(i)} > 0$, то

$$X_i^{(s+1)} > \frac{1}{U_i}\,\frac{b_{ij}^{\text{осн}}}{N_i}\,X_j^{(s)} \tag{37}$$

и так как $X_i^{(s)}$ ограничены по s, для $X_j^{(s)}$ это также имеет место. Для следующих рангов доказательство аналогично. Назовем p'_0 допустимым, если для всех $0 < p' < p'_0$ нормальные итерации ограничены.

Лемма 2. *Если в уравнениях* (21) *при допустимом p' заменить члены d_i на $2d_i$, то для такой системы* (21)* *величина p'_0 останется допустимой.*

Доказательство. Рассмотрим нормальные итерации для систем (21) и (21*) $p' < p'_0$. Обозначим соответствующие величины $X_i^{(s)}$ и $X^{*}{}_i^{(s)}$.

Для $s = 0$

$$X_i^{(0)} \equiv X_i^{*(0)} \equiv 0. \tag{38}$$

Далее, для $s = 1$ имеем из (21) и (21*).

$$X_i^{*(1)} = 2X_i^{(1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{39}$$

При фиксированном p' уравнение (34) линейно относительно $X_j^{(s)}$ и потому при любом s

$$X_i^{(s)*} = 2X_i^{(s)},$$

что доказывает допустимость p'_0 для (21*).

Отсюда далее следует, что

$$X_i^* = \lim X_i^{(s)*} = 2 \lim_{s\to\infty} X_i^{(s)} = 2X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{40}$$

Лемма 3. *Пусть p'_0 допустимо. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $p'_0 + \varepsilon$ также допустимо.*

Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}^{\text{осн}}[\theta_{ij}(p'_0 + \varepsilon) - \theta_{ij}(p'_0)]X_j}{N_i} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{\text{осн}}(p'_0 + \varepsilon) \times$$

$$\times [\theta_{ij}(p'_0 + \varepsilon) - p'_0\theta_{ij}(p'_0)]X_j + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\text{обор}} X_j < \frac{d_i}{2} \text{ при любом } i \tag{41}$$

Пусть $p'_1 = p'_0 + \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим нормальные итерации для системы (21*), где $p' = p'_0$, но все d_i были удвоены, и для системы (21**), у которой $p' = p'_1 < p'_0 + \varepsilon$, но d_i сохранены не удвоенными.

Утверждается, что для каждого $s \geqslant 1$

$$X_i^{(s)*} \geqslant X_i^{(s)**} \tag{42}$$

Действительно, для $s = 0$ наше утверждение справедливо. Пусть оно уже доказано для $s = p$. Рассмотрим $X_i^{(p+1)**}$ и $X_i^{(p+1)*}$.

Вычитая соответствующие равенства (34), получаем

$$X_i^{(p+1)*} - X_i^{(p+1)**} = \frac{1}{U_i}\Big\{ \sum_{j=1} a_{ij}[(X_j^{(p)*} - X_j^{(p)**}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}^{\text{осн}}\theta_{ij}(p'_0)}{N} (X_j^{(p+1)*} - X_j^{+1)**}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}^{(\text{осн})}[\theta_{ij}(p'_0 + \varepsilon_1) - \theta_{ij}(p'_0)]}{N} \times$$

$$\times X_j^{(p)**} + (2d_i - d_i) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\text{осн}} [p'_0 \theta_{ij}(p_0') X_j^{(p)*} -$$

$$- (p'_0 + \varepsilon_1)\theta_{ij}(p'_0 + \varepsilon_1) X_j^{(p)**}] + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\text{обор}} [p'_0 X_j^* - p'_0 X_j^{**}] -$$

$$- \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\text{обор}} X_j^{**} \Big\} \geqslant d_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}^{\text{осн}} [\theta_{ij}(p'_0 + \varepsilon_1) - \theta_{ij}(p'_0)]}{N_i} \times$$

$$\times X_j^{(p)*} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\text{осн}} [(p'_0 + \varepsilon_1)\theta_{ij}(p_0' + \varepsilon_1) - p'_0 \theta_{ij}(p_0')] X_j^{(p)*} -$$

$$- \varepsilon \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{\text{обор}} X_j^{(p)*} \geqslant 0, \qquad (43)$$

т. к. $X_j^{(p)*} \leqslant X_j^* \leqslant 2X_j$ согласно (40) и

$$\theta_{ij}(p_0' + \varepsilon_1) \leqslant \theta_{ij}(p'_0 + \varepsilon)$$

по предположению о монотонной зависимости θ_{ij} от p'.

Итак, мы показали, что допустимые p' образуют открытое множество. Заметим, кстати, что до сих пор мы, фактически, не пользовались отмеченностью всех отраслей производства относительно отраслей продукции потребления, а пользовались лишь их отмеченностью относительно отраслей конечной продукции.

Лемма 4. *Допустимые p' образуют интервал.*

Доказательство. Для доказательства нам достаточно воспользоваться утверждением (26). Действительно, рассмотрим такую цепочку отраслей. Пусть $i_1 = 1$. Положим $i_2 = j(i_1)$, для которого $b_{i_1, i_2}^{\text{осн}} > 0$ и, вообще, если уже определено i_s, то $i_{s+1} = j(i_s)$, для которого $b_{i_s, i_{s+1}}^{\text{осн}} > 0$. Так как всех отраслей конечное число, найдется такая цепочка $i_m, i_{m+1}, \ldots, i_t$, что $i_t = i_m$.

Но из неотрицательности всех коэффициентов следует, что

$$X_{i_m} > p'^{(t-m)} \prod_{k=m}^{t} \frac{b_{i_k, i_{k+1}}^{\text{осн}}}{U_{i_k}} X_{i_m}, \qquad (44)$$

откуда и видна ограниченность p'.

Таким образом, существует $p'_{\max}$ такое, что все $p' < p'_{\max}$ допустимы, а $p'_{\max}$ — недопустимо.

Лемма 5. *При $p \to p'_{\max}$ хоть одно X_i неограниченно растет.*

Доказательство. Это утверждение следует из того, что: 1) с ростом p' при $p' < p'_{\max}$ все X_i растут, как легко видеть из сравнения хода нормальных итераций с учетом монотонного роста $\theta_{ij}(p')$ с ростом p'; 2) если бы X_i все оставались ограниченными в совокупности, то существовали бы $X_i^{\max} = \lim X_i(p')$; в этом случае $p'_{\max}$ было бы допустимым.

Лемма 6. *При $p' \to p'_{\max}$ хоть одно из X_i для отраслей продукции потребления неограниченно растет* (единственно ради этого утверждения и было введено предположение об отмеченности всех отраслей производства).

Доказательство. Действительно, если бы при $p' \to p'_{\max}$ все X_i для отмеченных отраслей производства ранга 0 оставались ограниченными, необходимо были бы ограничены в силу (32) и (21) и X_i для отраслей ранга 1, далее были ограничены X_i для отраслей ранга 2 и т. д.

Теорема 2. *Если в системе* (21)—(22) *все отрасли отмечены, то она имеет положительные решения.*

Доказательство. При $p' = 0$ в силу (36)

$$\sum_{i=1}^{n} T_i X_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_i. \tag{45}$$

Из (45) с учетом (30) и (31) получаем при $p' = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\text{п}i} X_i \leqslant \text{П}. \tag{46}$$

Но поскольку с ростом p' все X_i растут и хоть одно из X_i, входящих в левую часть (46), растет неограниченно при $p' \to p'_{\max}$; отсюда следует, что существует (и притом единственное) допустимое p' такое, при котором уравнение (22) удовлетворяется одновременно с (21).

Этим и завершается доказательство существования положительных решений системы (21)—(22).

Теорема 3. *Существует единственное неотрицательное решение системы* (21)—(22).

Доказательство. Пусть при некотором $p' \geqslant 0$ система (21)—(22) имеет неотрицательные решения $X_1^*, \ldots, X_n^*$. В силу $d_i > 0$ все X_i^* строго положительны. Тогда легко индуктивно показать, что при этом p' нормальная итерация будет давать на каждом шагу величины $X_i^{(p)} \leqslant X_i^*$ и потому будет существовать предельное для нормальных итераций решение $X_1, \ldots, X_n$, причем $X_i \leqslant X_i^*$ и $X_i < X_i^*$ хотя бы для одного i.

Тогда

$$Z_i = X_i^* + \lambda(X_i^* - X_i) \tag{47}$$

служат решениями (21) при любом λ.

Положим

$$\lambda = -\max_i \frac{X_i^*}{X_i^* - X_i}. \tag{48}$$

Но из (47) и (48) следует, что $Z_i \geqslant 0$ при всех i и $Z_{i_0} = 0$, хотя бы для одного i_0. Это немедленно приводит к противоречию, так как в уравнениях (21) все коэффициенты неотрицательны и $d_{i_0} > 0$.

Таким образом, доказана единственность неотрицательных решений системы уравнений цен производства.

IV. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕН С УЧЕТОМ РЕНТЫ

Сначала дадим ответ на вопрос о существовании решения для системы соотношений (14), (15), (17). Приведем эту систему к более удобному для нас виду. Каждое предприятие, производящее топливо, выделим формально в особую отрасль. В обозначениях раздела II это сводится к тому, что теперь $q = K$ и $X_k = X_l$, если $i(k) = i(l)$.

Обозначим $Z_i = X_i + R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — удорожание единицы продукции i-й отрасли с учетом ренты в этой отрасли, $R_i = 0$ при $i > K$.

Легко видеть, что ренты оптимального ТЭБ связаны соотношениями $Z_{k_{m(l)}} + \delta_{k\,m(l)} Z_t = Z_l + \delta_l Z_t$ $(l = 1, 2, \ldots, K)$, где величины δ_l могут быть вычислены через коэффициенты матрицы ТЭБ.

Система уравнений (14), (15), (17) в новых обозначениях будет иметь следующий вид:

$$U_i Z_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}(p)\, a_{ij} Z_j + p \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}(p)\, b_{ij} Z_j + U_i R_i + d_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{49}$$

$$U_l R_l = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{U_l}{U_k} \theta_{kj}(p)\, a_{kj} - \theta_{lj}(p)\, a_{lj} \Big) Z_j + (\delta_l - \delta_k) U_l Z_t +$$

$$+ p \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{U_l}{U_k} \theta_{kj}(p)\, b_{kj} - \theta_{lj}(p)\, b_{lj} \Big) Z_j + \Big(\frac{U_l}{U_k} d_k - d_l \Big) + U_l R_k, \tag{50}$$

где $k = k_{m(l)} = l$ $(l = 2, 3, \ldots, k_2 - 1, k_2 + 1, k_2 + 2, \ldots, K)$.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} a_{\Pi i} Z_i \ldots \tag{51}$$

Ищем решение p, Z_i, R_l $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $(l = 1, 2, \ldots, K)$ с неотрицательными ценами $X_i = Z_i - R_i$ и рентами R_l (в дальнейшем будем рассматривать только такие решения). Из балансовых соотношений (6) — (7), приведенных в начале раздела II, получаем, что при $p \geqslant 0$ для таких решений:

$$X_i \geqslant \frac{d_i}{U_i} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Зададимся некоторым значением $p = p_0$ и устраним неопределенность в уравнениях (49), (50), (51), представим ведущие ренты $R_{k_1}, \ldots, R_{k_M}$ в виде:

$$U_{k_l} R_{k_l} = \sum_{j=1}^{n} \xi_{lj} Z_j + \varphi_l \ (l = 1, 2, \ldots, M), \tag{52}$$

где коэффициенты ξ_{lj}, φ_l — фиксированные неотрицательные числа. Систему уравнений (49), (50), (51), (52) будем для краткости обозначать (*). Фиксированные нами числа p_0, ξ_{lj}, φ_l будем называть начальными данными. Здесь и всюду далее считаем, что начальные данные выбраны так, чтобы определитель системы (*) не был равен нулю при $p = p_0$ и чтобы удовлетворялись еще некоторые условия — исходные условия для установления критериев существования решения системы (*). Нас будут интересовать лишь такие решения этой системы, при которых цены и ренты неотрицательны.

Пусть совершены линейные преобразования системы уравнений (*) так, чтобы вновь полученная система уравнений (**) была эквивалентна заданной системе (*), т. е. имела те же решения, что и система (*), и чтобы система (**) обладала следующими свойствами: а) левые части всех уравнений при переходе от (*) к (**) не изменились; б) при $p = p_0$ все коэффициенты в правых частях уравнений системы (**) были неотрицательны, а свободные члены — строго положительны; все коэффициенты и свободные члены в правой части уравнения (51) (**)

были строго положительны; в) коэффициенты в правых частях уравнений (**) монотонно не убывали с ростом p при $p \geqslant p_0$.

Тогда будем говорить, что исходные условия для установления критериев существования решения выполнены.

Очевидно, что при $p = 0$ всегда можно подобрать такие достаточно большие ξ_{lj}, φ_l, чтобы условия а) — в) выполнялись после подстановки выражений для ведущих рент из (52) в (50) и некоторого простого преобразования правой части уравнения (51). Однако, как будет видно из дальнейшего, не существует решений системы соотношений (*) таких, что $p \geqslant p_0$, если значения для p_0 и коэффициентов ξ_{lj}, φ_l выбраны слишком большими*.

Поэтому, если в дальнейшем выясняется, что система (*) не имеет решения ни при каких $p \geqslant p_0$, то следует, по возможности* уменьшить начальные данные, в первую очередь — коэффициенты ξ_{lj}, φ_l, а затем p_0.

Обозначим L_0 систему (**). Обозначим далее $B_0(p)$ матрицу коэффициентов в правых частях системы уравнений L_0, включая свободные члены, $A_0(p)$ — ее подматрицу, которая остается после вычеркивания из $B_0(p)$ последней строки и последнего столбца.

Полагая последовательно $l = 0, 1, \ldots, n + K$ и подставляя при каждом l выражения для неизвестного Z_i или R_j, стоящего в левой части первого уравнения системы L_l, в остальные уравнения этой системы, исключим из них указанное неизвестное; после этого отбросим из системы L_l ее первое уравнение, уменьшив в то же время на единицу и число неизвестных, и число столбцов в матрице. Вновь полученную систему уравнений обозначим L_{l+1}, соответствующие матрицы — $B_{l+1}(p)$; $A_{l+1}(p)$.

Если исходные условия а) — в) выполнены, то оказывается, что существование решения с неотрицательными ценами, рентами и с $p \geqslant p_0$ связано с выполнением при $0 \leqslant 1 \leqslant n + K$ следующих свойств:

Свойство 1. Элемент в верхнем левом углу матрицы $B_l(p_0)$ строго меньше коэффициента при неизвестном в левой части первого уравнения системы L_l.

Свойство 2. При $p = p_0$ и при любом s $(s = 1, 2, \ldots, n + K - l)$ сумма элементов s-го столбца матрицы $A_l(p_0)$ строго меньше коэффициента при неизвестном в левой части s-го уравнения L_l.

Свойство 3. При $p = p_0$ сумма элементов s-го столбца матрицы $B_l(p)$ не больше коэффициента при неизвестном в левой части s-го уравнения системы L_l (при $s = 0, 1, \ldots, n + K - l$) и не больше Π (при $s = n + K + 1 - l$).

Свойство 4. После подстановки любого неотрицательного решения из цен и рент системы (49), (50), (52) при условии $p = p_0$ в правую часть уравнения (51) последняя не превосходит левой части этого уравнения, т. е. величины Π.

Лемма 7. *Если для системы уравнений L_{l_0-1} выполняются исходные условия а) — в) и свойство 1, то для системы уравнений L_{l_0} выполняются исходные условия а) — в).*

Лемма 8. *Если для системы уравнений L_l выполняются исходные условия а) — в) и свойство 3, то для нее выполняется и свойство 2.*

Лемма 9. *Если для системы L_l выполнены исходные условия а) — в) и свойство 3, то выполняется и свойство 4.*

Все три леммы достаточно очевидны. Например, для доказательства леммы 9 достаточно просуммировать при $p = p_0$ отдельно левые и правые части уравнений системы L_l (сумма левых частей не меньше суммы пра-

* Можно указать примеры моделей экономики, в которых ренты столь велики, что система уравнений (49), (50), (52) не имеет неотрицательных решений ни при каких начальных данных; однако, оперируя цифрами, взятыми из практики, мы таких примеров не встретили.

вых), а затем вернуться к исходной системе уравнений L_0 при помощи преобразований, обратных уже использованным для получения систем L_{l-1} из L_l, L_{l-2} — из L_{l-1} и т. д.

Пусть выполнены исходные условия а) — в). Сформулируем и докажем критерий существования и критерий отсутствия решения с неотрицательными ценами и рентами и с $p \geqslant p_0$.

Критерий существования решения. При выполнении исходных условий а) — в) для существования решения системы (49) — (52) с неотрицательными ценами и рентами и с $p \geqslant p_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из двух условий:

1) имеют место свойство 1 (при $l = 0, 1, \ldots, n + K$) и свойство 4;

2) имеют место свойства 1 (при $l = 0, 1, \ldots, l_0 - 1$) и 3 при $l = l_0$.

Доказательство. Достаточность первого условия и необходимость выполнения свойства 4 очевидны. Докажем необходимость выполнения свойства 1 (при $l = 0, 1, \ldots, n + K$). Пусть в условиях леммы 7 (при $l = l_0$) свойство 1 не выполнено. Тогда первое уравнение системы L_{l_0} имеет вид (после переноса левой его части в правую):

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j Z_j + \sum_{l=1}^{K} \eta_l R_l + \eta,$$

где все γ_j, η_l, η — неотрицательны.

Удовлетворить этому соотношению невозможно, если $p \geqslant p_0$ и все цены и ренты неотрицательны, т. е. первое условие критерия является необходимым.

При выполнении исходных условий а) — в) и второго условия критерия ввиду лемм 7—9 имеют место свойства 2 и 4. При выполнении исходных условий а) — в) это гарантирует нам существование решения системы уравнений L_{l_0} с неотрицательными $X_i = Z_i - R_i$, $R_l (i = 1, \ldots, n)$; $(l = 1, \ldots, K)$, и при этом $p \geqslant p_0$ (см. раздел III), а следовательно, второе условие критерия является достаточным.

Проверяя последовательно при каждом l_0 $(l_0 = 0, 1, \ldots, n + K)$ выполнение обоих условий критерия, обнаружим необходимость второго условия.

Можно ожидать, что довольно удобное для проверки второе условие критерия либо не выполняется вообще, либо выполняется достаточно быстро, т. е. намного раньше, чем при $l_0 = n + K$. Специально для эффективной проверки отсутствия решения укажем еще один необходимый и достаточный при выполнении исходных условий а) — в) критерий отсутствия решения.

Критерий отсутствия решения. Для некоторого номера l_0 либо нарушено первое условие критерия существования решения, либо имеют место свойство 1 (при $l = 0, 1, \ldots, l_0 - 1$) и свойство 4 и при этом для любого s $(s = 1, 2, \ldots, n + K + 1 - l_0)$ при $p = p_0$ сумма элементов s-го столбца матрицы $B_{l_0}(p)$ не меньше, а для некоторого $s = s_0$ строго больше, чем коэффициент при неизвестном, стоящем в левой части s-го уравнения системы L_{l_0} при $s \leqslant n + K - l_0$, или чем величина П (если $s = n + K + 1 - l_0$).

Сравнивая условия критерия отсутствия решения с условиями критерия существования решения, получаем необходимость выполнения критерия отсутствия решения; достаточность очевидна.

При проверке выполнения второго условия критерия существования решения не составляет никакого труда проверить заодно и выполнение условий критерия отсутствия решения; проверяя одновременно выполнение условий обоих критериев, можно значительно быстрее, чем без использования критерия отсутствия решения получить ответ, если он отрицательный. При помощи этих двух критериев нетрудно заметить, что чем бо́льшие ренты требуется ввести в модель экономики, тем больше у нас шансов на отрицательный ответ.

Отметим, что для вывода критериев безразлично, в каком порядке записаны уравнения системы L_0 и исключены переменные. Однако при практической проверке выполнения приведенных ниже критериев удобнее занумеровать уравнения системы L_0 в таком порядке, чтобы в их левых частях стояли последовательно $U_{K+1}Z_{K+1}$, $U_{K+2}Z_{K+2}, \ldots$, U_nZ_n, U_1R_1, $U_2R_2, \ldots$, U_KR_K, U_1Z_1, $U_2Z_2, \ldots$, U_KZ_K, П. Напомним, что топливные отрасли имеют номера от 1 до K включительно, а транспорт — номер $t = K+1$. Наименее спорным кажется нам здесь исключение Z_t в первую очередь.

Остановимся на вопросе об экономическом содержании найденных критериев. В любой модели экономики без учета ренты, т. е. если $R_j = 0$, $(j = 1, \ldots, K)$, второе условие критерия существования всегда выполняется (при $l = 0$). В самом деле, в этом случае сумма элементов j-го столбца матрицы $B_0(0)$ при любом j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ есть сумма по всем i материальных затрат отрасли j в отрасли i плюс $a_{j\text{п}}$ — затраты продукции отрасли j на личное потребление, а это все вместе не может быть больше валового выпуска U_j отрасли j. Кроме того, сумма элементов $(n+K+1)$-го столбца — сумма заработной платы по всем отраслям — не больше фонда потребления П. В случае наличия ренты в модели экономики при суммировании элементов каждого столбца к сумме затрат добавляются соответствующие доли рент, т. е. коэффициенты при удорожании цены на продукцию данной отрасли в разложении для рент (50) и (52). Может оказаться, что сумма по всем рентам от этих коэффициентов для каждой отрасли не больше той части валового выпуска продукции отрасли, которая не была затрачена ни на другие отрасли, ни на потребление (т. е. осталось в виде накоплений); тогда сумма элементов каждого столбца матрицы $B_0(0)$ не больше, чем U_j (j — номер столбца), условие 2 критерия существования решения выполнено при $l_0 = 1$ и решение системы соотношений (14), (15), (17), (52) существует, при этом $p \geqslant 0$; может быть, и наоборот, сумма этих коэффициентов не меньше соответствующей части валового выпуска в каждой отрасли (и хотя бы в одной из отраслей строго больше), тогда выполняются условия критерия отсутствия решения при $l_0 = 0$, и, следовательно, решения (14), (15), (17), (52) с неотрицательными p, ценами и рентами не существует. Может случиться, что сумма коэффициентов в одних отраслях меньше, а в других больше, и при $l = 0$ ни условия критерия 2, ни условия критерия отсутствия решения не выполняются. Тогда, переходя к матрицам $B_1(0)$, $B_2(0), \ldots$, $B_{n+K}(0)$, постепенно изменяем все коэффициенты в выражениях для рент (делая их примерно одинаковыми для всех отраслей), пока сравнение суммы коэффициентов и суммы остатков от валового выпуска, не затраченных ни на другие отрасли, ни на потребление, не будет иметь общего знака для всех отраслей.

Если такое сравнение при $p_0 = 0$ и заданных коэффициентах в (52) будет в пользу рент, т. е. при некотором l_0 выполнятся условия критерия отсутствия решения, то следует по возможности уменьшить коэффициенты в разложении для рент путем максимального уменьшения коэффициентов в разложении для ведущих рент, а также, — во вторую очередь, — путем выбора $p_0 < 0$. Однако уменьшение коэффициентов и p_0 не всегда возможно без нарушения исходных условий, а при таком нарушении опять может не существовать неотрицательного решения. В некоторых (возможно, даже во всех реальных) моделях экономики можно все-таки определить неотрицательные цены и ренты. Особенно вероятно, что это так, если разрешить начислять прибыль и на фонды, и на заработную плату (указано Л. П. Постышевым). Тогда мы можем по своему выбору увеличить или уменьшить вместе с коэффициентом начисления прибыли на зарплату сумму элементов столбца свободных членов уравнений системы (49) — (51) и правую часть уравнения (51). В частности, непрерывно уменьшая этот коэффициент, всегда можно добиться выполнения свойства 4. Поэтому при такой постановке задачи в условия критериев следует включать вместо системы $L_0(p)$ систему $\tilde{L}_0(p)$, полученную из уравнений (49), (50), (52), а вместо матрицы $B(p)$ — матрицу $A(p)$. Все критерии после этого изменения полностью сохранят силу применительно к новой постановке задачи. Уравнение (51) будет служить нам для определения коэффициента начисления прибыли на заработную плату.

Вернемся к рассмотрению соотношений (14) — (17).

Если решение системы соотношений (14), (15), (17) существует, то в случае, когда число M максимальных цепей равно 1, решение системы соотношений (14) — (17) также существует. В самом деле, докажем это, предположив, что мы уже имеем некоторое решение с $p = p^0$ и с положительными ценами и рентами.

1) Пусть определитель системы уравнений (14), (17) при $p = p^0$ равен нулю. Тогда одно из переменных X_i α_m является свободным. Рассмотрим решения системы уравнений (14), (17) при $p = p^0$ и при всевозможных значениях этого независимого переменного (цены или ренты). Непрерывно уменьшая его до нуля, мы в конце концов придем к такому решению системы (14), (17), в котором хотя бы одна из цен или рент впервые обратится в нуль.

2) Пусть значение $p = p^0$ таково, что определитель системы (14), (17) при $p = p^0$ не равен нулю. Тогда это же свойство выполняется и на некотором интервале (p^0, p^1), $p^0 < p^1$, и не выполняется при $p = p^1$. Заметим, что на интервале (p^0, p^1) решение системы (14), (17) непрерывно зависит от p.

Пусть $p^1 = \infty$. Тогда хотя бы одна из цен и рент стремится к ∞ при p, стремящемся к ∞.

При условии неотрицательности цен и рент на интервале (p^0, ∞) это противоречит уравнению (17). Следовательно, в некоторой точке интервала (p^0, ∞) решение (14), (17) содержит хотя бы одну отрицательную ренту или цену. Двигаясь непрерывно от p^0 до ∞, получаем на интервале $(p^0, \infty) = (p^0, p^1)$, искомое решение системы соотношений (14) — (17).

Пусть $p^1 < \infty$. Тогда, двигая p непрерывно от p^0 к p^1, либо в какой-то момент при $p^0 < p < p^1$, впервые получаем нулевую цену или ренту, т. е. получим решение, (14) — (17), либо при всяком p от p^0 до p^1 включительно имеем решение, где все цены и ренты неотрицательны, т. е. имеет место случай 1, при котором p^0 заменено p^1.

Таким образом, если в модели ТЭБ только одна максимальная цепь, то вопрос о существовании решения системы соотношений (14) — (17) раздела II нами исследован.

Если максимальных цепей несколько, то аналогичный вопрос остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Белкин. Цены единого уровня и экономические измерения на их основе. М., Экономиздат, 1963.
2. Применение цифровых машин в экономике. Транспортная задача линейного программирования. М., Изд-во АН СССР, 1962.

Поступила в редакцию
18 VI 1965