ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1965
том I, вып. 5

СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЗАМКНУТОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИКИ

В. Л. МАКАРОВ
(НОВОСИБИРСК)

1. В работе [1] Гейл рассмотрел следующую модель производства M. Модель M включает n «продуктов» (продукты, производственные мощности, виды трудовых и природных ресурсов и т. д.). *Производственные процессы* характеризуются парами n-мерных векторов (X, Y) с неотрицательными компонентами, где $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. Компонента x_i показывает затраты продукта с номером i; y_i — количество продукта i, которое получается в результате осуществления процесса (X, Y).

На множество процессов Z, которыми располагает модель, накладываются следующие ограничения: а) Z является замкнутым выпуклым конусом в $2n$-мерном эвклидовом пространстве; б) всякий продукт выпускается хотя бы одним процессом из Z.

На первый взгляд может представиться, что описанная модель относится только к очень узкой области экономических явлений. Однако в работе [2] показано, что модель M эквивалентна в некотором смысле произвольной динамической задаче линейного программирования.

2. *Состояние равновесия* модели M характеризуется процессом $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$, вектором цен $p = (p_1, \ldots p_n)$, $p \geqslant 0$, $\sum\limits_i p_i = 1$, и положительным числом α, которые находятся в следующих соотношениях: а) $\alpha\bar{X} \leqslant \bar{Y}$, б) $Yp - X\alpha p \leqslant 0$, для всех $(X, Y) \in Z$, в) $\bar{Y}p > 0$. Число α называется *темпом роста* модели в соответствующем состоянии равновесия.

3. Гейл показал (см. [1], теорема 1), что для любой модели M, в которой процессы $(0, Y) \notin Z$, $\sum\limits_i y_i > 0$, существуют $(\bar{X}, \bar{Y})$ и $\bar{p}$ такие, что

$$\frac{\bar{Y}\bar{p}}{\bar{X}\bar{p}} = \max_{(X,\,Y)\in Z} \min_i \frac{y_i}{x_i} = \alpha_M. \tag{1}$$

(В выражении (1) min берется по всем i, для которых отношение y_i / x_i определено. Отношение y_i / x_i не определено, если $y_i = 0$, $x_i = 0$. Если $y_i > 0$, $x_i = 0$, то $y_i / x_i = +\infty$.)

Легко проверить, что $(\bar{X}, \bar{Y})$, $\bar{p}$ и α_M определяют состояние равновесия модели M. Процесс $(\bar{X}, \bar{Y})$ из выражения (1) называется оптимальным.

4. Для случая, когда конус Z является многогранным, Кемени, Моргенштерн и Томпсон в [3] показали, что в модели M существует не более $\min(n, S)$ состояний равновесия с различными α, где S — число базисных процессов, на которые натянут конус Z. В заметке [5] приведены необходимые и достаточные условия для единственности числа α состояния равновесия. В настоящей работе все эти результаты обобщаются на случай произвольного замкнутого выпуклого конуса Z, причем наш метод оценки числа состояний равновесия отличен от метода работ [3] — [4] и лучше проясняет ситуацию, в которой возможны состояния равновесия с различными α.

5. Произвольная модель M порождает последовательность моделей $M_1, M_2, \ldots, M_N$ следующим образом. Пусть $(\bar{X}, \bar{Y})$ — оптимальный про-

цесс, в котором выпускается максимальное число продуктов. Множество номеров продуктов, которые выпускаются в $(\overline{X}, \overline{Y})$, обозначим через $\{i\}_1$. Модель $M_1 \equiv M$. Модель M_2 задается конусом $Z^{(2)}$, являющимся проекцией конуса Z на подпространство продуктов $\{i\} \setminus \{i\}_1$. Таким образом, модель M_1 порождает модель M_2. Аналогично, модель M_2 порождает модель M_3, если $\alpha_{M_2} < \infty$. Если $\alpha_{M_2} = \infty$, то оптимальный процесс в M_2, т. е. тот, который выпускает максимальное число продуктов без затрат, определяет множество $\{i\}_2$. Поэтому в любом случае M_2 порождает M_3 и т. д. В модели M_N существует оптимальный процесс, выпускающий все продукты из $\{i\}_N$. Очевидно, $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\nu=N} \{i\}_\nu = \{i\}$. Обозначим $\alpha_{M\nu}$ через $\alpha^{(\nu)}$.

Лемма. *Пусть модель M порождает модели $M_1, \ldots, M_N$. Для любого ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется процесс $(X, Y) \in Z$, в результате которого все производимые продукты* $i \in \bigcup\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu} \{i\}$ μ и

$$(\min_{\mu=1, \ldots, \nu} \alpha^{(\mu)} - \min_{i \in \{i\}} y_i/x_i) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Возьмем произвольную M_ν. Пусть $(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}$ — процесс из Z, проекция которого на $\{i\}_\nu$ есть оптимальный процесс модели M_ν, ее определяющий. Образуем процесс $(X, Y) = \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu} \lambda_\mu (X^{(\mu)}, Y^{(\mu)})$, $\lambda_\mu > 0$. Очевидно, $(X, Y) \in Z$ и все произведенные продукты — с индексами из $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu} \{i\}_\mu$. Имеем $\min\limits_i (y_i/x_i) = \min\limits_i \left(\sum\limits_\mu \lambda_\mu y_i^{(\mu)} \Big/ \sum\limits_\mu \lambda_\mu x_i^{(\mu)} \right)$.

Поскольку $y_i^{(\mu)} \geqslant \min\limits_{\mu, \ldots, \nu}{}^{\mu} \alpha^{(\mu)} x_i^{(\mu)}$ для любого $\mu = 1, \ldots, \nu$ и любого $i \in \{i\}_\mu$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти положительные $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ такие, что

$$\min_i (y_i/x_i) \geqslant \min_{\mu=1, \ldots, \nu} \alpha^{(\mu)} - \varepsilon.$$

Теорема 1. *Число состояний равновесия модели M с различными α равно числу порожденных ею моделей $M_1, M_\nu^{(2)}, \ldots, M_\nu^{(k)}$, для которых $\alpha^{(1)} > \alpha^{(\nu(2))} > \ldots > \alpha^{(\nu(k))}$,* причем числа $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\nu(k))}$ как раз и являются темпами роста в этих состояниях равновесия.

Доказательство. Покажем, что каждой модели $M_\nu^{(j)}$ соответствует состояние равновесия модели M с темпом $\alpha = \alpha^{(\nu(j))}$.

Возьмем произвольную $M_\nu^{(j)} = M_\nu$, $\alpha^{(\nu)} < \alpha^{(1)}$. Найдем для нее какой-нибудь оптимальный процесс $(\tilde{X}^{(\nu)}, \tilde{Y}^{(\nu)})$ и соответствующие ему $\tilde{p}^{(\nu)}$ и $\alpha^{(\nu)}$. Из построения моделей $M_1, \ldots, M_N$ видно, что M_ν работает с продуктами из $\bigcup\limits_{\mu=\nu}^{\mu=N} \{i\}_\mu$. Дополним вектор $\tilde{p}^{(\nu)}$ нулями до вектора размерности n. Получим вектор $p^{(\nu)}$. По определению состояния равновесия имеем: $Y\tilde{p}^{(\nu)} - X\alpha^{(\nu)}\tilde{p}^{(\nu)} \leqslant 0$ для всех $(X, Y) \in Z^{(\nu)}$, где $Z^{(\nu)}$ есть проекция конуса Z на пространство продуктов $\bigcup\limits_{\mu=\nu}^{=N} \{i\}_\mu$. Следовательно, $Yp^{(\nu)} - X\alpha^{(\nu)}p^{(\nu)} \leqslant 0$ для всех $(X, Y) \in Z$.

Теперь с помощью процесса $(\tilde{X}^{(\nu)}, \tilde{Y}^{(\nu)}) \in Z^{(\nu)}$ построим процесс $(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) \in Z$ следующим образом. Процесс $(\tilde{X}^{(\nu)}, \tilde{Y}^{(\nu)})$ является проекцией некоторого процесса $(\overline{X}^{(\nu)}, \overline{Y}^{(\nu)}) \in Z$. По лемме существует процесс $(X, Y) \in Z$, в результате которого все производимые продукты — из $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu-1} \{i\}_\mu$

и $\min_i (y_i / x_i) > \alpha^{(\nu)}$. Для $i \in \bigcup_{\mu=\nu}^{\mu=N} \{i\}_\mu x_i = y_i = 0$. Образуем процесс $(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) = (\bar{X}^{(\nu)}, \bar{Y}^{(\nu)}) + \lambda(X, Y)$. Множитель $\lambda > 0$ выбирается таким образом, чтобы было выполнено неравенство: $\min_{i \in \{i\}} (\bar{y}_i^{(\nu)} + \lambda y_i / \bar{x}_i^{(\nu)} + \lambda x_i) \geqslant \alpha^{(\nu)}$. Такое λ существует, поскольку $\min_i (y_i / x_i) > \alpha^{(\nu)}$. Легко видеть, что $(X^{(\nu)}, Y^{(\nu)}) \in Z$ является процессом, определяющим вместе с вектором цен $p^{(\nu)}$ и $\alpha^{(\nu)}$ состояние равновесия модели M.

Для завершения доказательства необходимо показать, что никаких других значений α, кроме $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\nu^{(k)})}$, дающих состояние равновесия, быть не может. Из леммы заключаем, что множество номеров продуктов $\{i\}$ разбивается на k непересекающихся подмножеств $\{i\}^j$, соответствующих числам $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\nu^{(k)})}$. Именно, $i_0 \in \{i\}^j$, $j = 1, \ldots, k$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $(X, Y) \in Z$, у которого $y_{i_0} > 0$, то $\alpha^{(\nu(j))} - \min_i (y_i/x_i) \leqslant \varepsilon$. Предположим теперь, что существует $\hat{\alpha}$, отличное от $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\nu^{(k)})}$, а также некоторые $(\hat{X}, \hat{Y})$ и $\hat{p}$, дающие состояние равновесия модели M. Пусть $\hat{i}$ — номер продукта, на котором достигается $\min_i \hat{y}_i/\hat{x}_i = \hat{\alpha}$. Номер $\hat{i}$ принадлежит некоторому $\{i\}^j$. Неравенство $\alpha^{(\nu(j))} < \hat{\alpha}$ не может иметь места, так как по теореме 1 Гейла (см. [1]) о существовании состояния равновесия $\alpha^{(\nu(j))} = \max_{(X, Y) \in Z^{(\nu(j))}} \min_i (y_i/x_i)$. Неравенство $\alpha^{(\nu(j))} > \hat{\alpha}$ означает, что соотношение $Y\hat{p} - X\hat{\alpha}\hat{p} \leqslant 0$ не выполняется. Таким образом, теорема доказана.

6. Процесс $(X, Y) \in Z$ называется *экстремальным*, если не существует процессов $(X^{(1)}, Y^{(1)})$ и $(X^{(2)}, Y^{(2)}) \in Z$ таких, что $(X, Y) = \lambda(X^{(1)}, Y^{(1)}) + (1 - \lambda)(X^{(2)}, Y^{(2)})$, $0 < \lambda < 1$.

Следствие. *Число состояний равновесия в произвольной модели $M \leqslant \min(n, m)$, где m число ее экстремальных процессов* (обобщение результата работы [4]).

7. *Определение:* $\beta_\mu = \min_p \max_{(X, Y) \in Z} (Yp / Xp)$, где p произвольный вектор цен.

Теорема 2. $\beta_M = \min_{\mu=1,\ldots,\nu^{(k)}} \alpha^{(\mu)} = \alpha^{(\nu^{(k)})}$.

Доказательство. Неравенство $\alpha^{(\nu^{(k)})} < \beta_M$ невозможно, так как $Yp^{(\nu^{(k)})}/Xp^{(\nu^{(k)})} \leqslant \alpha^{(\nu^{(k)})}$ для всех $(X, Y) \in Z$ по определению состояния равновесия. Неравенство $\beta_M < \alpha^{(\nu^{(k)})}$ также невозможно, ибо на основании леммы существует процесс $(X, Y) \in Z$, $Y > 0$, $\alpha^{(\nu^{(k)})} - \min_i (Y_i/X_i) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, на этом процессе $\alpha^{(\nu^{(k)})} - Yp/Xp \leqslant \varepsilon$ для любого вектора цен p.

Теорема 2 является обобщением результата из [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл. Замкнутая линейная модель производства. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. В. Л. Макаров. Асимптотика решений линейных динамических моделей с дискретным временем. Докл. АН СССР (в печати).
3. J. Kemeny, O. Morgenstern, G. Thompson. A generalization of the von Neumann model of an expanding economy. Econometrica, 1956, v. 24, No 2.
4. Дж. Томпсон. О решении одной задачи теории игр. В сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
5. В. Л. Макаров. Об условии равновесия в модели Неймана. Сиб. Мат. ж., 1962, № 3.

Поступила в редакцию
27 IV 1965