ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 ТОМ I, вып. 5

АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Ю. Ю. ФИНКЕЛЬШТЕЙН

(МОСКВА)

Идея «метода отсечения» впервые появилась в работе Данцига, Фулкерсона и Джонсона [1], посвященной задаче коммивояжера (более подробное изложение дано в работе тех же авторов [2]). Первый алгоритм, реализующий «метод отсечения» для задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) общего вида, предложен Гомори [3] (обзор различных модификаций метода Гомори дан в [4]; см. также [5]).

В данной работе предлагается существенно иной алгоритм для решения смешанной задачи ЦЛП с целочисленными переменными, принимающими значения 0 и 1 *. Доказана конечность алгоритма и даны оценки сверху для числа итераций. Дан пример класса задач, для которых верхняя оценка числа итераций существенно меньше объема полного перебора (теорема 5).

Предлагаемый нами алгоритм для решения задач ЦЛП с булевыми переменными (сокращенно B-алгоритм) использует идею «метода отсечения», однако мы даем новое правило построения дополнительного линейного отграничения (ДЛО). B-алгоритм решает не непосредственно исходную задачу ЦЛП, а некоторое число получаемых из нее «канонических» задач ЦЛП (задачи E_t). Число решаемых «канонических» задач оценивается и в широком классе случаев оказывается небольшим. Решение задачи ЦЛП, получаемое при помощи B-алгоритма — приближенное (с любой наперед заданной точностью). В важном частном случае, когда в целевую функцию входят с ненулевыми коэффициентами только целочисленные переменные (и эти коэффициенты рациональны), B-алгоритм позволяет получить точное решение.

В методе Гомори ДЛО строилось в виде

$$\eta \equiv \sum_{j\in N} \gamma_j x_j - \gamma_0 \geqslant 0, \tag{1}$$

где N — множество небазисных переменных, соответствующее данному этапу решения задачи ЦЛП, а коэффициенты γ_j $(j \in N)$ и γ_0 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\gamma_j \geqslant 0 \quad \text{для} \quad j \in N, \qquad \sum_{j\in N} \gamma_j > 0, \qquad \gamma_0 > 0. \tag{2}$$

Предлагаемый нами способ построения ДЛО существенно использует специфику задачи ЦЛП с булевыми переменными **.

* Известно (см. [6]), что к задаче ЦЛП с булевыми целочисленными переменными может быть сведена любая задача ЦЛП, для которой множество допустимых решений соответствующей задачи ЛП ограничено. Однако при таком сведении может существенно увеличиться количество переменных.

** «Булевы» задачи ЦЛП рассматривались также в работах [7, 8], в которых дан подход, отличный от «метода отсечения».

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу ЦЛП с булевыми переменными:

$$f(x) \equiv \sum_{j=1}^{N} c_j x_j \to \max, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{4а}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1, \quad m_1 + 2, \ldots, m_1 + m_2, \tag{4б}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{5}$$

$$x_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1, \tag{6}$$

$$x_j \text{ — целое}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1. \tag{7}$$

Кроме того, нам понадобятся еще неотрицательные переменные, дополняющие до равенств неравенства (4а):

$$x_{N+i} = b_i - \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1. \tag{4в}$$

Здесь $N = n_1 + n_2, n_1 > 0, n_2 \geqslant 0$.

Пусть:

1) выбрано $\varepsilon > 0$;
2) $\tilde{x}$ — оптимальное решение задачи (3) — (7);
3) $\bar{x}$ — допустимое решение задачи (3) — (7);
4) $f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) < \varepsilon$.

Тогда $\bar{x}$ назовем ε-оптимальным решением задачи (3) — (7).

В дальнейшем мы будем искать именно ε-оптимальное решение задачи (3) — (7), предполагая, что заранее выбрано число ε-граница допустимого отклонения от оптимума.

Замечание 1. Пусть:

1) $c_j = 0, n_1 + 1 \leqslant j \leqslant N$;
2) c_j рациональны, $1 \leqslant j \leqslant n_1$.

Тогда найдется число q (q — общее наименьшее кратное знаменателей несократимых дробей $p_j / q_j = c_j$, $1 \leqslant j \leqslant n_1$), что если $\varepsilon_q = q^{-1}$, то ε_q — оптимальное решение задачи (3) — (7) будет оптимальным решением задачи (3) — (7).

«КАНОНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ»

Введем некоторые обозначения. Множество точек $x \equiv (x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющих условиям (4) — (6), обозначим через G, а множество точек x, удовлетворяющих условиям (4) — (7) — через $G^{\text{ц}}$. Далее:

$$G(t) = \{x | x \in G; \quad f(x) \geqslant t\}, \tag{8а}$$

$$G^{\text{ц}}(t) = \{x | x \in G^{\text{ц}}; \ f(x) \geqslant t\}. \tag{8б}$$

Будем называть «канонической» следующую задачу E_t: указать некоторое $x \equiv x(t) \in G^{\text{ц}}(t)$, или доказать, что множество $G^{\text{ц}}(t)$ пусто.

В дальнейшем мы будем считать, что целевая функция $f(x)$ ограничена на множестве G.

Обозначим:

$$m = \min_{x \in G} f(x), \tag{9а}$$

$$m^{ц} =]m[, \tag{9б}$$

где $]m[$ — наименьшее целое число, не меньшее m.

$$M = \max_{x \in G} f(x) \tag{10а}$$

$$M^{ц} = [M], \tag{10б}$$

где $[M]$ — наибольшее целое число, не превышающее M.

Теорема 1. *Для того чтобы найти* ε-*оптимальное решение задачи* (3)—(7), *достаточно вычислить* m, M *и решить не более чем* $\max\{1, (2 + [\log_2 \left(\frac{M-m}{\varepsilon}\right)]\}$ *задач типа* E_t*. Доказательство. Если $M - m < \varepsilon$, то очевидно, что любое решение задачи E_m будет ε-оптимальным решением задачи (3)—(7), и теорема 1 доказана.

Пусть $M - m \geqslant \varepsilon$. Будем последовательно решать задачи E_{t_k}, $k = 1, 2, \ldots$ Числа t_k и векторы $\bar{x}^k$ определим (рекуррентно) следующим образом:

$$t_0 = M^*, \tag{11}$$

$$t_1 = m^*, \tag{12а}$$

$$\bar{x}^1 = x(t_1). \tag{12б}$$

Если $\bar{x}^1$ не существует, т. е. задача E_{t_1} не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача (3)—(7). Если $\bar{x}^1$ существует и $f(\bar{x}^1) > M - \varepsilon$, то ясно, что $\bar{x}^1$ — ε-оптимальное решение исходной задачи (3) — (7). Допустим, что $\bar{x}^1$ существует и что $f(\bar{x}^1) \leqslant M - \varepsilon$. Пусть уже найдены $(t_k;\ \bar{x}^k)$ при $k = 1, \ldots, p$, $p \geqslant 1$. Тогда $(t_{p+1};\ \bar{x}^{p+1})$ найдем следующим образом:

$$t_{p+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Big(f(\bar{x}^p) + \min\limits_{\substack{k<p \\ t_k > f(\bar{x}^p)}} t_k\Big), & \text{если} \min\limits_{\substack{k<p \\ t_k \geqslant f(\bar{x}^p)}} t_k - f(\bar{x}^p) \geqslant \varepsilon, \\ t_{p+1} \text{ — не определено}, & \text{если} \min\limits_{\substack{k<p \\ t_k \geqslant f(\bar{x}^p)}} t_k - f(\bar{x}^p) < \varepsilon, \end{cases} \tag{13а}$$

$$\bar{x}^{p+1} = \begin{cases} x(t_{p+1}), & \text{если задача } E_{t_{p+1}} \text{ имеет решение,} \\ \bar{x}^p, & \text{если } t_{p+1} \text{ определено, но задача } E_{t_{p+1}} \text{ не имеет решения,} \\ \bar{x}^{p+1} \text{ — не определено,} & \text{если } t_{p+1} \text{ не определено.} \end{cases} \tag{13б}$$

Для доказательства теоремы 1 докажем существование такого l, что:
а) $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^l$ — определены, $\bar{x}^{l+1}$ — не определено;
б) $\bar{x}^l$ — ε-оптимальное решение исходной задачи (3) — (7);
в) $l \leqslant 2 + [\log_2 (\Delta / \varepsilon)]$, (14)
где $\Delta = M - m$. (15)

Пусть $\bar{x}^p$ — определено и $\tilde{x}$ — оптимальное решение задачи (3) — (7).

* Если $c_j = 0$, $n_1 + 1 \leqslant j \leqslant N$ и все c_j — целые ($j = 1, 2, \ldots, n_1$), то можно заменить M на $M^{ц}$ и m на $m^{ц}$.

Тогда

$$f(\tilde{x}) \in [f(\bar{x}^p),\ \delta_p], \tag{16}$$

где $\delta_p = \min\limits_{\substack{k<p\\ t_k \geqslant f(\bar{x}^p)}} t_k$. (17)

Действительно, если $\delta_p = t_0$, то формула (16) очевидна. Ясно, что $\delta_p > t_1$. Допустим, что: а) $\delta_p = t_r$, $2 \leqslant r < p$, б) $f(\tilde{x}) > \delta_p$. Но тогда получаем, что $f(\bar{x}^r) \geqslant t_r = \delta_p > f(\bar{x}^p)$, $r < p$, а это невозможно. Формулы (16) и (17) доказаны.

Обозначим

$$\Delta_p = \delta_p - f(\bar{x}^p) \tag{18}$$

($p \geqslant 1$, $\bar{x}^p$ — определено) и покажем, что

$$\Delta_p \leqslant \Delta / 2^{p-1}. \tag{19}$$

Действительно, из (11), (12) и (15) следует, что

$$\Delta_1 \leqslant \Delta, \tag{20}$$

т. е. что (19) верно при $p = 1$.

Из (13) получаем, что если $\bar{x}^\nu$ и $\bar{x}^{\nu+1}$ определены, то

$$\Delta_{\nu+1} \leqslant \Delta_\nu / 2. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует (19).

Определим натуральное l' из условия

$$\Delta / 2^{l'-1} < \varepsilon \leqslant \Delta / 2^{l'-2}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$l' = 2 + [\log_2 (\Delta / \varepsilon)]. \tag{23}$$

Из (16), (17), (18), (19), (22) и (23) следует существование такого l, что верны утверждения а), б), в), сформулированные выше. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение (см. например, [9], стр. 167):

Определение. Пусть $y \equiv (y_1, \ldots, y_t)$ — вектор из t-мерного эвклидова пространства R^t. Назовем y лексикографически положительным и обозначим это $y \succ 0$, если $y \neq (0, \ldots, 0)$ и первая (по номеру) ненулевая координата y положительна.

Назовем y лексикографически неотрицательным и обозначим это $y \succcurlyeq 0$, если имеет место одна из двух возможностей: 1) $y = (0, \ldots, 0)$. 2) $y \succ 0$.

Далее, полагаем $y \succ z$, если $y - z \succ 0$ и $y \succcurlyeq z$, если $y - z \succcurlyeq 0$.

Легко показать, что отношение $\succ$ обладает свойством транзитивности. Пользуясь отношением $\succ$, можно лексикографически упорядочить все векторы из R^t.

Чтобы применить аппарат линейного программирования для решения задачи E_t, лексикографически упорядочим точки $(x_1, \ldots, x_{n_1})$ и будем искать точку $(x_1, \ldots, x_N)$, для которой:

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n1}) \to \max{}^*, \tag{24}$$

$$x \equiv (x_1, \ldots, x_N) \in G^{ц}(t). \tag{25}$$

---

* Имеется в виду лексикографическая максимизация вектора $(x_1, \ldots, x_{n_1})$ (т. е. максимизация функции $\sum\limits_{j=1} \eta^{j-1} x_j$, где η — произвольно малый положительный параметр).

Разумеется, целевая функция задачи (24), (25) зависит от выбора нумерации целочисленных переменных *.

Замечание 2. Отметим, что для нас существенна именно форма целевой функции (24), а структура множества ограничений $G^{ц}(t)$ совершенно безразлична — предлагаемый нами ниже алгоритм приспособлен для максимизации целевой функции (24) на любом множестве, заданном при помощи соотношений типа (4) — (7).

В-АЛГОРИТМ

Опишем теперь В-алгоритм, позволяющий решать задачу максимизации целевой функции $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$ на множестве, задаваемом соотношениями типа (4) — (7) и, в частности, задачу E_t в форме (24), (25). При построении алгоритма мы используем общую схему, предложенную Гомори [3], но применяем другое правило построения ДЛО. Напомним общую схему «метода отсечения» для решения задач ЦЛП (изложение будем вести применительно к задаче (24), (25)).

0-я итерация. Найти $\max\limits_{x \in G(t)} (x_1, \ldots, x_{n_1}) \equiv (x_1{}^0, \ldots, x_{n_1}{}^0)$. Если множество $G(t)$ пусто, то пусто и $G^{ц}(t)$, т. е. задача (24), (25) не имеет решения.

Если $x^0 \equiv (x_1{}^0, \ldots, x_N{}^0) \in G^{ц}(t)$, то x^0 — решение задачи (24), (25).

Если $G(t)$ непусто и $x^0 \overline{\in} G^{ц}(t)$, то переходим к 1-й итерации.

Для описания k-й итерации ($k \geqslant 1$) нам понадобятся следующие обозначения:

а) g_r — дополнительное линейное ограничение — неравенство (ДЛО), вводимое на r-й итерации, $r \geqslant 1$;

б) η_r — неотрицательная переменная, дополняющая до равенства неравенство g_r, $r \geqslant 1$;

в) $\bar{g}_r$ — множество точек $x \equiv (x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющих ДЛО g_r;

г) N_r — множество небазисных переменных, получаемое после окончания r-й итерации, $r \geqslant 0$.

k-я итерация ($k \geqslant 1$). Строим дополнительное ограничение g_k (обладающее тем свойством, что $x^{k-1} \overline{\in} g_k$).

Полагаем

$$G_k(t) = \begin{cases} G(t) \cap \bar{g}_1, & \text{если } k = 1, \\ (G(t) \cap \bar{g}_k) \cap \Bigl(\bigcap\limits_{\substack{r=1 \\ \eta_r \in N_{k-1}}}^{k-1} \bar{g}_r \Bigr), & \text{если } k \geqslant 2, \end{cases} \qquad (26)$$

и формулируем следующую задачу.

Найти

$$\max_{x \in G_k(t)} (x_1, \ldots, x_{n_1}) \equiv (\overset{k}{x_1}, \ldots, \overset{k}{x_{n_1}}). \qquad (27)$$

Если множество $G_k(t)$ пусто, то задача (24), (25) не имеет решения.

Если $x^k \equiv (\overset{k}{x_1}, \ldots, \overset{k}{x_N}) \in G^{ц}(t)$, то x^k — решение задачи (24), (25).

Если $G_k(t)$ непусто и $x^k \overline{\in} G^{ц}(t)$, то переходим к $(k+1)$-й итерации.

---

* Нумерация переменных для нас безразлична, за исключением того случая, когда существует такое k ($1 \leqslant k \leqslant n_1$), что $\operatorname{sign} |c_j| = \delta_{kj}$ ($j = 1, \ldots, N$). В этом случае надо так перенумеровать неизвестные, чтобы в (25) x_k попал на первое место. Тогда при $t = m$ решение задачи (24), (25) будет одновременно решением задачи (3)—(7).

Сформулируем теперь правило построения дополнительного линейного ограничения g_k (на k-й итерации, $k \geqslant 1$).

Пусть $G_{k-1}(t)$ непусто, $x^{k-1} \bar{\in} G^{ц}(t)$ и $x^{k-1}_{\alpha_{k-1}}$ — первая (по номеру) нецелая компонента x^{k-1},

$$1 \leqslant \alpha_{k-1} \leqslant n_1. \tag{28}$$

Тогда дополнительное линейное ограничение g_k строим в следующей форме:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{k-1}}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}-1} [(1-x_j)\operatorname{sign} x_j^{k-1} + x_j \operatorname{sign}(1-x_j^{k-1})] + (1-x_{\alpha_{k-1}}) \geqslant 1, \tag{29а}$$

или, что то же самое

$$\eta_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{k-1}}) - 1, \tag{29б}$$

где $\eta_k \geqslant 0$. (29в)

Очевидно, что

$$\varphi_k(x_1^{k-1}, \ldots, x_{\alpha_{k-1}}^{k-1}) < 1, \tag{30а}$$

т. е.

$$x^{k-1} \in g_k. \tag{30б}$$

Алгоритм (для решения задачи ЦЛП с булевыми целочисленными переменными и целевой функцией типа (24)), построенный по приведенной выше схеме и использующий правило построения ДЛО (29), мы и назовем В-алгоритмом.

Теорема 2. *В-алгоритм решает задачу лексикографической максимизации* $(x_1, \ldots, x_{n_1})$ *на множестве, задаваемом соотношениями типа* (4) — (7), *и притом за конечное число итераций.*

Замечание 3. Для удобства дальнейшего изложения мы будем доказывать теорему 2 для задачи (24), (25), что не уменьшает общности рассуждений, так как мы не используем каких-либо специальных свойств множества $G^{ц}(t)$. Это относится и к теоремам 3—5. Доказательство теоремы 2 будет проведено в несколько этапов.

Лемма 1. *Пусть после* $(l-1)$*-й итерации В-алгоритма получен вектор* $x^{l-1} \equiv (x_1^{l-1}, \ldots, x_N^{l-1}) \bar{\in} G^{ц}(t)$ (причем $x^{l-1}_{\alpha_{l-1}}$ — первая нецелая компонента x^{l-1}, $1 \leqslant \alpha_{l-1} \leqslant n_1$ — см. (28)).

Рассмотрим множество R_l, состоящее из всевозможных векторов $x \equiv (x_1, \ldots, x_N)$, удовлетворяющих двум условиям: 1) $x \in G(t)$; 2) x_t — целое, при $t < \alpha_{l-1}$.

Для того чтобы вектор x, *входящий в* R_l, *удовлетворял условию*

$$x \bar{\in} \bar{g}_l{}^{*}, \tag{31}$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее соотношение:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{l-1}-1}, x_{\alpha_{l-1}}) = (x_1^{l-1}, x_2^{l-1}, \ldots, x^{l-1}_{\alpha_{l-1}-1}, \gamma), \tag{32}$$

где $\gamma > 0$. (33)

Доказательство. Достаточность. Пусть (32) и (33) верны. Докажем, что $x \bar{\in} \bar{g}_l$.

---

* Т. е. x не удовлетворяет ДЛО g_l.

По условию $x_1^{l-1}, \ldots, x_{\alpha_{l-1}-1}^{l-1}$ — целые числа, а в силу (5) и (6) все они равны 0 или 1.

Следовательно,

$$(1 - x_j^{l-1}) \operatorname{sign} x_j^{l-1} + x_j^{l-1} \operatorname{sign} (1 - x_j^{l-1}) = 0 \tag{34}$$

при $j < \alpha_{l-1}$.

Из (33) и (34) следует, что

$$\varphi_l(x_1^{l-1}, \ldots, x_{\alpha_{l-1}-1}^{l-1}, \gamma) = (1 - \gamma) < 1. \tag{35}$$

Из (29ᵃ), (32) и (35) получаем: $x \overline{\in} \bar{g}_l$.

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть условия (32), (33) не выполнены. Докажем, что $x \in \bar{g}_l$.

Сначала допустим, что не выполнено условие (33), т. е. что

$$x_{\alpha_{l-1}} = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi_l(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{l-1}}) \geqslant (1 - x_{\alpha_{l-1}}) = 1, \tag{36}$$

т. е. (см. (29)) $x \in \bar{g}_l$, и необходимость доказана.

Теперь предположим, что не выполнено условие (32). Тогда существует такое r, $1 \leqslant r \leqslant \alpha_{l-1} - 1$, что

$$x_r \neq x_r^{l-1}. \tag{37}$$

Так как x_r и x_r^{l-1} — целые, принимающие значения 0 и 1, то $x_r = (1 - x_r^{l-1})$, откуда получаем:

$$\varphi_l(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{l-1}}) \geqslant (1 - x_r) \operatorname{sign} x_r^{l-1} + x_r \operatorname{sign} (1 - x_r^{l-1}) =$$

$$= x_r^{l-1} \operatorname{sign} x_r^{l-1} + (1 - x_r^{l-1}) \operatorname{sing} (1 - x_r^{l-1}) = 1,$$

т. е. (см. 29ᵃ) $x \in \bar{g}_l$, и необходимость доказана. Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. *Если* $\tilde{x} \equiv (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N)$ — *решение задачи* (24), (25) *и* $G_k(t)$ — *определено, то*

$$\tilde{x} \in G_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots * \tag{38}$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 0$ лемма 2 верна, так как $\tilde{x} \in G(t) = G_0(t)$.

Допустим, что лемма верна для $k \leqslant l - 1$ и докажем ее для $k = l$. Иначе говоря, допустим, что $\tilde{x} \in G_{l-1}(t)$, и докажем, что $\tilde{x} \in \bar{g}_l$.

Предположим, что

$$\tilde{x} \overline{\in} \bar{g}_l. \tag{39}$$

Вектор $\tilde{x}$ удовлетворяет условиям леммы 1, причем $x_1, \ldots, x_{n_1}$ — целые. Поэтому из (39) и леммы 1 получаем:

$$(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\alpha_{l-1}-1}, \tilde{x}_{\alpha_{l-1}}) = (x_1^{l-1}, \ldots, x_{\alpha_{l-1}-1}^{l-1}, 1). \tag{40}$$

* Через $G_0(t)$ мы обозначим $G(t)$.

Так как по условию $x^{l-1}_{\alpha_{l-1}}$ — нецелое, т. е. $0 < x^{l-1}_{\alpha_{l-1}} < 1$, то из (40) следует, что

$$(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n_1}) \succ (x_1^{l-1}, \ldots, x_{n_1}^{l-1}). \tag{41}$$

Согласно индукционному предположению имеем:

$$\tilde{x} \in G_{l-1}(t), \tag{42}$$

а по определению вектора x^{l-1} (см. (27))

$$\max_{x \in G_{l-1}(t)} (x_1, \ldots, x_{n_1}) \equiv (x_1^{l-1}, \ldots, x_{n_1}^{l-1}). \tag{43}$$

Сравнивая (41), (42) и (43), получаем противоречие. Следовательно, формула (39) неверна и тем самым лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если x^k и x^{k+1} — определены, то*

$$(x_1^{k+1}, \ldots, x_{\alpha_k}^{k+1}) \prec (x_1^k, \ldots, x_{\alpha_k}^k).$$

Доказательство. Согласно ($30^б$) имеем

$$x^{t-1} \bar{\in} \bar{g}_t, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{44}$$

Из (44) следует, что

$$\eta_k \in N_k. \tag{45}$$

Из (26), (27) и (45) получаем

$$x^{k+1} \in \bar{g}_k. \tag{46}$$

Непосредственно из (26) получаем

$$x^k \in g_k. \tag{47}$$

Обозначим

$$S_k(t) \equiv G(t) \cap \Big(\bigcap_{\substack{r=1 \\ \eta_r \in N_k}}^{k} \bar{g}_r \Big). \tag{48}$$

Нетрудно видеть, что

$$(x_1^k, \ldots, x_{n_1}^k) \equiv \max_{x \in G_k(t)} (x_1, \ldots, x_{n_1}) = \max_{x \in S_k(t)} (x_1, \ldots, x_{n_1}). \tag{49}$$

Это непосредственно следует из определения N_r. С другой стороны, из (26) и (49) получаем

$$G_{k+1}(t) = \bar{g}_{k+1} \cap S_k(t). \tag{50}$$

Из (26), (27), (44), (46), (49) и (50) следует, что

$$(x_1^{k+1}, \ldots, x_{n_1}^{k+1}) \prec (x_1^k, \ldots, x_{n_1}^k), \tag{51}$$

а из (51) получаем

$$(x_1^{k+1}, \ldots, x_{\alpha_k}^{k+1}) \preccurlyeq (x_1^k, \ldots, x_{\alpha_k}^k). \tag{52}$$

Допустим теперь, что в (52) имеет место равенство:

$$(x_1^{k+1}, \ldots, x_{\alpha_k}^{k+1}) = (x_1^k, \ldots, x_{\alpha_k}^k). \tag{53}$$

Тогда, применяя лемму 1 при $l = k + 1$, получаем

$$x^{k+1} \in \bar{g}_k. \tag{54}$$

Сравнивая (46) и (54), приходим к противоречию. Следовательно, (53) неверно и из (52) получаем

$$(x_1^{k+1}, \ldots, x_{\alpha_k}^{k+1}) \prec (x_1^k, \ldots, x_{\alpha_k}^k).$$

Лемма 3 доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 2 следует, что если решение задачи (24), (25) существует, то оно удовлетворяет всем вводимым нами ДЛО g_k. Поэтому остается доказать лишь конечность алгоритма.

Заметим, что переменная η_k однозначно определяется соответствующим ДЛО g_k (см. (29а), (29б). Вспомним, что N_k — множество небазисных переменных, получаемое после окончания k-й итерации. Очевидно, что

$$N_k \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+m_1}; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\}. \tag{55}$$

Общее количество переменных, входящих в N_k, при любом k равно

$$\pi(N_k) = N - m_2, \tag{56}$$

где N — количество основных переменных задачи (24), (25), равное количеству уравнений задачи (3) — (7), а m_2 — количество уравнений задачи (24) — (25), равное количеству уравнений задачи (3) — (7).

Нетрудно видеть, что (для данного n_1) число разных неравенств, имеющих форму (29а), конечно, т. е. равно некоторому числу D. Отсюда следует, что всевозможных ДЛО g_k, вводимых согласно (29а), может быть не более, чем D. А так как каждому ДЛО g_k однозначно соответствует переменная η_k, то и всевозможных переменных η_k может быть не более, чем D.

Мы приходим к выводу, что число возможных наборов небазисных переменных конечно и не превышает $C_{D+N+m_1}^{N-m_2}$.

Допустим теперь, что количество итераций (не считая нулевой итерации) превысит $C_{D+N+m_1}^{N-m_2}$. Тогда найдутся такие целые числа r и s, что

$$0 \leqslant r < s, \tag{57}$$

$$N_r = N_s. \tag{58}$$

Из (57) и (51) следует, что

$$(\overset{s}{x}_1, \ldots, \overset{s}{x}_{n_1}) \prec (\overset{r}{x}_1, \ldots, \overset{r}{x}_{n_1}), \tag{59}$$

а из (58) получаем

$$(\overset{s}{x}_1, \ldots, \overset{s}{x}_{n_1}) = (\overset{r}{x}_1, \ldots, \overset{r}{x}_{n_1}). \tag{60}$$

Сравнивая (59) и (60), приходим к противоречию; следовательно, количество итераций не может превысить $C_{D+N+m_1}^{N-m_2}$

Теорема 2 полностью доказана.

ОЦЕНКИ ДЛЯ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Теорема 3. *Пусть при помощи* B-*алгоритма решается задача лексикографической максимизации* $(x_1, \ldots, x_{n_1})$ *на множестве, задаваемом соотношениями типа* (4) — (7). *Тогда для числа итераций* I (с учетом нулевой итерации) *имеет место следующая оценка:* $I \leqslant 2^{n_1}$.

Доказательство теоремы 3 будет проведено в несколько этапов.

Лемма 4. *Для разных итераций соответствующие им ДЛО различны, т. е. если $r \neq s$, то $g_r \neq g_s$.*

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$(x_1^{r+1}, \ldots, x_{\alpha_r}^{r+1}) \preccurlyeq (x_1^r, \ldots, x_{\alpha_r-1}^r, 0).$$

Допустим, не нарушая общности, что $r < s$ и $g_r = g_s$.

Тогда получим: 1) $\alpha_r = \alpha_s$; 2) $x_j^r = x_j^s$, $j = 1, 2, \ldots, (\alpha_r - 1)$, 3) $0 < x_{\alpha_r}^s < 1$.

Следовательно, $(x_1^s, \ldots, x_{\alpha_r}^s) \preccurlyeq (x_1^r, \ldots, x_{\alpha_r-1}^r\ 0)$, а так как $s \geqslant r + 1$, то с учетом (51) получаем:

$$(x_1^{r+1}, \ldots, x_{\alpha_r}^{r+1}) \succ (x_1^r, \ldots, x_{\alpha_r-1}^r, 0).$$

Мы пришли к противоречию. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ — упорядоченный набор из нулей и единиц,* $1 \leqslant t \leqslant n_1$, $\gamma_t = 1$,

$$\varphi'_{\gamma_1, \ldots, \gamma_t}(x_1, \ldots, x_t) \equiv \sum_{j=1}^{t} [(1 - x_j) \operatorname{sign} \gamma_j + x_j \operatorname{sign} (1 - \gamma_j)], \tag{61}$$

и пусть F — число различных линейных форм $\varphi_{\gamma, \ldots \gamma t}(x_1, \ldots, x_t)$. Тогда $F = 2^{n_1} - 1$.

Доказательство. Ясно, что F равно числу всевозможных упорядоченных наборов $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $1 \leqslant t \leqslant n_1$; 2) $\gamma_t = 1$; 3) $\gamma_k = \{\begin{smallmatrix} 0 \\ \text{или} \\ 1 \end{smallmatrix}$ (при $k < t$).

Отсюда получаем, что $F = \sum\limits_{t=1}^{n_1} 2^{t-1} = 2^{n_1} - 1$. Лемма 5 доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Пусть I' — количество итераций (без учета нулевой итерации), т. е. $I' = I - 1$. Допустим, что $I > 2^{n_1}$, т. е. что

$$I' \geqslant 2^{n_1}. \tag{62}$$

Пусть g_k — дополнительное линейное ограничение, введенное на k-й итерации и $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{k-1}})$ — соответствующая линейная форма (см. (29[а]) и (29[б])). Если применить обозначения леммы 5, положив: 1) $t = t(k) = \alpha_{k-1}$; 2) $\gamma_j = x_j^{k-i}$, $j = 1, 2, \ldots, t(k) - 1$; 3) $\gamma_{t(k)} = 1$, то мы получим

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{k-1}}) = \varphi'_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{t(k)}}(x_1, x_2, \ldots, x_{t(k)}). \tag{63}$$

Из (62), (63) и леммы 5 следует, что найдутся такие r и s $(r < s)$, что

$$\varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{r-1}}) = \varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{s-1}}), \tag{64а}$$

или, что то же самое

$$g_r = g_s. \tag{64б}$$

Но (64[б]) противоречат лемме 4. Мы пришли к противоречию, следовательно, $I \leqslant 2^{n_1}$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть при помощи В-алгоритма решается задача лексикографической максимизации $(x_1, \ldots, x_{n1})$ на множестве, задаваемом соотношениями типа (4) — (7).*

Предположим, что множество индексов $H = \{j \mid j = 1, 2, \ldots, n_1\}$ может быть разбито на непересекающиеся множества H_r, $r = 1, 2, \ldots, (v + w)$, обладающие следующими свойствами:

$$\text{а)} \quad \sum_{j \in H_r} x_j = 1, \qquad r = 1, 2, \ldots, v; \tag{65}$$

$$\text{б)} \quad \sum_{j \in H_r} x_j \leqslant 1, \qquad r = v + 1, \ldots, v + w; \tag{66}$$

в) если $H_r = \{j_{r,1}, \ldots, j_{rh_r}\}$, $r = 1, 2, \ldots, (v + w)$, то $j_{rs} = j_{r1} + (s - 1)$, $s = 1, 2, \ldots, h_r$, $r = 1, 2, \ldots, (v + w)$.

Тогда число итераций I (с учетом нулевой итерации) *оценивается следующим образом*

$$I \leqslant \Big[\prod_{r=1}^{v} h_r\Big]\Big[\prod_{r=v+1}^{v+w} (h_r + 1)\Big],$$

где h_r — количество различных индексов j, входящих в множество H_r.

Доказательство. Теорема 4 доказывается по тому же плану, что и теорема 3. Мы поясним единственный пункт доказательства, в котором учитывается отличие условий теорем 4 и 3.

Не нарушая общности, можно считать, что если $r < t$, то $j_{rk} < j_{ts}$ при любых k и s, $1 \leqslant k \leqslant h_r$, $1 \leqslant s \leqslant h_t$.

Тогда получаем, что $H_r = \{k_r + 1,\ k_r + 2, \ldots, k_r + h_r\}$, где

$$k_r = \begin{cases} 0 & (\text{при } r = 1), \\ \sum\limits_{s=1}^{r-1} h_s & (\text{при } r \geqslant 2). \end{cases} \tag{67}$$

Тогда доказательство леммы, аналогичной лемме 5, сведется к подсчету L — числа всевозможных упорядоченных наборов из нулей и единиц $(\gamma_1, \ldots, \gamma_t)$, $1 \leqslant t \leqslant n_1$, обладающих следующими свойствами: 1) $\gamma_t = 1$; 2) может быть построен такой набор неотрицательных чисел $(x_1, \ldots, x_{n1})$, удовлетворяющих условиям (65), (66), что x_t — нецелое и $(x_1, \ldots, x_{t-1}) = (\gamma_1, \ldots, (\gamma_{t-1}))$.

Нетрудно видеть, что

$$L = (h_1 - 1) + h_1(h_2 - 1) + h_1h_2(h_3 - 1) + \ldots + h_1h_2 \ldots h_{v-1}(h_v - 1) + \\ + \Big[\prod_{r=1}^{v} h_r\Big] [h_{v+1} + (h_{v+1} + 1) h_{v+2} + \ldots + (h_{v+1} + 1) \ldots (h_{v+w-1} + 1) h_{v+w}]. \tag{68}$$

Пусть

$$h'_r = \begin{cases} h_r, & 1 \leqslant r \leqslant v \\ h_r + 1, & v + 1 \leqslant r \leqslant v + w. \end{cases} \tag{69}$$

Тогда

$$L = (h'_1 - 1) + (h'_2 - 1) h'_1 + (h'_3 - 1) h'_1 h'_2 + \ldots + (h'_{v+w} - 1) \times \\ \times \prod_{r=1}^{v+w-1} h'_r = h'_1 + h'_1 h'_2 + \ldots + \prod_{r=1}^{v+w} h'_r - \Big(1 + h'_1 - h'_1 h'_2 + \ldots \\ \ldots + \prod_{r=1}^{v+w-1} h'_r\Big) = \prod_{r=1}^{v+w} h'_r - 1,$$

откуда (с учетом (69)), получаем

$$L=\left[\prod_{r=1}^{v} h_r\right]\left[\prod_{r=v+1}^{v+w}(h_r+1)\right]-1. \tag{70}$$

Замечание 4. Если $w=0$, то оказывается интересной структура дополнительных ограничений g_l^*. Не нарушая общности, будем считать, что выполняется (67). Если $\alpha_{l-1}\leqslant k_2$, то очевидно, в силу структуры дополнительного ограничения $\varphi_l(x_1,\ldots,x_{\alpha_{l-1}})\geqslant 1$, оно содержит только переменные $x_j\in H_1$.

Пусть $k_t+1\leqslant \alpha_{l-1}\leqslant k_t+h_t,\ t\geqslant 2.$ (71)

Тогда среди чисел $x_{k_r+1}^{l-1},\ldots,x_{k_r+h_r}^{l-1}$ $(1\leqslant r\leqslant t-1)$ все нули, кроме одного, равного 1. Мы можем это записать следующим образом:

$$x_{k_r+p}^{l-1}=\begin{cases}1, & \text{если}\quad p=p(r)\\ 0, & \text{если}\quad p\neq p(r)\end{cases}\left(\begin{matrix}1\leqslant p\leqslant h_r\\ 1\leqslant r\leqslant t-1\end{matrix}\right). \tag{72}$$

Из (72) и (65) получаем $(1\leqslant r\leqslant t-1)$

$$\sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r}[(1-x_j)\operatorname{sign}x_j^{l-1}+x_j\operatorname{sign}(1-x_j^{l-1})]=$$

$$=(1-x_{k_r+p(r)})+\sum_{\substack{j=k_r+1\\ j\neq k_r+p(r)}}^{k_r+h_r}x_j=(1-x_{k_r+p(r)})-x_{k_r+p(r)}+\sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r}x_j=2-2x_{k_r+p(r)},$$

$$\sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r}[(1-x_j)\operatorname{sign}x_j^{l-1}+x_j\operatorname{sign}(1-x_j^{l-1})]=2-2x_{k_r+p(r)},\quad 1\leqslant r\leqslant t-1. \tag{73}$$

Далее,

$$x_{k_t+p}^{l-1}=0,\quad 1\leqslant p\leqslant(\alpha_{l-1}-1-k_t). \tag{74}$$

Из (73) и (74) получаем

$$\varphi_l(x_1,x_2,\ldots,x_{\alpha_{l-1}})\equiv\sum_{j=1}^{\alpha_{l-1}-1}[(1-x_j)\operatorname{sign}x_j^{l-1}+x_j\operatorname{sign}(1-x_j^{l-1})]+$$

$$+(1-x_{\alpha_{l-1}})=\sum_{r=1}^{t-1}\sum_{j=k_r+1}^{k_r+h_r}[(1-x_j)\operatorname{sign}x_j^{l-1}+x_j\operatorname{sign}(1-x_j^{l-1})]+$$

$$+\sum_{j=k_t+1}^{\alpha_{l-1}-1}[(1-x_j)\operatorname{sign}x_j^{l-1}+x_j\operatorname{sign}(1-x_j^{l-1})]+(1-x_{\alpha_{l-1}})=$$

$$=\sum_{r=1}^{t-1}(2-2x_{k_r+p(r)})+\sum_{j=k_t+1}^{\alpha_{l-1}-1}x_j+(1-x_{\alpha_{l-1}}),$$

---

* Любая задача ЦЛП может быть сведена к задаче типа (3)—(7) (см. [6]), требуется лишь, чтобы множество допустимых решений соответствующей задачи линейного (нецелочисленного) программирования было ограниченным. Если в полученной после сведения задаче типа (3)—(7) соответствующим образом перенумеровать переменные, то будут выполняться условия теоремы 4 при $w=0$.

т. е. дополнительное ограничение имеет следующий вид:

$$\varphi_l(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_{l-1}}) \equiv \sum_{r=1}^{t-1} (2 - 2x_{k_r+p(r)}) + \sum_{j=k_t+1}^{\alpha_{l-1}-1} x_j + (1 - x_{\alpha_{l-1}}) \geqslant 1. \qquad (75)$$

Итак, если $\alpha_{l-1} \in H_t$, то ДЛО g_l может быть выражено через переменных [illegible] $r = 1, \ldots, (t-1)$ (по одной переменной из каждого из множеств H_r, $r = 1, \ldots, (t-1)$), а также через переменные x_{k_t+p}, $p = 1, \ldots, (\alpha_{l-1} - k_t)$.

Теорема 5. *Пусть при помощи В-алгоритма решается задача лексикографической максимизации* $(x_1, \ldots, x_{n1})$ *на множестве, задаваемом соотношениями* (4)—(7).

Предположим, что: 1) множество $G^{ц}$ не пусто, 2) существует натуральное $k (1 \leqslant k \leqslant n_1 - 1)$, обладающее следующим свойством: если $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N) \in G$ и $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_1}) \succ \max\limits_{x \in G^{ц}} (x_1, \ldots, x_{n_1})$, то среди чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ есть нецелое.

Тогда для числа итераций I (с учетом нулевой итерации) *имеет место следующая оценка:* $I \leqslant 2^k$.

Доказательство теоремы 5 проводится, в основном, по тому же плану, что и доказательство теоремы 3.

ОБСУЖДЕНИЕ

Для задач целочисленного линейного программирования (3)—(7) с булевыми переменными $x_1, \ldots x_{n1}$ (и нецелочисленными переменными $x_{n1+1}, \ldots, x_N$, последних может и не быть) объем полного перебора естественно оценивать величиной 2^{n_1}. В случае полностью целочисленной задачи речь идет о вычислении значения целевой функции и проверке выполнения условий (4) для 2^{n_1} наборов переменных $x_1, \ldots, x_{n1}$. Для частично целочисленной задачи перебор будет заключатся в решении 2^{n_1} задач линейного программирования с переменными $x_{n_1+1}, \ldots, x_N$.

Оценка 2^{n_1} может быть снижена до $\left[\prod\limits_{r=1}^{v} h_r\right]\left[\prod\limits_{r=v+1}^{v+w} (h_r + 1)\right]$, если множество индексов $H = \{j \mid j = 1, 2, \ldots, n_1\}$ может быть разбито на непересекающиеся подмножества H_r, $r = 1, 2, \ldots, (v + w)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\sum\limits_{j \in H_r} x_j = 1, \quad r = 1, 2, \ldots, v,$

2) $\sum\limits_{j \in H_r} x_j \leqslant 1, \quad r = v + 1, v + 2, \ldots, v + w.$

Для каждой из «канонических» задач E_t (задачи типа (24), (25)) в качестве оценки полного перебора можно принять ту же величину, что и для задачи (3) — (7).

Принимая во внимание эти оценки для объема полного перебора, обсудим полученные нами результаты.

Теорема 1 оценивает число K «канонических» задач (24), (25), решение которых дает возможность получить ε-оптимальное решение задачи (3)—(7). В широком классе случаев это число невелико.

В теореме 2 доказывается конечность предложенного алгоритма (для задач типа (24)—(25), т. е. задач с целевой функцией специального вида).

Теоремы 3 и 4 показывают, что при решении предложенным алгоритмом задач типа E_t((24), (25)) число итераций во всяком случае не превышает принятых выше оценок для полного перебора.

Для задачи (3) — (7) в качестве оценки продолжительности решения можно принять оценку для суммарного числа итераций — по всем задачам E_t, которые нужно решить, чтобы получить решение (3) — (7).

Тогда для задачи (3) — (7) получаем оценку $(2+[\log_2(\frac{M-m}{\varepsilon})])P$, где P — оценка для задачи (24), (25), равная соответственно 2^{n_1} или

$$\Big[\prod_{r=1}^{v} h_r\Big]\Big[\prod_{r=v+1}^{v+w}(h_r+1)\Big].$$

В широком классе случаев (при не слишком большом $(M-m)$ и не слишком малом ε) оценка для задачи (3) — (7) оказывается несущественно хуже, чем для задачи типа E_t ((24), (25)).

Нам неизвестны какие-либо теоретические оценки для количества итераций при применении алгоритма Гомори. Результаты же машинных экспериментов позволяют лишь заключить, что число итераций может быть весьма большим, зачастую настолько большим, что решение задачи не доводилось до конца (см., например, [10]).

Поэтому теоремы 3 и 4, по-видимому, представляют некоторый интерес, хотя даваемые ими оценки совпадают с оценками для полного перебора.

Имеются основания предполагать, что в целом ряде случаев количество итераций будет значительно меньше оценок сверху, даваемых теоремами 3 и 4. Разумеется, тут весьма многое зависит от специфических свойств той или иной задачи.

Теорема 5 подводит более твердую базу под эти прогнозы. Она позволяет выделить целые классы T_k задач, для которых число итераций не превышает 2^k, т. е. при достаточно малом k оказывается существенно меньше, чем оценка для полного перебора 2^{n_1}.

Разумеется, только машинный эксперимент позволит оценить практическую эффективность предложенного нами алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, S. Johnson. Solution of a Large-Scale Traveling-salesman Problem. Operat. 1954, v. 2, N 3, p. 393—410.
2. G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, S. M. Johnson. On a Linear Programming Combinatorial Approach to the Traveling-Salesman Problem. Operat. Res., 1959, v, 7, N 1, p. 58—66.
3. R. E. Gomory. Outline of an Algorithm for Integer Solution to Linear Programs., Bull. Amer. Math. Soc., 1958, v. 64, N 5, p. 275—278.
4. A. Ben-Israel, A. Charnes. On Some Problems of Diophantine Programming. Cahiers du Centre d'études de Recherche Opérationnelle, 1962, v. 4, N 4, p. 215—288.
5. G. T. Martin. An Accelerated Euclidean Algorithm for Integer Linear Programming., Recent Advances in Math. Program., N.-Y., 1963.
6. G. B. Dantzig. Discrete-variable Extremun Problems. Operat. Res. 1957, v. 5, N 2, p. 266—277.
7. R. Faure, Y. Malgrange. Une Méthode Booleienne pour la résolution des Programmes Linéaires en Nombres Entiers. Gestion 1963, v. 6, p. 250—260.
8. A. Le Garff, Y. Malgrange. Résolution des Programmes Linéaires à Valeurs Entières par une Méthode Booleienne «Compacte». «Actes 3-e Conf. Internat. Rech. Opérationnelle. Oslo 1963», Paris — London, 1964, p. 695—701.
9. Д. Гейл. Теория линейных экономических моделей (пер. с англ.). М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. F. Genuys. Application de la Programmation Lineaire en Nombres Entiers a un problems de Decoupe. «Inform. Process., 1962, Amsterdam, N. Holland Publ., 1963, p. 195—197.

Поступила в редакцию
22 III 1965