

ЗАДАЧА ОТЫСКАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ

К. В. КИМ

(МОСКВА)

В планировании автомобильного транспорта имеет место так называемая задача маршрутизации или задача порожнего пробега. В отличие от классической транспортной задачи план перевозок предполагается заданным. Результаты решения задачи влияют только на работу транспорта и не нарушают отношений между потребителями и поставщиками. Это способствует эффективному внедрению решения в практику.

Итак, даны пункты погрузки P_i и пункты разгрузки R_j . Заданы расстояния от всех пунктов R_j до всех пунктов P_i , которые обозначим через C_{ji} . Задан некоторый план перевозок в виде совокупности $G = \{i_k, j_k, b_k, r_k\}$ $k \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, где i_k — номер пункта погрузки, j_k — номер пункта разгрузки, b_k — объем перевозки, r_k — расстояние перевозки. Некоторую совокупность $N_s = \{k_1, \dots, k_{m_s}\}$ будем называть m_s -звенным маршрутом, если все элементы N_s различны и различны значения всех i_k для $k \in N_s$ и всех j_k для $k \in N_s$ различны. Более подробно маршрут можно изобразить в виде набора $\{i_{k_1}, j_{k_1}, i_{k_2}, j_{k_2}, \dots, i_{k_m}, j_{k_m}\}$. Условимся называть пару (i_{k_t}, j_{k_t}) t -м груженым звеном, пару $(j_{k_t}, i_{k_{t+1}})$ — t -м порожним звеном и пару (j_{k_m}, i_{k_1}) — m -м порожним звеном. Обозначим через $c_t^{(s)}$ длину t -го порожнего звена, через d_s — длину порожнего пробега на маршруте N_s . Естественно, что $d_s = \sum_{t=1}^{m_s} c_t^{(s)}$. Обозначим через M множество всех возможных маршрутов. Каждому маршруту N_s можно поставить в соответствие столбец

$$A_{k_s} = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{ks} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \notin N_s, \\ 1, & \text{если } k \in N_s. \end{cases}$$

Обозначим через y_s поток на маршруте N_s . Задача сокращения порожнего пробега сводится к задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min \sum_s d_s y_s, \quad y_s \geq 0, \\ \sum_s a_{ks} y_s = b_k, \quad k \in N_s, \quad N_s \in M. \end{aligned} \quad (1)$$

Если маршруты не связаны дополнительными ограничениями, эту задачу можно решать следующим образом. По плану G можно определить h_i — объемы груза, вывозимого из пунктов P_i , и q_j — объемы груза, ввозимого в пункты R_j . Значения h_i задают потребности в порожняке в пунктах P_i , значения q_j задают ресурсы порожняка в пунктах R_j . Далее решается

транспортная задача $\min \sum C_{ji}x_{ji}, x_{ji} \geq 0, \sum_i x_{ji} = q_j, \sum_j x_{ji} = h_i$. Отыскивается оптимальный план движения транспорта без груза $\{x_{ji}\}$. Затем по планам G и $\{x_{ji}\}$ непосредственным подбором строятся кольцевые маршруты и определяются потоки на этих маршрутах [1]. Такие расчеты проводились на машинах «БЭСМ-2» и «УРАЛ-2». Однако во многих случаях результаты не находили широкого практического применения. Это происходило потому, что в действительности существуют довольно жесткие ограничения на маршруты. Наиболее существенные из них можно выразить в виде неравенств:

$$\begin{aligned} 1) & m_s \leq l, \\ 2) & D^{(s)} \leq L(m_s), \\ 3) & \gamma^{(s)} \leq \delta(m_s), \end{aligned} \quad (2)$$

где $D^{(s)}$ — длина маршрута; $\gamma^{(s)}$ — отношение порожнего пробега к груженому; $L(m_s)$, $\delta(m_s)$ — некоторые функции от m_s ; l — константа. Множество маршрутов, удовлетворяющих ограничениям (2), обозначим через $\bar{M}$. Обычно некоторая часть маршрутов, построенных на основе плана $\{x_{ji}\}$, не удовлетворяет условиям (2). Возникает необходимость непосредственно решать задачу:

$$\min \sum_s d_s y_s, \quad y_s \geq 0, \quad (3)$$

$$\sum_s a_{hs} y_s = b_h, \quad k \in N, \quad N_s \in \bar{M}.$$

Основная трудность решения этой задачи состоит в том, что множество $\bar{M}$ очень велико. В реальных задачах количество маршрутов, входящих в $\bar{M}$, может достигать нескольких десятков и даже сотен тысяч.

Иногда ограничения (2) бывают очень жесткими. Это облегчает задачу. Так, например, если число звеньев в маршрутах не должно превышать двух, то $\bar{M}$ получается небольшим и его легко можно построить. Для решения таких задач С. Пановым и И. Бернштейном разработана программа на «БЭСМ-2». Множество $\bar{M}$ строится путем перебора всех комбинаций по два груженных звена. Для каждой комбинации проверяются неравенства 2 и 3 системы ограничений (2). Так как в этом случае среди элементов любого столбца A_s может быть не более двух единиц, задача (3) сводится к транспортной и для ее решения применен специальный алгоритм.

Однако такой способ нельзя применить, если l принимает большие значения. Для того чтобы построить множество $\bar{M}$ в случае $l = 5$ и $n = 100$, придется проверить более 100.000.000 комбинаций. Ниже предлагается способ решения задачи (3), который в какой-то степени преодолевает указанные трудности. Метод основан на том факте, что из всего множества M огромное большинство маршрутов наверняка не войдет в оптимальный план. Предлагается осуществлять некоторый направленный поиск наиболее реальных кандидатов в оптимальный план.

Будем решать задачу (3) методом последовательного улучшения плана с использованием обратной матрицы. В качестве исходного базиса можно взять совокупность однозвенных маршрутов $(i_h j_h)$. В процессе решения задачи будем хранить информацию об опорном плане и исходную информацию, т. е. G и $\{C_{ji}\}$.

Пусть имеется некоторый опорный план и известны значения двойственных переменных u_h . Каждое u_h соответствует некоторому груженому

звену (i_k, j_k) . Естественно рассматривать величину u_k как затраты, приходящиеся в данном плане на перевозку единицы груза по звену (i_k, j_k) . Затраты эти выражены в единицах порожнего пробега. Для некоторого маршрута N_s , входящего в опорный план, справедливо равенство

$$\sum_{k \in N_s} u_k = d_s, \text{ т. е. затраты на маршруте равны порожнему пробегу.}$$

Если для некоторого внебазисного маршрута выполняется неравенство $z_s - d_s > 0$, где $z_s = \sum_{k \in N_s} u_k$, то маршрут N_s следует ввести в базис.

Практически удобно использовать условие $\rho_s(\lambda) = z_s - \lambda d_s > 0$, где $\lambda \geq 1$, причем вначале λ выбирается достаточно большим, а далее уменьшается.

Обозначим затраты на t -м груженом звене s -го маршрута через $u_t^{(s)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_s(\lambda) &= z_s - \lambda d_s = \sum_{t=1}^{m_s} u_t^{(s)} - \lambda \sum_{t=1}^{m_s} c_t^{(s)} = \sum_{t=1}^{m_s} (u_t^{(s)} - \lambda c_t^{(s)}) = \\ &= u_1^{(s)} - \lambda c_1^{(s)} + u_2^{(s)} - \lambda c_2^{(s)} + \dots + u_{m_s}^{(s)} - \lambda c_{m_s}^{(s)}. \end{aligned}$$

Обозначим $u_1^{(s)}$ через α_1 , $-\lambda c_1^{(s)}$ через α_2 и т. д. Тогда

$$\rho_s(\lambda) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p, \quad p = 2m_s.$$

Величину $\rho_s(\lambda)$ можно интерпретировать как сумму оценок на некотором контуре (рис. 1).

Докажем следующую теорему. Если для некоторого маршрута справедливо неравенство $\rho_s(\lambda) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p > 0$, то можно изменить нумерацию звеньев циклически таким образом, что неравенство $Q_l = \sum_{i=1}^l \alpha_i > 0$ будет справедливо для любого $l \leq p$. Предположим, что при данной нумерации существуют такие l , что $Q_l \leq 0$.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= \min_l Q_l. \\ Q_k &< Q_l \text{ для } k < l, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Причем

т. е. среди равных минимальных элементов мы выбираем элемент с наибольшим номером.

В качестве первого звена в новой нумерации возьмем $k+1$ -е звено. Через $\bar{\alpha}_i$ и $\bar{Q}_l$ обозначим соответствующие значения в новой нумерации. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \alpha_{k+1}, \dots, \bar{\alpha}_{p-k} = \alpha_p, \bar{\alpha}_{p-k+1} = \alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_p = \alpha_k, \\ \bar{Q}_1 &= Q_{k+1} - Q_k, \dots, \bar{Q}_{p-k+1} = Q_1 + Q_p - Q_k, \dots, \bar{Q}_p = Q_p. \end{aligned}$$

В силу (4) $Q > 0$ для любого $l \leq p$.

Исходную информацию нашей задачи можно представить в виде графа, вершинами которого являются пункты P_i и R_j . Из каждого пункта R_j выходят дуги во все пункты P_i с оценками $-\lambda c_{ji}$. Из пунктов P_i в пункты R_j ведут дуги $(i_k j_k)$ с оценками u_k . Зафиксируем некоторый пункт P_i . Будем рассматривать всевозможные пути, выходящие из этого пункта. Обозначим через $\alpha_t^{(s)}$ оценку t -го звена s -го пути.

Будем обрывать путь, если он приводит в некоторую вершину второй раз, либо число звеньев пути достигло максимального допустимого числа звеньев маршрута, либо длина пути достигла максимальной допустимой длины, либо нарушается условие $\sum \alpha l^{(s)} > 0$. Если некоторый путь приведет нас в исходный пункт P_{i_1} , то мы получаем маршрут, для которого $\rho_s(\lambda) > 0$. Если для полученного маршрута выполняется неравенство $\gamma^{(s)} \leq \delta(m_s)$, то маршрут следует ввести в план. Если ни один путь, выходящий из пункта P_{i_1} , не приводит нас снова в этот пункт, то фиксируем некоторый следующий пункт P_{i_2} и т. д.

В силу доказанной теоремы, если существует хотя бы один маршрут, принадлежащий $\bar{M}$, для которого $\rho_s(\lambda) > 0$, то мы найдем его при помощи описанной процедуры. Если таких маршрутов нет, то уменьшаем значения λ и продолжаем процесс до тех пор, пока значение λ не станет достаточно близким к единице.

По идеям описанного алгоритма построены программы на машины «Урал-2» и «Стрела-3м», которые успешно используются для решения оперативных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Геронимус. Математические методы оперативного планирования грузовых автомобильных перевозок. М., Автотрансиздат, 1963.

Поступила в редакцию
13 IV 1965