ЭКОНОМИКА 1965
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том I, вып. 6

# О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА НА ПЕРСПЕКТИВУ В ОТРАСЛЕВОМ И ТЕРРИТОРИАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ

В. А. МАШ

*(МОСКВА)*

## 1. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время остро ощущается необходимость в оптимизации плана развития народного хозяйства, пусть даже весьма приближенной. Полученный план должен: а) дать некоторое общее представление о возможностях и направлениях развития общественного производства на ограниченный перспективный период, б) определить систему народнохозяйственных оценок на важнейшие ресурсы и продукты.

Такой план вначале должен быть укрупненным из-за отсутствия исчерпывающей ясности в отдельных вопросах экономической теории развития планового социалистического хозяйства, недостаточности информации, ограниченных вычислительных возможностей.

При построении приближенного оптимального плана основное внимание следует уделить:

а) составлению принципиально правильной, но достаточно простой модели развития экономики;

б) выбору принципиально правильного, хотя, возможно, и не безукоризненного строгого критерия оптимальности развития экономики;

в) возможности подбора необходимой исходной информации — пусть даже при широком использовании экспертных оценок и других приближенных показателей;

г) разработке приближенных, более эффективных алгоритмов решения больших специальных задач математического программирования.

Для развивающегося общества критерием оптимальности развития можно считать максимизацию получаемых благ. В качестве конкретной интерпретации этой общей формулировки мы принимаем максимизацию личного и общественного потребления населения при удовлетворении других непроизводственных потребностей и потребностей на осуществление процесса расширенного воспроизводства.

При построении модели развития народного хозяйства можно полагать достаточной статическую постановку, если состояние отдельных звеньев народного хозяйства до и после рассматриваемого момента времени, т. е. в каждый из моментов планового и послепланового периода (длительность которого определяется сроком последующего строительства предприятий любой отрасли), описывается некоторым динамическим законом развития, характером которого мы задаемся, а параметры определяем в процессе решения задачи. Такими законами могут быть экспоненциальное развитие, линейное развитие и т. д. По-видимому, для укрупненных моделей предположение о сглаженности динамического развития вполне правомерно и оправдано. Подобная постановка задачи не только позволяет установить объем капитального строительства, необходимый для развития экономики в послеплановом периоде с сохранением определившихся для планового периода темпов, но и устраняет необходимость в соизмерении затрат и результатов во времени, что, как известно, является одной из труднейших проблем планирования. Оценка фактора времени возникает в результате решения, а не устанавливается априорно.

Итак, предлагается следующая формулировка задачи оптимального развития народного хозяйства: требуется найти такой наивысший уровень личного и общественного потребления населения страны в конечный момент планового периода, при котором возможно удовлетворить другие непроизводственные потребности, текущие потребности производства и потребности капитального строительства, необходимого для сохранения в послеплановом периоде характера и темпов развития народного хозяйства, складывающихся в плановом периоде.

Отметим еще некоторые детали предлагаемой модели:

а) модель является натуральной, причем матрица технологических способов прямоугольна, а народное хозяйство рассматривается по отдельным укрупненным территориальным комплексам (районам);

б) для изучаемого момента времени проверяется достаточность ресурсов каждого из продуктов на покрытие потребностей производства, создания основных фондов, потребления населения и других непроизводственных потребностей, что позволяет отказаться, в частности, от установления лимита капиталовложений;

в) физический износ средств труда при простейшей постановке задачи учитывается с помощью дифференциации нормативов затрат продуктов на ремонт для существующих и вновь создаваемых основных фондов;

г) в необходимых случаях (ограниченность природных ресурсов и т. д.) объемы производства для отдельных отраслевых и территориальных звеньев народного хозяйства ограничены сверху;

д) для каждого из районов учитываются ограниченность трудовых ресурсов и их изменение в результате возможной экономически стимулируемой миграции (желательные размеры которой ограничены и определяются в процессе решения);

е) для каждого из районов устанавливается минимально допустимый средний доход на душу населения;

ж) внешняя торговля рассматривается как система каналов дополнительного межотраслевого обмена продуктов для улучшения плана, причем эти каналы характеризуются ограниченной пропускной способностью, соответствующей возможностям экспорта и импорта, и коэффициентами обмена, зависящими от соотношений экспортных и импортных цен;

з) каждый уровень личного и общественного потребления характеризуется матрицей потребления продуктов одной семьей для разных групп среднего ее дохода, причем показатели потребления корректируются с учетом средней численности семьи на одного работающего и районных различий структуры потребления.

Для решения возникающей специальной задачи математического программирования будет использован приближенный итерационный алгоритм, основанный на сочетании сетевой распределительной задачи с методом последовательных приближений, при котором значительная часть оптимизационных операций заменяется операциями матричной алгебры. Посредством этого алгоритма, позволяющего существенно увеличить размеры решаемых задач, определяется наличие допустимых планов для каждого из поочередно рассматриваемых уровней потребления. План, соответствующий самому высокому уровню потребления, для которого допустимый план еще существует, есть решение задачи. Алгоритм в данной статье не рассматривается.

## 2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Рассматривается народное хозяйство, вырабатывающее $m$ продуктов и расположенное в $p$ территориально разобщенных «районных пунктах», в каждом из которых считается сосредоточенной экономика некоторого $r$-го района $(r = 1, 2, \ldots, p)$. Эти пункты лежат на комплексной сети важнейших видов транспорта. Представим эту сеть в виде связного графа $\Gamma = (V, U)$, состоящего из множества $V$ вершин $V^r$ $(r = 1, 2, \ldots, v;$ $v \geqslant p + M$, где $M$ — число стран, с которыми ведется внешняя торговля, см. в конце настоящего раздела) и множества $U$ дуг $u^{rs}(V^r, V^s \in V)$, причем число дуг равно $u$. «Районные» пункты также есть элементы $V^r$ множества $V$, для которых $r = 1, 2, \ldots, p$. Множество $U$ разбито на $p$ непересекающихся «районных» подмножеств $U^r$ $(r = 1, 2, \ldots, p)$. Кроме того, в этом же множестве $U$ выделим $2v$ подмножеств дуг, выходящих из $r$-х вершин и входящих в $r$-е вершины, или $U^{r+} = \bigcup_s u^{rs}$ и $U^{r-} = \bigcup_s u^{sr}$, причем $U^{r+} \cap U^{r-} = \varnothing$ $(r = 1, 2, \ldots, v)$.

В народном хозяйстве имеется множество $\tilde{S}$ технологических способов $\tilde{S}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \tilde{m};\ \tilde{m} \geqslant m)$, причем для простоты описания общей многоотраслевой модели будем считать, что:

а) во всех $p$ районах $i$-й продукт однороден, т. е. обладает одинаковыми потребительскими свойствами;

б) при любом способе $\tilde{S}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \tilde{m})$ вырабатывается только один из $m$ продуктов.

Тогда множество $\tilde{S}$ можно разбить на $m$ непересекающихся непустых подмножеств $S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ по признаку вырабатываемых продуктов; подмножество $S_i$ будем называть $i$-й отраслью, так что отрасль включает один или более технологических способов.

По существу в модели (и в алгоритме решения) легко могут быть предусмотрены комбинированные способы производства нескольких продуктов, неоднородность продуктов и т. д. Соответствующие изменения модели и алгоритма здесь не описываются.

Пусть в $m$ продуктов входит $m_1$ транспортабельных продуктов $(i = 1, 2, \ldots, m_1)$ и $(m - m_1)$ нетранспортабельных продуктов $(i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m)$. Выбраны единицы измерения всех $m$ продуктов, причем для транспортабельных продуктов они соответствуют (также для простоты описания) количеству продукта, вмещающемуся в заданное число подвижных транспортных средств,— например, в тысячу стандартных вагонов; будем называть такую единицу измерения «транспортной единицей».

Деятельность народного хозяйства рассматривается в последнем году планового периода, длительность которого $T_0$ лет.

На начало планового периода имеются действующие «исходные предприятия» $\tilde{m}$ способов в $p$ районах; их годовые производственные мощности (измеренные по выпуску продукта, соответствующего этому способу) определяются матрицей $M = \| M_j^r \|_{\tilde{m},\ p}$.

Верхние пределы возможного объема производства по $j$-му способу в $r$-м районе в любом из лет планового периода заданы матрицей $B = \| B_j^r \|_{\tilde{m},\ p}$. Эти верхние пределы могут быть обусловлены разведанными запасами природных ископаемых, заделом и возможностями проектных организаций, ограниченностью отдельных видов ресурсов, существующими возможностями строительных организаций и сроками строительства новых предприятий (в сопоставлении с длительностью планового периода $T_0$), и т. д. Если по отдельным отраслям и районам ограничений сверху не имеется, соответствующие $B_j^r$ принимаются равными достаточно большому числу.

Для увеличения на единицу производственной мощности $j$-го способа в $r$-м районе требуется затратить $w^r_{ij}$ единиц $i$-го продукта. Таким образом, межотраслевые затраты $m$ продуктов на создание единичных производственных мощностей $\tilde{m}$ способов в $p$ районах характеризуются матрицей $W = \| w^r_{ij} \|_{m, \tilde{m}, p}$. Сроки строительства (лет) предприятий $\tilde{m}$ способов (без дифференциации по районам) представлены вектором $T = \| T_j \|_{1, \tilde{m}}$. Соответственно, матрицы $\Delta_j = \| \delta_{ijt} \|_{m, T}$ $(j = 1, 2, \ldots, \tilde{m})$ показывают одинаковое для всех районов распределение затрат $w^r_{ij}$ по $T_j$-м годам строительства, такое, что $\sum\limits_{t=1}^{T_j} \delta_{ijt} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, \tilde{m})$.

Прямые (эксплуатационные) межотраслевые затраты $i$-го продукта на единичный объем производства $j$-го способа в $r$-м районе определены матрицей $A = \| a^r_{ij} \|_{m, \tilde{m}, p}$. При этом ремонт основных фондов (как текущий, так и капитальный) в матрице $A$ не учтен. В первом приближении примем, что разница в изношенности основных фондов действующих и вновь строящихся предприятий достаточно хорошо учитывается дифференциацией нормативов ремонта; поэтому среднегодовые затраты $i$-х продуктов на ремонт единичной мощности предприятий $j$-го способа в $r$-м районе для этих двух групп соответственно определяются матрицами $\Phi = \| \varphi^r_{ij} \|_{m, \tilde{m}, p}$ и $\Psi = \| \psi^r_{ij} \|_{m, \tilde{m}, p}$, причем $\varphi^r_{ij} \geqslant \psi^r_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, \tilde{m}; r = 1, 2, \ldots, p)$.

Трудоемкость (человеко-лет) единичного объема производства по $j$-му способу в $r$-м районе определена матрицей $\Lambda = \| \lambda_j \|_{\tilde{m}, p}$.

Наконец, межотраслевые нормативы оборотных фондов или запасов (в натуральном выражении) $i$-го продукта на единичный объем производства в будущем году по $j$-му способу в $r$-м районе заданы матрицей $Q = \| q^r_{ij} \|_{m, \tilde{m}, p}$; при этом считается, что имеющиеся оборотные фонды по состоянию на начало любого года соответствуют объему производства этого года, так что в течение года они должны быть изменены с учетом прироста (или уменьшения) объема производства в будущем году.

Для дуг транспортной сети заданы аналогичные показатели. Прежде всего, задано $l$ типовых значений пропускной способности дуг $u^{rs} \in U$ («транспортных единиц» в год), соответствующих различным условиям работы и уровням технической вооруженности транспортной магистрали и определенных вектором $B^* = \| B_h \|_{1, l}$ (для простоты описания эти и последующие данные о транспортной сети представлены так, как если бы имелся всего лишь один вид транспорта; при наличии же разных видов транспорта выделяются подмножества дуг, для каждого из которых задается аналогичный комплекс исходных данных). Пропускные способности транспортных магистралей на начало планового периода определены вектором $M^* = \| M^{rs} \|_{1, u}$. Затраты $i$-х продуктов на единичное увеличение пропускной способности дуги в пределах полуинтервалов $(B_{h-1}, B_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, l;\ B_0 = 0)$ заданы матрицей $W^* = \| w_{ih} \|_{m, l, n}$, срок строительства транспортной магистрали при росте пропускной способности от $M^{rs}$ до $B_h$ — матрицей $T^* = \| T^{rs}_h \|_{u, l}$, а распределение затрат $w^{rs}_{ih}$ по $T^{rs}_h$ годам строительства — матрицей $\Delta^* = \| \delta^{rs}_{ith} \|_{mT^{rs}_h, l, u}$. Далее, прямые (эксплуатационные) затраты $i$-х продуктов на перевозку «транспортной единицы» по дуге $u^{rs} \in U$ при объеме перевозок на этой дуге в пределах полуинтервала $(B_{h-1}, B_h]$ $(h = 1, 2, \ldots, l)$, исчисленные с учетом возврата порожняка для $m_1$ транспортабельных продуктов, определены матрицей

$A^* = \| a_{ih}^{rs} \|_{m,l,u}$, а трудоемкость перевозки при тех же условиях — матрицей $\Lambda^* = \| \lambda_h^{rs} \|_{l,u}$. В отличие от предприятий $\widetilde{m}$ производственных способов в настоящей модели предполагается условие обязательного сохранения основных фондов транспорта; поэтому для существующих транспортных магистралей можно все затраты по перевозкам в пределах пропускных способностей $M^{rs}$ не зависящие от размеров движения, не включать в матрицы $A^*$ и $\Lambda^*$, учитывая их как элементы прочих непроизводственных потребностей $r$-х районов. Что же касается перевозок, не входящих в $M^{rs}$, то для них в матрицах $A^*$ и $\Lambda^*$ учитываются все затраты, как зависящие, так и не зависящие от размера движения (в том числе и затраты на ремонт). Наконец, матрица $Q^* = \| q_i^{rs} \|_{m,u}$ характеризует нормативы оборотных фондов $i$-го продукта на перевозку «транспортной единицы» по дуге $u^{rs} \in U$ при тех же условиях пополнения оборотных фондов, что и для производственных предприятий (см. выше).

Как видно из приведенного перечня исходных данных, в модели предполагается линейная зависимость затрат от размеров производства для производственных звеньев, и кусочно-линейная зависимость — для транспорта. Допустимость линейной зависимости для производства в укрупненных моделях объясняется в [1, стр. 55]. Что же касается усложнения модели для транспорта, то такой учет затрат на повышение пропускной способности транспортных магистралей — единственный способ избежать чрезмерного увеличения объема перевозок в оптимальном плане задачи, так как текущие затраты на перевозку относительно невелики.

Ожидаемая численность трудоспособного населения $r$-х районов (человек) на начало $T_0$-го года планового периода без учета возможной миграции задана вектором $L = \| L^r \|_{1,p}$. Общая численность населения на начало планового периода и ожидаемая общая численность населения (без учета миграции) на начало $T_0$-го года заданы соответственно векторами $\bar{L}_0 = \| \bar{L}_0^r \|_{1,p}$ и $\bar{L} = \| \bar{L}^r \|_{1,p}$. Возможности межрайонной миграции трудоспособного населения до этого года характеризуются вектором $\theta = \| \vartheta^r \|_{1,p}$, где $\vartheta^r$ — ограничение на численность трудоспособных лиц, выезжающих из $r$-го района (для простоты описания здесь не рассматривается случай аналогичных ограничений для групп районов). Задана также матрица экономического стимулирования миграции $\Omega = \| \omega_i^r \|_{m,p}$, где $\omega_i^r$ — дополнительный (по сравнению с расходом местного населения) годовой расход $i$-го продукта на одного работающего, прибывшего в $r$-й район в порядке миграции в составе семьи средней численности.

Предусмотрено $n$ уровней заработной платы $\gamma_\nu$ (рублей, без учета доплат ввиду миграции), и распределение работающих на предприятиях $j$-го способа $r$-го района по $\nu$-м уровням заработной платы ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) определено матрицей $\Xi = \| \xi_{j\nu}^r \|_{\widetilde{m}+2,n,p}$; понятно, что $\sum_{\nu=1}^{n} \xi_{j\nu}{}^r = 1$ ($j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m}+2$; $r = 1, 2, \ldots, p$). Здесь $(\widetilde{m}+1)$-й способ — транспорт, а $(\widetilde{m}+2)$-й способ — работа для нужд управления. Численность работающих для нужд управления определена вектором $\widetilde{D} = \| D^r \|_{1,p}$. Минимально допустимый средний денежный доход на душу населения в $r$-х районах (также без доплат ввиду миграции) задан вектором $\Pi = \| \pi^r \|_{1,p}$.

Спрос на $i$-е продукты в $r$-х районах для удовлетворения прочих непроизводственных потребностей задан матрицей $D = \| D_i \|_{m,p}$.

Предусмотрено $\sigma$ уровней личного и общественного потребления населения; каждый из этих уровней $\alpha$ характеризуется матрицей $F_\alpha = \| f_{\alpha i \nu \beta_{\text{ср}}} \|_{m,n}$, где $f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}$ — потребление (при уровне $\alpha$) $i$-го продукта работающим, относящимся к $\nu$-му уровню заработной платы и входящим в состав семьи со средним количеством членов семьи на одного работающего $\beta_{\text{ср}}$. Если же $i$-й продукт относится к продуктам длительного пользования (жилье и т. д.), то $f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}$ — показатель не годового потребления, а необходимого (при уровне $\alpha$) наличия на конец года $i$-го продукта на одного работающего при аналогичных условиях.

Влияние на структуру потребления районных различий и различий в размере семьи соответственно задается при помощи матриц поправочных коэффициентов $\mathrm{P} = \|\rho_i^r\|_{m;\,p}$ и $\mathrm{H} = \|\eta_{i\beta}\|_{m,\,b}$, где $\rho_i^r = f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}^r : f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}$ ($f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}^r$ — показатель для $r$-го района, по своему содержанию аналогичный $f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}$ для народного хозяйства в целом), а $\eta_{i\beta} = f_{\alpha i\nu\beta} : f_{\alpha i\nu\beta_{\text{ср}}}$, где $\beta$ — количество членов семьи на одного работающего, а $b$ — предусмотренное число значений $\beta$.

Наконец, матрица $G = \| G_i^r \|_{m,\,p}$ характеризует остаток на начало планового периода продуктов длительного пользования. В рассматриваемом варианте модели для простоты будем считать, что в течение планового периода эти продукты не выходят из эксплуатации из-за физического износа (отказ от этого допущения приводит к несущественным усложнениям). Тогда ожидаемый остаток на начало $T_0$-го года продуктов длительного пользования, поступивших к потребителям в предплановом периоде, также определяется матрицей $G$. Понятно, что в этой матрице строки продуктов краткосрочного пользования содержат только нулевые элементы.

При рассмотрении внешней торговли выделяются $M$ стран (или групп стран), а для каждой из стран или групп — вершина гра́фа Г, через которую осуществляется ввоз и вывоз; для определенности положим, что для $\mu$-й страны такой вершиной является $V^{p+\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, M)$. Условия внешней торговли для $T_0$-го года планового периода описываются матрицами экспортных и импортных цен на $i$-е продукты (в валютных рублях) $\mathrm{E}^+ = \|\varepsilon_i^{\mu+}\|_{m,\,M}$ и $\mathrm{E}^- = \|\varepsilon_i^{\mu-}\|_{m,\,M}$, а также матрицами ограничений на емкость рынка $\mu$-й страны для $i$-го продукта и аналогичными экспортными ресурсами продуктов в $\mu$-й стране — соответственно, $I^+ = \|i_i^{\mu+}\|_{m,\,M}$ и $I^- = \|i_i^{\mu-}\|_{m,\,M}$. Кроме того, устанавливается допустимый дефицит внешнеторгового баланса $I$ (в валютных рублях). Экспортные поставки на условиях кредита, оплачиваемые за пределами планового периода, включаются в матрицу $D$. Аналогично этому, импортные поставки $i$-х продуктов по ранее возникшей задолженности включаются как бесплатные ресурсы в пунктах ввоза; соответствующие условия ввиду их очевидности описывать не будем.

## 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Математическая модель задачи излагается как в этом, так и в двух следующих разделах; вводимые здесь обозначения переменных используются во всех трех разделах.

$X_{jt}^r$ $(j = 1, 2, \ldots, \tilde{m};\quad r = 1, 2, \ldots, p;\quad t = 1, 2, \ldots, T_0, T_0 + 1, \ldots \ldots, T_0 + T_j)$ — объем производства по $j$-му способу в $r$-м районе в $t$-м году планового и послепланового периодов на предприятиях, введенных в эксплуатацию к началу планового периода;

$X^r_{jt,\,\text{нов}}$ (для тех же индексов) — то же, на предприятиях, введенных в эксплуатацию после начала планового периода;

$Y^r_{jt}$ (для тех же индексов) — мощность предприятий $j$-го способа в $r$-м районе на начало $t$-го года;

$Y^{r+}_{jt}$ (для тех же индексов) — мощность предприятий $j$-го способа в $r$-м районе, вводимая в эксплуатацию в конце $t$-го года;

$X^r_{ij,\,\text{экс}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\quad j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m};\quad r = 1, 2, \ldots, p)$ — прямые (эксплуатационные) затраты $i$-го продукта на предприятиях $j$-го способа в $r$-м районе в $T_0$-м году;

$X^r_{ij,\,\text{рем}}$ (для тех же индексов) — затраты $i$-го продукта на текущий и капитальный ремонт основных фондов предприятий $j$-го способа в $r$-м районе в $T_0$-м году;

$X^r_{ij,\,\text{кап}}$ (для тех же индексов) — затраты $i$-го продукта на создание основных фондов предприятий $j$-го способа в $r$-м районе в $T_0$-м году;

$X^r_{ij,\,\text{об}}$ (для тех же индексов) — затраты $i$-го продукта на изменение оборотных фондов на предприятиях $j$-го способа в $r$-м районе в $T_0$-м году (неотрицательность $X^r_{ij,\,\text{об}}$ не обязательна);

$X^{rs}_{it}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, m_1;\quad u^{rs} \in U;\quad t = 1, 2, \ldots, T_0, \ldots, T_0 + T^{rs}_h;\quad B_{h-1} < \sum_{i=1}^{m_1} X^{rs}_{iT_0} \leqslant B_h\right)$ — объем перевозок $i$-го продукта по дуге $u^{rs}$ транспортной сети в $t$-м году;

$Y^{rs}_t$ $\left(u^{rs} \in U;\quad t = 1, 2, \ldots, T_0, \ldots, T_0 + T^{rs}_h;\quad B_{h-1} < \sum_{i=1} X^{rs}_{iT_0} \leqslant B_h\right)$ — ввод в эксплуатацию пропускной способности дуги $u^{rs}$ в $t$-м году;

$X^{rs}_{i,\,\text{экс}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ u^{rs} \in U)$ — прямые (эксплуатационные) затраты $i$-го продукта на перевозку грузов по дуге $u^{rs}$ транспортной сети в $i$-ом году;

$X^{rs}_{i,\,\text{кап}}$ (для тех же индексов) — затраты $i$-го продукта на увеличение пропускной способности дуги $u^{rs}$ транспортной сети в $T_0$-м году;

$X^{rs}_{i,\,\text{об}}$ (для тех же индексов) — затраты $i$-го продукта на изменение оборотных фондов дуги $u^{rs}$ транспортной сети в $T_0$-м году;

$X^r_{i,\,\text{потр}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\quad r = 1, 2, \ldots, p)$ — затраты $i$-го продукта на личное и общественное потребление населения $r$-го района в $T_0$-м году;

$X^r_{i,\text{раб}}$ (для тех же индексов) — потребность работающих в $r$-м районе и их семей в $i$-х продуктах в $T_0$-м году (для продуктов длительного пользования — требуемое наличие на конец $T_0$-го года);

$X^r_{i,\,\text{мигр}}$ (для тех же индексов) — дополнительная потребность в $i$-х продуктах в $T_0$-м году ввиду миграции за $(T_0 - 1)$ лет планового периода в $r$-й район (для продуктов длительного пользования — требуемое наличие на конец $T_0$-го года);

$X^{\mu+}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m_1;\ \mu = 1, 2, \ldots, M)$ — экспорт $i$-го продукта в $\mu$-ю страну в $T_0$-м году;

$X^i$ (для тех же индексов) — «обменный» импорт $i$-го продукта из $\mu$-й страны в $T_0$-м году, т. е. импорт за счет выручки от экспорта в эту страну или группу стран в $T_0$-м году;

$X_{i,\text{деф}}^{\mu-}$ (для тех же индексов) — импорт $i$-го продукта из $\mu$-й страны за счет дефицита внешнеторгового баланса в $T_0$-м году;

$Z_j^r$ $(j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m}+2;\ r = 1, 2, \ldots, p)$ — численность работающих на предприятиях $j$-го способа в $r$-м районе в $T_0$-м году, причем $(\widetilde{m}+1)$-й способ — транспорт, а $(\widetilde{m}+2)$-й способ — работа в сфере управления;

$Z^{rs}$ $(r, s = 1, 2, \ldots, p)$ — численность трудоспособного населения, мигрировавшего в течение первых $(T_0 - 1)$ лет планового периода из $r$-го района в $s$-й район.

Тогда экономической постановке задачи, описанной в разделе 1, соответствует следующая формулировка задачи математического программирования: требуется найти план, позволяющий выбрать наибольшее $\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma)$ при выполнении условий а) — н).

а) Сбалансированность ресурсов (производство и ввоз для транспортабельных продуктов, только производство — для нетранспортабельных) и потребления (с учетом вывоза для транспортабельных продуктов) $i$-го продукта в $r$-м районе для $T_0$-го года:

$$\sum_{\widetilde{s}_j \in s_i} (X_{jT_0}^r + X_{jT_0\,\text{нов}}^r) + \sum_{u^{sr} \in U^{r-}} X_{iT_0}^{sr} -$$

$$- \sum_{u^{rs} \in U^{r+}} X_{iT_0}^{rs} - \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} (X_{ij,\,\text{экс}}^r + X_{ij,\,\text{рем}}^r + X_{ij,\,\text{кап}}^r + X_{ij,\,\text{об}}^r) -$$

$$- X_{i,\,\text{потр}}^r - D_i^r = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m_1;\ r = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

$$\sum_{\widetilde{s}_j \in s_i} (X_{jT_0}^r + X_{jT_0,\,\text{нов}}^r) - \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} (X_{ij,\,\text{экс}}^r + X_{ij,\,\text{рем}}^r +$$

$$+ X_{ij,\,\text{кап}}^r + X_{ij,\,\text{об}}^r) - \sum_{u^{cd} \in U^r} (X_{i,\,\text{экс}}^{cd} + X_{i,\,\text{кап}}^{cd} + X_{i,\text{об}}^{cd}) - X_{i,\,\text{потр}}^r - D_i^r = 0 \tag{2}$$

$$(i = m_1 + 1,\ m_1 + 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, p).$$

б) Сбалансированность ввоза и вывоза (в пунктах внешней торговли — с учетом экспорта и импорта) $i$-го транспортабельного продукта в $r$-й вершине $(r > p)$ транспортной сети для $T_0$-го года:

$$\sum_{u^{sr} \in U^{r-}} X_{iT_0}^{sr} - \sum_{u^{rs} \in U^{r+}} X_{iT_0}^{rs} + X_i^{\mu-} + X_{i,\,\text{деф}}^{\mu-} - X_i^{\mu+} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m_1;\ r = p + \mu;\ \mu = 1, 2, \ldots, M), \tag{3}$$

$$\sum_{u^{sr} \in U^{r-}} X_i^{sr} - \sum_{u^{rs} \in U^{r+}} X_i^{rs} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ m_1;\ r = p + M + 1,\ p + M + 2, \ldots, V). \tag{4}$$

в) Обеспеченность производства по $j$-му способу в $r$-м районе в $T_0$-м году мощностями, существующими на начало этого года, в том числе производство на «исходных предприятиях» — мощностями этих предприятий $M^r$:

$$X^r_{jT_0} + X^r_{jT_0,\,\text{нов}} \leqslant Y^r_{jT_0} \quad (j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m};\ r = 1, 2, \ldots, p), \tag{5}$$

$$X^r_{jT_0} \leqslant M^r_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m};\ r = 1, 2, \ldots, p). \tag{6}$$

г) Выполнение ограничений сверху на возможные объемы производства по $j$-му способу в $r$-м районе в $T_0$-м году:

$$X^r_{jT_0} + X^r_{jT_0,\,\text{нов}} \leqslant B^r_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m};\ r = 1, 2, \ldots, p). \tag{7}$$

д) Ограниченность суммы перевозок транспортабельных продуктов по дуге $u^{rs}$ в $T_0$-м году пропускной способностью этой дуги на начало года:

$$\sum_{i=1}^{m_1} X^{rs}_{iT_0} \leqslant M^{rs} + \sum_{t=1}^{T_0-1} Y^{rs}_t \ (u^{rs} \in U). \tag{8}$$

е) Ограниченность суммы перевозок транспортабельных продуктов по дуге $u^{rs}$ в $T_0$-м году наибольшей пропускной способностью дуги:

$$\sum_{i=1}^{m_1} X^{rs}_{iT_0} \leqslant B_l \qquad (u^{rs} \in U). \tag{9}$$

ж) Обеспеченность производства и транспорта в $r$-м районе рабочей силой в $T_0$-м году:

$$\sum_{j=1}^{\widetilde{m}+2} Z^r_j \leqslant L^r + \sum_{s=1}^{p} (Z^{sr} - Z^{rs}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{10}$$

з) Выполнение ограничений снизу на средний доход на душу населения в $r$-м районе в $T_0$-м году:

$$\sum_{j=1}^{\widetilde{m}+2} Z^r_j \sum_{\nu=1}^{n} \xi^r_{j\nu}\gamma_\nu \geqslant \pi^r\beta^r \sum_{j=1}^{\widetilde{m}+2} Z^r_j, \tag{11}$$

где $r = 1, 2, \ldots, p$; $\beta^r$ — средняя плановая численность членов семьи на одного работающего в $r$-м районе на начало $T_0$-го года (см. раздел 5).

и) Соответствие численности работающих объемам производства и перевозок и лимитам труда в сфере управления для $r$-го района в $T_0$-м году:

$$Z^r_j = \lambda^r_j(X^r_{jT_0} + X^r_{jT_0,\text{нов}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m};\ r = 1, 2, \ldots, p). \tag{12}$$

$$Z^r_{\widetilde{m}+1} = \sum_{u^{cd} \in U^r} \lambda^{cd}_h \sum_{i=1}^{m_1} X^{cd}_{iT_0} \ (r = 1, 2, \ldots, p;\ B_{h-1} < \sum_{i=1}^{m_1} X^{cd}_{iT_0} \leqslant B_h), \tag{13}$$

$$Z^r_{\widetilde{m}+2} = D^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{14}$$

к) Ограниченность числа трудоспособных лиц, выезжающих из $r$-го района в порядке миграции в течение первых $(T_0 - 1)$ лет планового периода:

$$\sum_{s=1}^{p} Z^{rs} \leqslant \vartheta^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{15}$$

л) Сбалансированность экспорта и «обменного» импорта по каждой $\mu$-й стране или группе стран в $T_0$-м году:

$$\sum_{i=1}^{m_1} (\varepsilon_i^{\mu+} X_i^{\mu+} - \varepsilon_i^{\mu-} X_i^{\mu-}) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, M). \tag{16}$$

м) Ограниченность импорта $T_0$-го года за счет допустимого дефицита внешнеторгового баланса:

$$\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{\mu=1}^{M} \varepsilon_i^{\mu-} X_{i,\,\text{деф}}^{\mu-} \leqslant I. \tag{17}$$

н) Неотрицательность переменных:

$$X_{jT_0}^r,\ Y_{jT_0}^r,\ X_{ij,\,\text{экс}}^r,\ X_{ij,\,\text{рем}}^r,\ X_{ij,\,\text{кап}}^r,\ X_{ij,\,T_0,\,\text{об}}^r,\ X_{ij,T_0+1,\,\text{об}}^r,$$

$$X_{iT_0}^{rs},\ Y_t^{rs},\ X_{i,\,\text{экс}}^{rs},\ X_{i,\,\text{кап}}^{rs},\ X_{i,\,T_0,\,\text{об}}^{rs},\ X_{i,\,T_0+1,\,\text{об}}^{rs},\ X_{i,\,\text{потр}}^r,\ X_{i,\,\text{раб}}^r,$$

$$X_{i,\,\text{мигр}}^r,\ X_i^{\mu+},\ X_i^{\mu-},\ X_{i,\,\text{деф}}^{\mu-},\ Z_j^r,\ Z^{rs} \geqslant 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \tilde{m} + 2;\ r, s = 1, 2, \ldots\ p; \tag{18}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, M;\ t = 1, 2, \ldots, T_0, \ldots, T_0 + T_j).$$

В модели а) — н) приведены лишь основные соотношения и не расшифровываются такие переменные, как расход продуктов на производственное и непроизводственное потребление, ввод и мощностей. Это делается ниже, в разделах 4, 5.

## 4. ЗАТРАТЫ НА ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПРОЦЕССА РАСШИРЕННОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА

Затраты на осуществление процесса расширенного воспроизводства складываются из четырех элементов: прямые (эксплуатационные) затраты, затраты на ремонт, затраты на создание производственных мощностей, затраты на изменение оборотных фондов.

Прямые (эксплуатационные) затраты в производстве и транспорте попросту определяются на основе матриц $A$ и $A^*$ и объемов производства или перевозок $T_0$-го года планового периода:

$$X_{ij,\,\text{экс}}^r = a_{ij}^r (X_{jT_0}^r + X_{jT_0,\,\text{нов}}^r), \tag{19}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, \tilde{m}; \quad r = 1, 2, \ldots, p,$$

$$X_{i,\,\text{экс}}^{rs} = a_{ih}^{rs} \sum_{k=1} X_k^{rs}, \tag{20}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m;\ u^{rs} \in U;\ B_{h-1} < \sum_{k=1}^{m_1} X_k^{rs} \leqslant B_h.$$

Затраты на ремонт выделяются только для производства, для транспорта они включены в эксплуатационные затраты. Затраты $i$-го продукта на ремонт предприятий $j$-го способа в $r$-м районе в $T_0$-м году составляют:

$$X_{ij,\,\text{рем}}^r = \varphi_{ij} X_{jT_0}^r + \psi_{ij} X_{jT_0,\,\text{нов}}^r, \tag{21}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \tilde{m};\ r = 1, 2, \ldots, p.$$

Как указывалось в разделе 1, для получения в статической задаче затрат на создание производственных мощностей (а также на изменение оборотных фондов) мы предлагаем считать известным характер законов развития предприятий и транспортной сети на период после $T_0$-го года, требующийся для строительства этих предприятий и транспортных коммуникаций. Однако подчеркивается, что известен только вид функциональной зависимости, описывающей законы развития, но не ее параметры, которые определяются из полученных в решении значений объема производства и перевозок в первом году и в $T_0$-м году планового периода. При этом характер закона развития зависит от типа рассматриваемого способа или отрасли, их новизны, их истории, ограниченности используемых природных ресурсов и т. д. По-видимому, более чем достаточно ограничиться введением нескольких типовых законов развития, описываемых следующими функциями:

$$\text{а)}\quad X_{jt}^r + X_{jt,\,\text{нов}}^r = X_{j1}^r + c_j\,(t-1), \tag{22}$$

$$\text{б)}\quad X_{jt}^r + X_{jt,\,\text{нов}}^r = X_{j1}^r (1 + k_j^r)^{\alpha(t-1)}, \tag{23}$$

$$\text{в)}\quad X_{jt}^r + X_{jt,\,\text{нов}}^r = X_{j1}^r (t-1)^{\alpha_j{}^r}, \tag{24}$$

$$\text{г)}\quad X_{jt}^r + X_{jt,\,\text{нов}}^r = a_j^r - b_j^r/t, \tag{25}$$

$$\text{д)}\quad X_{jt}^r + X_{jt,\,\text{нов}}^r = a_j^r + b_j^r/t. \tag{26}$$

К функциям вида (22) — (24) можно также добавлять дополнительное условие вида

$$X_{jt} + X_{jt,\,\text{нов}} \leqslant B_j. \tag{27}$$

Пусть, например, выбран экспоненциальный закон развития (23) при $\alpha$, равной 1:

$$X_{jt} + X_{jt,\,\text{нов}} = X_{j1}(1 + k_j)^{t-1}. \tag{28}$$

При длительности планового периода $T_0$ лет, зная значения $X_{j1}^r$ и $(X_{jT_0}^r + X_{jT_0;\,\text{нов}}^r)$, нетрудно определить искомый темп роста $k_j$ по формуле (29):

$$k_j^r = \sqrt[T_0-1]{\frac{X_{jT_0}^r + X_{jT_0,\,\text{нов}}^r}{X_{j_1}^r}} - 1. \tag{29}$$

Если в некотором полученном решении $k_j^r > 0$ для $j$-го способа в $r$-м районе, т. е. необходимо расширение производства, причем мощность исходных предприятий используется, т. е. $X_{jt}^r = M_j^r$, то требуемый прирост мощности $Y_{jt}^{r+}$ в $t$-м году (будем считать, что он происходит в конце года) составит:

$$\begin{aligned} Y_{jt}^{r+} &= (X_{j,\,t+1}^r + X_{j,\,t+1,\,\text{нов}}^r) - (X_{jt}^r + X_{jt,\,\text{нов}}^r) = \\ &= X_{j1}^r[(1 + k_j^r)^t - (1 + k_j^r)^{t-1}] = k_j^r\,(1 + k_j^r)^{t-1} M_j^r. \end{aligned} \tag{30}$$

Распространив действие формулы (30) на послеплановый период, можно экстраполировать значения объемов производства и необходимых приростов мощностей для первых $T_j$ лет этого периода. Это в свою очередь позволяет определить затраты $i$-х продуктов на создание основных фондов $j$-го способа в $r$-м районе, требующееся в $T_0$-м году, для которого проверяется допустимость плана. Затраты вычисляются на основании $Y_{jt}^{r+}$ $(t = T_0, T_0+1, \ldots, T_0+T_j-1)$, матрицы $W$ и матрицы $\Delta_j$. Год $T_0$ является последним ($T_j$-м) годом строительного периода для мощностей, вводимых в эксплуатацию в конце $T_0$-го года, предпоследним — для вводимых в $(T_0+1)$-м году и т. д. Значит, затраты $i$-го продукта в $T_0$-м году составят $w_{ij}^r(\delta_{ijT_j} Y_{jT_0}^{r+} + \delta_{ij,T_j-1} Y_{j,T_0+1}^{r+} + \ldots)$, вплоть до $(T_0+T_j-1)$-го года, или

$$X_{ij,\,\text{кап}}^r = w_{ij}^r \sum_{\tau=0}^{T_j-1} \delta_{ij,\,T_0-\tau} Y_{j,\,T_0+\tau}^{r+} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, p), \tag{31}$$

где $Y_{j,\,T_0+\tau}^{r+}$ определяется из (30) или из аналогичной формулы при другом выбранном законе развития. Так, при (30):

$$X_{ij,\,\text{кап}}^r = w_{ij}^r \sum_{\tau=0}^{T_j-1} \delta_{ij,\,T_j-\tau} k_j^r (1+k_j^r)^{T_0+\tau-1} M_j^r =$$

$$= w_{ij}^r k_j^r (1+k_j^r)^{T_0-1} M_j^r \sum_{\tau=0}^{T_j-1} \delta_{ij,\,T_j-\tau} (1+k_j^r)^{\tau}. \tag{32}$$

Эти затраты связаны с объемом выпуска продукции на вновь построенных предприятиях, т. е. с $X_{jT_0,\,\text{нов}}^r$, поэтому отнесем их к единице $X_{jT_0,\,\text{нов}}^r$. Поскольку

$$X_{jT_0,\,\text{нов}}^r = X_{j1}^r (1+k_j^r)^{T_0-1} - X_{jT_0}^r = M_j^r[(1+k_j^r)^{T_0-1} - 1], \tag{33}$$

то затраты $i$-х продуктов в $T_0$-м году на создание мощностей в расчете на единицу $X_{jT_0,\,\text{нов}}^r$ равны:

$$w_{ij}^r = \frac{X_{ij,\,\text{кап}}^r}{X_{jT_0,\,\text{нов}}^r} =$$

$$= \frac{w_{ij}^r k_j^r (1+k_j)^{T_0-1} \sum_{\tau=0}^{T_j-1} \delta_{ij,T_j-\tau} (1+k_j^r)^{\tau}}{(1+k_j^r)^{T_0-1} - 1}. \tag{34}$$

При других законах развития, неполной загрузке исходных мощностей в начале либо в конце планового периода и т. п., формулы меняются соответствующим образом.

Подобный подход является упрощенным в ряде отношений, в частности — здесь приближенно учитывается возможность первоначального выбытия отдельных элементов основных фондов из-за физического износа, связанная с этим необходимость замены таких элементов и уменьшение экономичности использования наиболее изношенных исходных мощностей. Этот фактор учитывается лишь при помощи дифференциации нормативов затрат на ремонт ($\varphi_{ij}^r$ и $\psi_{ij}^r$). Однако для укрупненной модели такой подход, по-видимому, достаточен. Поэтому вопросы выбытия основных фондов из-за физического износа здесь более детально не рассматриваются.

В качестве закона развития грузопотоков и пропускных способностей для дуг транспортной сети можно принять линейное развитие. Кроме того, для простоты будем считать, что показатели срока строительства $w_{ih}^{rs}$ определяются типовым значением пропускной способности $B_h$, ближайшим бо́льшим по сравнению с грузопотоком $T_0$-го года. Тогда по аналогии с (31) для транспортных дуг сети

$$X_{i,\,\text{кап}}^{rs} = w_{ih}^{rs} \sum_{\tau=0}^{T_h^*-1} \delta_{i,\,T_h-\tau,\,h} Y_{T_0+\tau}^{rs},$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, m; \quad u^{rs} \in U; \quad B_{h-1} < \sum_{i=1}^{m_1} X_{iT_0}^{rs} \leqslant B_h\right). \tag{35}$$

Затраты $X_{ij,\,\text{об}}^{r}$ определяются по сходному принципу. Очевидно, что

$$X_{ij,\,\text{об}}^{r} = q_{ij}^{r}\left[\left(X_{j,\,T_0+1}^{r} + X_{j,\,T_0+1,\,\text{нов}}^{r}\right) - \left(X_{jT_0}^{r} + X_{jT_0,\,\text{нов}}^{r}\right)\right],$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \tilde{m};\ r = 1, 2, \ldots, p), \tag{36}$$

где объемы производства для $T_0$-го года определяются на основе полученного плана, а для $(T_0 + 1)$-го года — при помощи соответствующего закона развития.

В полученном решении параметры развития для отдельных способов и районов могут оказаться такими, что объем производства убывает. Тогда $X_{ij,\,\text{об}}^{r} < 0$ (в отличие от $X_{ij,\,\text{кап}}^{r}$, которые могут лишь снижаться до нуля при отсутствии прироста мощностей и даже при неполном использовании имеющихся $M_j^r$). Чтобы не нарушать условий неотрицательности переменных, ввиду такой возможности заменим $X_{ij,\,\text{об}}^{r}$ в уравнениях (1) и (2) двумя неотрицательными переменными:

$$X_{ij,\,\text{об}}^{r} = X_{ij,\,T_0+1,\,\text{об}}^{r} - X_{ijT_0,\,\text{об}}^{r}, \tag{37}$$

где $X_{ijt,\,\text{об}}^{r} = q_{ij}^{r} X_{jt}^{r},\ t = T_0,\ T_0 + 1$.

Также по аналогии и затраты на изменение оборотных фондов для транспортных дуг в (1) и (2) могут быть расшифрованы в виде

$$X_{i,\,\text{об}}^{rs} = X_{i,\,T_0+1,\,\text{об}}^{rs} - X_{iT_0,\,\text{об}}^{rs}, \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ u^{rs} \in U, \tag{38}$$

где $X_{it,\,\text{об}}^{rs} = q_i^{rs} \sum_{j=1}^{m} X_{jt}^{rs} \geqslant 0$.

## 5. ЛИЧНОЕ И ОБЩЕСТВЕННОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ

Личное и общественное потребление продуктов краткосрочного и длительного пользования определяется по-разному: для продуктов длительного пользования необходимо учитывать как остаток продуктов, выработанных до начала планового периода, так и их поступление в течение первых $(T_0 - 1)$ лет этого периода.

Сперва вычислим значения $X_{i,\,\text{раб}}^{r}$ и $X_{i,\,\text{мигр}}^{r}$, полностью определяющие необходимое потребление продуктов краткосрочного пользования, а также требуемые для расчета затрат продуктов длительного пользования.

а) На основе данных об общей ожидаемой численности на начало $T_0$-го года в каждом из $p$ районов, т. е. $\bar{L}_r$, и полученных в плане значений численности работающих на предприятиях $(\tilde{m} + 2)$ способов и численности мигрировавших, т. е. $Z_j^r$ и $Z^{rs}$ $(j = 1, 2, \ldots, \tilde{m} + 2;\ r, s = 1, 2, \ldots, p)$, вычислим $\beta_{\text{мигр}}^{r-}$ и $\beta_{\text{мигр}}^{r+}$, или среднюю плановую численность членов семьи на одного работающего для семей, выезжающих из $r$-го района и въезжающих в него:

$$\beta^{r-}_{\text{мигр}} = \frac{\overline{L}^r}{\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{m}+2} Z^r_j + \sum\limits_{s=1}^{p} Z^{rs}} \quad (r = 1, 2, \ldots, p), \tag{39}$$

$$\beta^{r+}_{\text{мигр}} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} \beta^{s-}_{\text{мигр}} Z^{sr}}{\sum Z^{sr}} \quad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{40}$$

Расчет упрощается благодаря тому, что в плане невозможна одновременная миграция в район и из него.

б) На основе $\beta^{s}_{\text{мигр}}$ и $\beta^{s+}_{\text{мигр}}$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$, а также $Z^r_j$ и $Z^{rs}$ $(j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m} + 2;\ r, s = 1, 2, \ldots, p)$ определим $\beta^r$ — среднюю плановую численность членов семьи на одного работающего в $r$-м районе после миграции, т. е. на начало $T_0$-го года:

$$\beta^r = \frac{L^r + \sum\limits_{s=1}^{p} \beta^{s-}_{\text{мигр}} Z^{sr} - \beta^{r-}_{\text{мигр}} \sum\limits_{s=1}^{p} Z^{rs}}{\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{m}+2} Z^r_j} \quad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{41}$$

в) Для каждого $r$-го района выберем столбцы матрицы $H$, соответствующие вычисленным $\beta^r$ и $\beta^{r+}_{\text{мигр}}$, и построим диагональные матрицы $H^r$ и $H^{r+}_{\text{мигр}}$ $m$-го порядка, $i$-е диагональные элементы которых есть $i$-е элементы выбранных столбцов.

г) Для каждого $r$-го района аналогичным образом построим диагональную матрицу $P^r$ $m$-го порядка из элементов $\rho^r_i$ $r$-го столбца матрицы $P$ коэффициентов районных различий.

д) Распределим работающих в $r$-м районе, т. е. $Z^r_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \widetilde{m} + 2)$, по $n$ уровням заработной платы, построив векторы

$$\widetilde{Z}^r = \| Z^r \|_{n,1};$$

$$\widetilde{Z}^r = (\Xi^r)_T \times Z^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p), \tag{42}$$

где $\Xi^{rs} = \| \xi^r_{j\nu} \|_{\widetilde{m}+2,\, n}$, $Z^r = \| Z^r_j \|_{\widetilde{m}+2,\, 1}$, подстрочный индекс $T$ — знак транспонирования.

е) Определим $X^r_{\text{раб}}$ — векторы потребности работающих в $r$-м районе (без учета дополнительного расхода продуктов ввиду миграции) в $i$-х продуктах при уровне потребления $\alpha$:

$$X^r_{\text{раб}} = P^r H^r F_\alpha \widetilde{Z}^r \qquad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{43}$$

ж) Определим $X^r_{\text{мигр}}$ — векторы дополнительного расхода продуктов ввиду миграции:

$$X^r_{\text{мигр}} = \left( \sum_{s=1}^{p} Z^{sr} \right) (H^{r+}_{\text{мигр}} \Omega^r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{44}$$

Сумма $X^r_{i,\,\text{раб}}$ и $X^r_{i,\,\text{мигр}}$, т. е. $i$-х элементов соответствующих векторов, составляет необходимое потребление продуктов краткосрочного пользования.

Для продуктов длительного пользования этих сведений недостаточно: чтобы определить затраты $T_0$-го года, приходится, как в разделе 4, задаться какой-то гипотезой о динамике насыщения потребности в этих продуктах за предыдущие годы. Естественно воспользоваться законом, по своему характеру аналогичным выбранному закону развития рассматриваемых способов отрасли $\bar{S}_i$. Так, если считалось, что $i$-я отрасль развивается по экспоненциальному закону, то можно предположить, что экспоненциальной функцией описывается и рост наличия $i$-го продукта длительного пользования на одного человека.

Как в разделе 4, для каждого $r$-го района построим экспоненту, проходящую через две точки. Начальной точкой функции потребности в $i$-м продукте длительного пользования будем считать $(G_i^r : \bar{L}_0^r)$, конечной — $(X_{i,\,\text{раб}}^r + X_{i,\,\text{мигр}}^r) : \left(\beta^r \sum\limits_{i=1}^{m+2} Z_i^r\right)$. Поскольку конечная точка относится здесь к концу $T_0$-го года, а не к его началу, воспользуемся для вычисления темпа роста $k$ формулой, аналогичной (29), заменив степень корня $(T_0 - 1)$ на $T_0$.

Затем найдем интересующие нас затраты $i$-го продукта длительного пользования в $T_0$-м году, или разность между потребностью на конец $T_0$ и $(T_0 - 1)$ годов,

$$X_{i,\,\text{потр}}^r = (X_{i,\,\text{раб}}^r + X_{i,\,\text{мигр}}^r) - \frac{X_{i,\,\text{раб}}^r + X_{i,\,\text{мигр}}^r}{1 + k_i^r}\left(1 - \frac{1}{T_0}\right) =$$

$$= \frac{T_0 k_i^r + 1}{T_0 (k_i^r + 1)} (X_{i,\,\text{раб}}^r + X_{i,\,\text{мигр}}^r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, p). \tag{45}$$

Потребность $(T_0 - 1)$ года в расчете на одного человека меньше соответствующей потребности $T_0$-го года в $(1 + k_i^r)$ раз; кроме того, общая потребность из-за изменения численности населения меньше еще в $\frac{T_0}{T_0 - 1}$ раз, где $1 / T_0$ — относительный прирост населения за $T_0$-й год (условно; напоминаем, что длительность планового периода равна $T_0$-м годам; можно воспользоваться и экспоненциальной формулой изменения численности населения).

При других выбранных законах развития формулы меняются соответствующим образом.

В заключение отметим, что можно и несколько изменить подход к динамике развития отраслей, задаваясь законами развития во времени не объемов производства, а объемов личного и общественного потребления продуктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. Л. Макаров. Оптимальные модели перспективного планирования. Сб. Применение матем. в эконом. исследованиях, № 3. М., «Мысль», 1965.

Поступила в редакцию
7 VII 1965