ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 6

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ И ИХ РАЗМЕЩЕНИЕ

И. И. МИТРОВ, В. К. МИКОВСКИ

(БОЛГАРИЯ)

Социалистическое строительство характеризуется быстрым развитием производительных сил, особенно в промышленности, на транспорте и др. Каждую отрасль промышленности нужно развивать в самом подходящем для нее, с точки зрения снабжения сырьем и потребления товаров, районе. Рациональное размещение производственных мощностей может обеспечить значительную экономию общественного труда при комплексном развитии экономического района и специализации заводов. Однако проблема оптимального территориального размещения заводов, определения оптимальных мощностей еще не вполне разрешена. Специализация и концентрация производства создают условия для уменьшения некоторых видов расходов, но, с другой стороны, приводят к увеличению расходов по транспортировке сырья и готовой продукции. Размещение производства в нескольких пунктах уменьшает транспортные, но увеличивает производственные расходы. В обоих случаях получается значительное увеличение суммарных расходов производства и доставки на единицу продукции.

Научное решение вопросов рационального размещения производства — сложная комплексная задача, которая не может быть решена без применения математических методов. Для лучшего определения показателей качественной зависимости между мощностями и различными видами расходов надо исследовать их количественную сторону для каждого конкретного случая отдельно.

Над проблемой оптимального выбора производственных мощностей и их размещения плодотворно работали в последние годы многие авторы [1—12]. Однако в некоторых из предлагаемых моделей задач не учитывается изменение себестоимости продукции в зависимости от мощности предприятия. При решении же ряда задач этой зависимостью расходов от объема производства пренебрегать нельзя, ибо в таких задачах насколько больше мощность предприятия, настолько меньше расходы производства на единицу продукции почти во всех отраслях промышленности. Это определяется рядом факторов; например, полное использование сырья, введение высокопроизводительной техники, улучшение организации труда и другие факторы создают условия для удешевления продукции.

Функциональная зависимость между себестоимостью и объемом продукции выражается формулой:

$$y = \frac{v}{x} + u,$$

где y — себестоимость единицы продукции; v — относительно постоянные расходы на производство всей продукции; u — переменные расходы на единицу продукции; x — объем продукции.

Но с ростом объема продукции изменяются многие технические условия и организация труда, а вместе с тем, хотя и медленно, относительно постоянные расходы. Кроме того, на себестоимость влияет и ряд других факторов, которые являются специфичными для каждого конкретного случая и на которых мы не останавливаемся. Вот почему на практике между себестоимостью единицы продукции и объемом производства существует корреляционная зависимость. Поэтому такая зависимость не всегда изображается точно гиперболой или какой-нибудь другой кривой, а приближается по своему виду к ней, т. е. является нелинейной.

Решение комплексной проблемы оптимального размещения производства возможно лишь в том случае, если учитывать все важнейшие, влияющие на это решение факторы. К таким факторам относятся следующие: 1) существующие мощности по пунктам и их описание; 2) базы сырья и возможные районы его получения; 3) возможные варианты расширения существующих заводов и строительства новых заводов; 4) технико-экономические показатели (себестоимость продукции, удельные капитальные вложения и др.) для базисного периода и для каждого из этих вариантов; 5) потребность продукции в плановый период; 6) лимит капитальных вложений в плановый период; 7) транспортные расходы (по себестоимости в соответствующем плановом периоде) за перевоз единицы продукции от производителей к потребителям.

Если потребители могут быть удовлетворены несколькими взаимозаменяемыми продуктами, в исходных данных надо указать возможные пределы заменяемости и эффективность такой замены.

Прежде чем приступить к решению задачи, надо определить показатели, которые характеризуют условия производства на основе материалов проектных организаций, отраслевых институтов, ведомств и плановых отделов заводов. Благодаря этим статистическим, оперативным и проектным материалам следует разработать необходимые технико-экономические показатели и, основываясь на экономическом качественном анализе, использовать математические методы для моделирования и решения задач.

Для территориального размещения ряда отраслей промышленности нередко применяют разные модификации транспортной задачи линейного программирования. Однако задача выбора мощности и территориального размещения предприятий относится к типу задач нелинейного программирования. Это связано с тем, что ряд показателей (например, себестоимость продукции, удельные капитальные вложения и др.) находится в нелинейной зависимости от объема продукции (мощности предприятий).

В такой задаче есть две группы неизвестных величин. Первая группа представляет собой количество продукции x_{ij}, перевозимой из i-го пункта производства в j-й пункт потребления; вторая — мощности предприятий и зависящие от них относительные капитальные вложения, себестоимости и другие показатели.

Однако в практике встречаются не постоянно изменяющиеся мощности, а дискретные, т. е. конкретно определенные мощности и соответствующие им относительные капитальные вложения, себестоимости и т. д., так как мощности определяются числом производственных агрегатов с фиксированной производительностью. Согласно типовым проектам каждому пункту размещения будет соответствовать несколько проектных мощностей $a_{is}{}^{i}$ при $s_1 = 1_i, 2_i, \ldots, z_i$.

Это относится также к конкретной себестоимости продукции $\psi_i = f(a_{is})$ и к конкретным капитальным вложениям $q_i = \varphi(a_{is})$ (и те и другие являются функциями объема производства), где a_{is} — i-й производитель с s-й мощностью; ψ_i — функция себестоимости продукции i-го производителя, $\psi_i = \psi_{i_1} + \psi_{i_2}$ при $\psi_{i_1} = \mathrm{const}$ и ψ_{i_2} — переменной части себестоимости (в зависимости от мощности); q_i — функция капитальных вложений i-го производителя.

В результате суммирования капитальных вложений, производственных, транспортных и других расходов образуется итоговая величина расходов доставки единицы продукции к пункту потребления. Эти суммарные расходы назовем характеристикой связи между i-м производителем и j-м потребителем и обозначим их Q_{is_ij}.

Вычисление характеристик связей производится по формуле:

$$Q_{is_ij} = Eq_i(a_{is_i}) + \psi_i(a_{is_i}) + c_{ij} - Eq_{0i}(a_{is_i}),$$

где E — коэффициент эффективности капитальных вложений; q_{0i} — основные средства, подлежащие ликвидации; c_{ij} — транспортные расходы на единицу продукции от i-го производителя до j-го потребителя.

Постановка задачи размещения мощностей (однопродуктовая модель) заключается в следующем:

а) заданы потребности пунктов потребления в некотором продукте, известна фактическая себестоимость продукции на существующем предприятии, намечены варианты для реконструкции существующих и строительства новых заводов, а также соответствующие им проектные себестоимости продукции и удельные капитальные вложения, при которых общая мощность всех существующих и проектных заводов будет больше суммарной потребности;

б) найти такое распределение производства между существующими и новыми проектными заводами и так запланировать закрепление заводов-производителей за потребителями, чтобы общая величина расходов на производство и доставку планируемого объема продукции была минимальной; при этом нельзя превышать определенные лимиты капитальных вложений.

Сформулируем задачу математически: пусть ω_l — такой набор чисел, который содержит не больше одного числа из каждого ряда размеров мощностей заводов

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1z_i}; \ldots; a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iz_i}; \ldots; a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mz_m}$$

и для которого выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{i=i_k}^{i_p} a_{is_i} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{\mu},$$

т. е. каждому $i = i_k, \ldots, i_p$ соответствует точно определенная величина s_i в интервале целых чисел $1_i, 2_i, \ldots, s_i, \ldots, z_i$. Иначе говоря, от каждого завода взято не больше одной мощности и сумма мощностей заводов должна быть в интервале:

$$\left[\sum_{j=1} b_j, \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{\mu}\right].$$

Обозначим через Ω множество всех наборов.

Математическая модель задачи имеет следующий вид.

I. Надо найти минимум функции

$$F_I\{x_{is_ij}\}_{q\times n}=\sum_{i=i_k}^{i_p}\sum_{j=1}^{n}Q_{is_ij}x_{is_ij};$$

каждому $i=i_k,\ldots,i_p$ соответствует одна величина s_i, так что a_{is_i} принадлежат ω_l, для которых соблюдаются ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{is_ij}=\beta_{is_i}a_{is_i},\qquad i=i_k,\ldots,i_p, \tag{1}$$

$$\sum_{i=i_k}^{i_p}x_{is_ij}=b_j,\qquad j=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=i_k}^{i_p}\beta_{is_i}a_{is_i}=\sum_{j=1}^{n}b_j, \tag{3}$$

где x_{is_ij} — количества перевозимой продукции от i-го пункта производства с мощностью s_i до j-го пункта потребления; Q_{is_ij} — характеристики связей (сумма производственных расходов, относительных капитальных вложений, транспортных и других расходов на единицу продукции) от i-го пункта производства с s_i-й мощностью до j-го пункта потребления; β_{is_i} — параметр, определяющий использование s_i-й мощности на i-м заводе и заключенный в интервале $\mu\leqslant\beta_{is_i}\leqslant 1$; μ — нижний предел параметра β_{is_i} неполного использования мощности, для которого изменение себестоимости и других расходов незначительно и который заключается в интервале $0<\mu\leqslant 1$; a_{is_i} — размер s_i-й мощности на i-м заводе; b_j — количество продукции, необходимое для j-го пункта потребления; z_i — число различных мощностей на i-м заводе; a_{iz_i} — самая большая мощность i-го завода; m — пункты производства; n — пункты потребления.

Описанную модель преобразуем так, чтобы придать ей удобный для решения вид, прибавив при этом к ней фиктивного потребителя:

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i=1}^{z_i}a_{is_i}-\sum_{j=1}^{n}b_j.$$

II. Надо найти минимум функции

$$F_{II}\{x_{is_ij}\}_{r\times(n+1)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i=1}^{z_i}\sum_{j=1}^{n+1}Q_{is_ij}x_{is_ij}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n+1}x_{is_ij}=a_{is_i}\qquad i=1,\ldots,m;\ s_i=1,\ldots,z_i; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i=1}^{z_i}x_{is_i}=b_j,\qquad j=1,\ldots,n,\ n+1; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i=1}^{z_i}a_{is_i}=\sum_{j=1}^{n+1}b_j; \tag{6}$$

$x_{is_i n+1} = a_{is_i}$ для таких i и s_i, для которых

$$a_{is_i} \notin \omega_l; \tag{7}$$

$x_{is_i n+1} = \beta^*_{is_i} a_{is_i}$ для таких i и s_i, для которых

$$a_{is_i} \in \omega_l \text{ и } \beta^*_{is_i} = 1 - \beta_{is_i}; \tag{8}$$

$$\sum_{i=i_k}^{i_p} \beta_{is_i} a_{is_i} = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{9}$$

для таких i и s_i, для которых $a_{is_i} \in \omega_l$.

Пусть характеристики связей при фиктивном потребителе равны нулю $(Q_{is_i\, n+1} = 0)$. Назовем первую модель задачи $\mathbf{M}_1$, а вторую $\mathbf{M}_2$.

Докажем, что для нахождения оптимального решения задачи $\mathbf{M}_1$ достаточно найти оптимальное решение задачи $\mathbf{M}_2$.

Пусть матрица $\{\bar{x}_{is_i j}\}_{r\times(n+1)}$ есть решение задачи $\mathbf{M}_2$, где $r = (z_1 + + z_2 + \ldots + z_m)$. Докажем, что $\{\bar{x}_{is_i j}\}_{q\times n}$, где q — число элементов, принадлежащих ω_l, есть решение задачи $\mathbf{M}_1$. Докажем, что $\{\bar{x}_{is_i j}\}_{q\times n}$ удовлетворяет условиям (1), (2) и (3) задачи $\mathbf{M}_1$. Проверим, удовлетворяет ли решение задачи $\mathbf{M}_2$ условию (1), когда $a_{is_i} \in \omega_l$. Берем условие (4) $\sum_{j=1}^{n+1} x_{is_i j} = a_{is_i}$. Это равенство можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{is_i j} + \beta^*_{is_i} a_{is_i} = a_{is_i};$$

отсюда, пользуясь условием (8), получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{is_i j} + (1 - \beta_{is_i}) a_{is_i} = a_{is_i}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{is_i j} = \beta_{is_i} a_{is_i}.$$

Следовательно, матрица $\{\bar{x}_{is\ j}\}_{q\times n}$ удовлетворяет первому условию задачи $\mathbf{M}_1$.

Проверим условие (2). Условие (5) можно записать так:

$$\sum_{i=i_k}^{i_p} \bar{x}_{is_i j} + \sum_{i\neq i_k,\ldots,i_p} \sum_{s_i \neq s_{i_k},\ldots,s_{i_p}} \bar{x}_{is_i j} = b_j.$$

Первая сумма не двойная, потому что каждому i, для которого $a_{is_i} \in \omega_l$, соответствует одно s_i.

Для $a_{is_i} \notin \omega_l$ имеем по условию (8) $x_{is_i n+1} = a_{is_i}$, из которого следует, что для $a_{is_i} \notin \omega_l$ согласно условию (4)

$$\sum_{j=1} \bar{x}_{is_i j} + \bar{x}_{is_i n+1} = a_{is_i}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{is_ij} + a_{is_i} = a_{is_i}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{is_ij} = 0$$

$$\text{или } \bar{x}_{is_ij} = 0 \text{ для } a_{is_i} \notin \omega_l \text{ и для } j \neq n+1.$$

Следовательно, примем:

$$\sum_{i \neq i_k, \ldots, i_p} \sum_{s_i \neq s_{i_k}, \ldots, s_{i_p}} \bar{x}_{is_ij} = 0 \text{ для } j \neq n+1.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{i=i_k}^{i_p} \bar{x}_{is_ij} = b_j$$

для $a_{is_i} \in \omega_l$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. условие (2) задачи M_1.

Условие (3) задачи M_1 аналогично условию (6) задачи M_2.

Таким образом, мы доказали, что матрица

$$\{\bar{x}_{is_ij}\}_{q \times n}$$

есть решение задачи M_1.

Можно доказать, что из каждого решения задачи M_1 составляется матрица-решение задачи M_2. Для этого дополняем мартицу $\{x_{is_ij}\}_{q \times n}$ новыми строками и одним столбцом следующим образом:

$$x_{is_i n+1} = a_{is_i} \qquad \text{для} \quad a_{is_i} \notin \omega_l,$$

$$x_{is_i n+1} = \beta^*_{is_i} a_{is_i} \quad \text{для} \quad a_{is_i} \in \omega_l$$

и

$$x_{is_ij} = 0 \quad \text{для} \quad a_{is_i} \in \omega_l \ \text{ и } \ j \neq n+1.$$

Следовательно, из каждой матрицы $\{x_{is_ij}\}_{q \times n}$ решения задачи M_1 можно образовать матрицу-решение задачи M_2 добавлением новых строк и столбца. И наоборот, из каждого решения задачи M_2 можно, выбрав матрицу из элементов, находящихся на пересечении q-х строк и n-х столбцов, получить матрицу-решение задачи M_1.

Докажем, что если $\{\bar{x}_{is_ij}\}_{r \times (n+1)}$ есть оптимальное решение задачи M_2, то соответствующая ей матрица $\{\bar{x}_{is_ij}\}_{q \times n}$ есть оптимальное решение задачи M_1.

Итак, $\{\bar{x}_{is_ij}\}_{r \times (n+1)}$ есть оптимальное решение задачи M_2. Возьмем матрицу $\{\bar{x}_{is_ij}\}_{q \times n}$, которая, согласно предыдущему доказательству, будет решением M_1. Допустим, что имеется другое решение $\{\tilde{x}_{is_ij}\}_{q_1 \times n}$, которое будет оптимальным решением задачи M_1, т. е. для него выполняется:

$$F_I\{\tilde{x}_{is_ij}\}_{q_1 \times n} \leqslant F_I\{\bar{x}_{is_ij}\}_{q \times n}. \tag{10}$$

Возьмем соответствующее ему решение задачи M_2 $\{\tilde{x}_{is_ij}\}_{r\times(n+1)}$. Представим целевую функцию задачи M_2 в виде:

$$F_{II}\{x_{is_ij}\}_{r\times(n+1)} = \sum_{i=i_k}^{i_p}\sum_{j=1}^{n} Q_{is_ij}x_{is_ij} +$$

$$+ \sum_{i\neq i_k,\ldots,i_p}\ \sum_{s_i\neq s_{i_k},\ldots,s_{i_p}}\ \sum_{j=1}^{n} Q_{is_ij}x_{is_ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i=1}^{z_i} Q_{is_in+1}\,x_{is_in+1}.$$

Но $Q_{is_in+1}=0$ и $x_{is_ij}=0$ для $a_{is_i}\notin\omega_l$, что мы видели при доказательстве условия (2); из этого следует, что

$$\sum_{i\neq i_k,\ldots,i_p}\ \sum_{s_i\neq s_{i_k},\ldots,s_{i_p}}\ \sum_{j=1}^{n} Q_{is_ij}\,x_{is_ij}=0$$

и

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_i=1}^{z_i} Q_{is_in+1}\,x_{is_in+1}=0.$$

Следовательно, имеем

$$F_{II}\,\{x_{is_ij}\}_{r\times(n+1)} = \sum_{i=i_k}^{i_p}\sum_{j=1}^{n} Q_{is_ij}x_{is_ij} = F_I\,\{x_{is_ij}\}_{q\times n}\,.$$

Из этого равенства и из неравенства (10) следует, что

$$F_{II}\,\{\tilde{x}_{is_ij}\}_{r\times(n+1)} \leqslant F_{II}\,\{\bar{x}_{is_ij}\}_{r\times(n+1)}\,.$$

Из последнего неравенства следует, что $\{x_{is_ij}\}_{r\times(n+1)}$ — не оптимальное решение задачи M_2 и противоречит избранной матрице $\{\bar{x}_{is_ij}\}_{r^x\,(n+1)}$. Это противоречие доказывает, что $\{\bar{x}_{is_ij}\}_{q\times n}$ есть оптимальное решение задачи M_1. Иными словами, оптимальное решение задачи M_2 позволяет определить матрицу, которая является оптимальным решением задачи M_1.

Прежде чем рассмотреть решение задачи M_2 в общем случае, остановимся на решении в частном случае, при котором вводится дополнительное условие

$$\min a_{is_i} \geqslant \max b_j, \tag{11}$$

где $i=1,2,\ldots,m$; $s_i=1,2,\ldots,z_i$; $j=1,2,\ldots,n$.

Запишем исходные данные, необходимые для решения задачи в виде табл. 1.

Продолжаем рассмотрение задачи M_2 с дополнительным условием (11). Построим исходный план задачи M_2 по методу, аналогичному методу северо-западного угла при решении транспортной задачи, что возможно всегда, когда имеем достаточно больше a_{is_i}, или на основе самого меньшего элемента, при котором соблюдаем условие полного использования мощности.

Исходный план построим следующим образом.

Возьмем первый завод ($i=1$) с самой большой его мощностью $s_i=z_i$. Прикрепляем к нему потребителей до тех пор, пока сумма b_j станет равной $\beta_1z_1\cdot a_1z_1$, где z_1 — номер самой большой мощности первого завода. По тому же способу прикрепляем ко второму заводу ($i=2$) других потребителей, которые не были прикреплены к первому заводу, и т. д., пока будет

Таблица 1

Производители		Потребители						
		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	B_{n+1}
		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	b_{n+1}
A_1	a_{11_1}	Q_{11_11}	Q_{11_12}	…	Q_{11_1j}	…	Q_{11_1n}	Q_{11_1n+1}
	a_{12_1}	Q_{12_11}	Q_{12_12}	…	Q_{12_1j}	…	Q_{12_1n}	Q_{12_1n+1}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	a_{1z_1}	Q_{1z_11}	Q_{1z_12}	…	Q_{1z_1j}	…	Q_{1z_1n}	Q_{1z_1n+1}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
A_i	a_{i1_i}	Q_{i1_i1}	Q_{i1_i2}	…	Q_{i1_ij}	…	Q_{i1_in}	Q_{i1_in+1}
	a_{i2_i}	Q_{i2_i1}	Q_{i2_i2}	…	Q_{i2_ij}	…	Q_{i2_in}	Q_{i2_in+1}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	a_{is_i}	Q_{is_i1}	Q_{is_i2}	…	Q_{is_ij}	…	Q_{is_in}	Q_{is_in+1}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	a_{iz_i}	Q_{iz_i1}	Q_{iz_i2}	…	Q_{iz_ij}	…	Q_{iz_in}	Q_{iz_in+1}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
A_m	a_{m1_m}	Q_{m1_m1}	Q_{m1_m2}	…	Q_{m1_mj}	…	Q_{m1_mn}	Q_{m1_mn+1}
	a_{m2_m}	Q_{m2_m1}	Q_{m2_m2}	…	Q_{m2_mj}	…	Q_{m2_mn}	Q_{m2_mn+1}
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	a_{mz_m}	Q_{mz_m1}	Q_{mz_m2}	…	Q_{mz_mj}	…	Q_{mz_mn}	Q_{mz_mn+1}

выполнено условие (9):

$$\sum_{\substack{i=i_h \\ a_{is_i}\in\omega_l}}^{i_p} \beta_{is_i} a_{is_i} = \sum_{j=1}^{n} b_j, \text{ т. е. } \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{i=i_h}^{i_p} a_i s_i \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}{\mu}.$$

Затем полагаем:

$$x_{is_i n+1} = a_{is_i} \text{ для } a_{is_i} \notin \omega_l \text{ и } x_{is_i n+1} = \beta_{is_i} a_{is_i} \text{ для } a_{is_i} \in \omega_l.$$

Надо сказать, что x_{is_in+1} для $a_{is_i} \in \omega_l$ может быть равен нулю. План, построенный таким образом, удовлетворяет условиям (4), (5), (6), (7), (8) и (9). Если опустить условия (7), (8) и (9), задача $\mathbf{M}_2$ превращается в транспортную задачу, которую назовем задачей $\mathbf{M}_3$.

Построенный выше план задачи $\mathbf{M}_2$ является исходным планом задачи $\mathbf{M}_3$, потому что сумма чисел строк и столбцов есть $z_1 + z_2 + \cdots$

$\cdots z_n + (n+1)$, а сумма занятых клеток в исходном плане задачи M_2 равна $z_1 + z_2 + \cdots + n$.

Перейдем к вычислению оценок клеток в матрице-таблице 1 задачи M_3 (матрицу-таблицу 1 будем рассматривать как транспортную матрицу) по распределительному методу решения транспортной задачи. Обозначим незанятую клетку $(i = \text{н})$ — н$s_\text{н}j$, а занятую клетку — з$s_\text{з}j$. Рассмотрим незанятые клетки в строках, соответствующих $a_{is_i} \notin \omega_l$. В них для $j \neq n+1$ имеем $x_{is_ij} = 0$, что видно при доказательстве условия (2), а для $j = n+1$ имеем $x_{is_ij} = a_{is_i}$ при условии (7). Строки, соответствующие $a_{is_i} \notin \omega_l$, назовем незанятыми строками.

Построим контур по незанятым клеткам (н$s_\text{н}j$) в соответствии с распределительным методом. Контур будет четырехугольным с двумя вершинами в фиктивном столбце и двумя другими вершинами в j-м столбце.

$$\begin{array}{ccc} -x_{\text{з}\, s_\text{з} j} & \cdots\cdots\cdots & +x_{\text{з}\, s_\text{з} n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ +x_{\text{н}\, s_\text{н} j} & \cdots\cdots\cdots & -x_{\text{н}\, s_\text{н} n+1} \end{array}$$

Из условия (8) и (11) и из $x_{\text{з}s_\text{з}j} = b_j$ имеем $x_{\text{з}s_\text{з}j} \leqslant x_{\text{н}s_\text{н}n+1}$, из чего следует, что по контуру перемещается $x_{\text{з}i_\text{з}j}$ $(j \neq n+1)$. Это действительно для всех незанятых строк.

Вычислим изменение функционала F_{II} при перемещении $x_{\text{з}i_\text{з}j} = b_j$ в незанятую клетку н$i_\text{н}j$; изменение будет равно:

$$\tau_{\text{н}i_\text{н}j} = (Q_{\text{н}i_\text{н}j} - Q_{\text{з}i_\text{з}j} + Q_{\text{з}i_\text{з}n+1} - Q_{\text{н}i_\text{н}n+1})\, b_j,$$

где $\tau_{is_i\, j}$ назовем оценкой клеток для задачи M_2.

Из вышеизложенного ясно, что когда выполнено условие (11), процесс вычисления оценок клеток в данном столбце для задачи M_3 не зависит от того, какие клетки заняты в других столбцах (не считая фиктивный столбец), а зависит от занятой клетки в данном столбце, т. е. и прирост расходов τ_{is_ij} вычисляется независимо по столбцам. Это дает возможность вычислить, насколько бы стал дешевле или дороже исходный план, если заполнить новую незанятую строку так, чтобы сумма b_j для выбранного j равнялась $\beta_{is} \cdot a_{is}$. Этот прирост расходов будет равен $\sum\limits_{j_\text{выбр.}} \tau_{\text{н}i_\text{н}j}$. Строки, которые соответствуют $a_{is_i} \in \omega_l$, назовем занятыми строками. Определим оценки клеток для занятых строк в задаче M_2. Полагаем, для занятых клеток $\tau_{is_ij} = 0$, а для незанятых $\tau_{is_ij} = b_j(Q_{\text{н}i_\text{н}j} - Q_{\text{з}i_\text{з}j} + Q_{\text{з}i_\text{з}n+1} - Q_{\text{н}i_\text{н}n+1})$. Для фиктивного столбца не рассматриваем оценки клеток в задаче M_2. Суммы $\sum\limits_{j_\text{выбр.}} \tau_{is_ij}$, которые получены в результате суммирования начатого с наименьшего $\tau_{is\, j}$ в строке и произведенного в порядке возрастания величин τ_{is_ij}, назовем оценками строк для задачи M_2. Если оценка данной строки отрицательна, это показывает, что при заполнении данной строки в клетках, соответствующих избранным τ_{is_ij}, получим удешевление предыдущего плана, равное абсолютной стоимости оценки строки, а если положительна — удорожание предыдущего плана, равное стоимости оценки строки. Если нет строк с отрицательными оценками, значит, предыдущий план не может быть улучшен.

Если есть строки с отрицательными оценками, выбираем набор ω_l, включающий такую мощность a_{is_i}, которой соответствует строка с наименьшей отрицательной оценкой. Такие выбранные строки с соответствующими им мощностями и потребителями рассмотрим как новую транспортную задачу. Находим оптимум этой задачи, соблюдая условия возможности неполного использования мощности и неразделения потребителей.

Решив описанную транспортную задачу, можно получить решение задачи M_2, которое является исходным планом задачи M_3. Просуммируем оценки клеток, занятых после описанного выше решения. Эту сумму назовем критерием набора ω_l.

Если критерий набора ω_l отрицательный, это показывает, что новое решение задачи M_2 в сравнении с предыдущим решением уменьшает суммарные расходы на величину абсолютной стоимости критерия набора, если положительный — не лучше предыдущего. Таким образом, достигнем набора, при котором расходы будут наименьшими.

В общем случае условие (11) не обязательно. В нашем конкретном примере можно разделить потребности на части, так что условие (11) будет выполнено. Когда речь идет о микрорайоне-получателе, ясно, что решение будет настолько точнее, насколько малыми берем микрорайоны.

Дадим описание числового алгоритма при такой постановке задачи. Построим исходный план по уже знакомому нам способу.

1. Вычисляем оценки незанятых клеток

$$\tau_{is_i} = (Q_{\text{н}i_\text{н}j} - Q_{\text{з}i_\text{з}j})\,b_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; s_i = 1_i, 2_i, \ldots, z_i \qquad (12)$$

и вписываем их в соответствующие клетки. Если корреспонденция между i-м заводом и j-м потребителем неосуществима по некоторым причинам, то в эти клетки записываем знак запрещения ($\varnothing$) и не вычисляем оценки таких клеток.

2. Вычисление оценки строк начинаем с наименьшей оценки клетки в строке и продолжаем в порядке возрастания до тех пор, пока сумма потребностей в соответствующих столбцах станет равной мощности с точностью до параметра β_{is}, просуммируем выбранные оценки клеток и сумму записываем в последний столбец d против соответствующей строки, как ее оценку.

3. Выбираем наименьшую отрицательную оценку строки, отражающей одну из мощностей какого-то производителя. Таким образом, исключается рассмотрение всех остальных мощностей данного производителя. Аналогично, в порядке возрастания выбираем мощности других производителей. Процесс продолжаем до тех пор, пока сумма выбранных мощностей отвечает условию:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{a_{is_i} \in \omega_l} a_{is_i} \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}{\mu}. \qquad (13)$$

Выбираем такой набор ω_l, при котором сумма оценки строки наименьшая. Так получаем комбинацию производителей с фиксированными мощностями.

4. Если после решения получим неполное использование мощностей или разделение снабжения одного потребителя от более чем одного производителя, то увеличиваем целевую функцию при условии наименьшего прироста расходов.

5. Просуммируем оценки клеток, занятых после решения транспортной задачи, соблюдая вышеуказанные условия. Получим критерии набора: отрицательный или положительный. Если критерий набора отрицателен, значит, этот план лучше предыдущего, если положителен — не лучше.

6. Если критерий набора отрицателен, внесем этот план в новую таблицу. Вычисляем новые оценки клеток по формуле (12) или по той же формуле (12) вычисляем оценки клеток только одной незанятой строки,

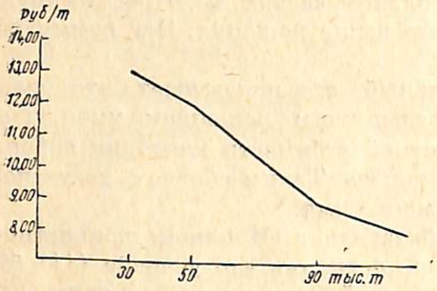

Рис. 1. Зависимость себестоимости 1 $т$ извести (в руб.) от мощности предприятия (в тыс. $т$)

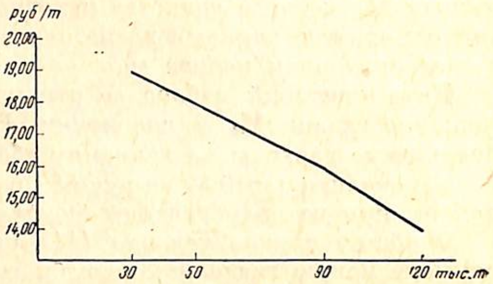

Рис. 2. Зависимость капиталовложений на 1 $т$ извести (в руб.) от мощности предприятия (в тыс. $т$)

а оценки клеток остальных строк — по формуле (14), уменьшающей объем вычислений:

$$\bar{\tau}_{is_ij} = \bar{\tau}'_{is_ij} - (\tau'_{is_ij} - \tau_{is_ij}), \tag{14}$$

где $\bar{\tau}_{is_ij}$ — оценка клетки, которую необходимо найти в новой матрице; $\bar{\tau}'_{is_ij}$ — вычисленная оценка клетки выбранной строки в новой матрице; τ'_{is_ij} — оценка клетки в строке старой матрицы, соответствующая выбранной и исчисленной строке новой матрицы; τ_{is_ij} — оценка клетки старой матрицы, соответствующая по месту клетке с искомой оценкой.

Вычисляем оценки строк согласно пункту 2.

7. Продолжаем вычисление согласно пунктам 2, 3, 4, 5 и 6 до получения положительного критерия. Если критерий набора положительный, берем следующий набор в порядке возрастания сумм оценок строк и вычисляем его критерий. Если ни при каких наборах с отрицательными суммами оценок строк отрицательный критерий набора не получается, это означает, что предыдущий план оптимальный.

На практике нет необходимости вычислять критерии всех наборов с отрицательными суммами оценок строк, потому что после испытания двух или трех таких наборов с наименьшими суммами вероятность существования лучшего плана практически исключается. Для плана, который получается после последней итерации, условия неразделения потребностей могут не соблюдаться.

Технику решения при помощи этого алгоритма задач выбора оптимальной мощности и размещения предприятий покажем на следующем конкретном примере планирования производства извести.

Потребности в извести по районам видны из табл. 2 (в тыс. $т$).

Существуют предприятия A_1 и A_3, производящие 30 тыс. $т$. извести в год. Намечены следующие проектные мощности: A_1 — мощностью 50 и 90 тыс. $т$ годовой продукции; A_2 — мощностью 30, 50 и 90 тыс. $т$ годовой продукции; A_3 — мощностью 50, 90 и 120 тыс. $т$ годовой продукции.

Отчетные данные о себестоимости продукции показывают, что предприятия с мощностью 30 тыс. *т* годовой продукции имеют себестоимость тонны извести 13 руб. Нормативы проектной себестоимости предприятий с мощностью 50, 90 и 120 тыс. *т* составляют соответственно 12; 9 и 8 руб. за тонну продукции. Зависимость себестоимости одной тонны извести от мощности предприятия показана на рис. 1.

Нормативы капиталовложений на одну тонну извести при различных мощностях следующие: при 30 тыс. *т* годовой мощности — 12,70 руб.; при 50 тыс. *т* — 11,50 руб.; при 90 тыс. *т* — 10,00 руб.; при 120 тыс. *т* — 8,00 руб.

К этим нормативам должны быть прибавлены капиталовложения в добычу сырья по 3 руб. на тонну; так как рандеман (коэффициент получения) извести — 0,5, т. е. из 2 *т* сырья получается 1 *т* извести, то капиталовложения в добычу сырья, приведенные к 1 *т* извести, равны в среднем 6 руб. Если принять во внимание эти данные и другие дополнительные капиталовложения, то суммарные нормативы, соответственно различным производственным мощностям, составляют: при 30 тыс. *т* — 19 руб. на тонну, при 50 тыс. *т* — 18 руб., при 90 тыс. *т* — 16 руб., при 120 тыс. *т* — 14 руб. Зависимость капиталовложений на одну тонну извести от мощности предприятий изображена на рис. 2.

Таблица 2

Районы-потребители	Фактическое потребление в предшествующем году	Среднегодовой прирост потребления	Общее необходимое среднегодовое количество
B_1	8	21	29
B_2	13	17	30
B_3	10	17	27
B_4	8	8	16
B_5	7	13	20
B_6	12	17	29
B_7	4	8	12
B_8	6	10	16
B_9	7	9	16
		Всего:	195

Транспортные расходы играют также большую роль в производстве и доставке извести потребителям. Для того чтобы рандеман и транспортные расходы на сырье и горючее включались в себестоимость, подсчитываем отдельно транспортные расходы только по перевозке готовой продукции.

Таблица 3

Расстояние, *км*	Транспортные расходы, руб. на тонну		Расстояние, *км*	Транспортные расходы, руб. на тонну	
	ж. д. вагоны грузоподъемностью 15—20 *т*	автомобили грузоподъемностью 10 *т*		ж. д. вагоны грузоподъемностью 15—20 *т*	автомобили грузоподъемностью 10 *т*
5	—	0,69	40	0,855	3,13
10	—	1,04	50	0,960	3,67
15	—	1,39	70	1,160	4,63
20	—	1,77	100	1,465	5,69
25	—	2,13	150	1,950	—
30	—	2,48	200	2,755	—
35	—	2,82	250	3,560	—

Зависимость от расстояния транспортных расходов по перевозке одной тонны извести железнодорожными вагонами и автомашинами видна из табл. 3.

В основу анализа различных категорий расходов положены комплексные расходы, называемые характеристикой связи. В конкретном случае характеристики связи определяются из вышеуказанных рисунков и таблиц. Так, например, для первого района-производителя и первого пункта-

Таблица 4

Виды расходов	Мощность производителя		
	30 тыс. *т*	50 тыс. *т*	90 тыс. *т*
Себестоимость, в том числе транспортные расходы на сырье и горючее на тонну извести	13,00	12,00	9,00
Капиталовложения на тонну извести	—	12,00	10,00
Удельные капиталовложения в добычу сырья, приведенные к тонне извести	—	6,00	6,00
Транспортные расходы на готовую продукцию	3,56	3,56	3,56
Всего расходов	16,56	33,56	28,56

Таблица 5

Производители		Потребители									
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	недоиспользованная мощность
A_1	30000	16,56 29000	17,56	17,06	15,75	14,16	14,00	19,69	17,36	16,56	+1000
	50000	33,56	34,56	34,06	32,75	31,16	31,00	36,69	34,36	33,56	
	90000	28,56	29,56	29,06	27,75	26,16	26,00	31,69	29,36	28,56	
A_2	30000	34,75	35,75	35,25	33,46	32,69	33,16	38,69	34,75	32,85	
	50000	32,75	33,75	33,25	31,46 16000	30,69	31,16	36,69	32,75 16000	30,85 16000	+2000
	90000	27,75	28,75	28,25	26,46	25,69	26,16	31,69	27,75	25,85	
A_3	30000	32,85	33,85	33,35	33,46	33,95	35,56	39,15	33,46	33,95	
	50000	30,85	31,85	31,35	31,46	31,95	33,56	37,15	31,46	31,95	
	90000	25,85	26,85	26,35	26,46	26,95	28,56	32,15	26,46	26,95	
	120000	22,85	23,85 30000	23,35 27000	23,46	23,95 20000	25,56 29000	29,15 12000	23,46	23,95	+2000
		29000	30000	27000	16000	20000	29000	12000	16000	16000	

потребителя характеристики связи для каждой отдельной мощности показаны в табл. 4 (в руб. на тонну).

Таким же способом определяем характеристики связи по остальным пунктам-производителям и пунктам-потребителям. Найденные характеристики связи даются в табл. 5.

Таблица 6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0 0	−6,29 −189	−6,29 −170	−15,71 −251	−9,79 −196	−11,56 −335	−9,46 −114	−15,39 −246	−14,29 −229	−335
2	17,00 493	10,71 321	10,71 289	1,29 21	7,21 144	5,44 158	7,54 90	1,61 26	2,71 43	90
3	12,00 348	5,71 171	5,71 154	−3,71 −59	2,21 44	0,44 13	2,54 30	−3,39 −54	−2,29 −37	−107
4	18,19 528	11,90 357	11,90 321	2,00 32	8,74 175	7,60 220	9,54 114	2,00 32	2,00 32	146
5	16,19 470	9,90 297	9,90 267	0 0	6,74 135	5,60 162	7,54 90	0 0	0 0	0
6	11,19 325	4,90 147	4,90 132	−5,00 −80	1,74 35	0,60 17	2,54 30	−5,00 −80	−5,00 −80	−193
7	16,29 472	10,00 300	10,00 270	2,00 32	10,00 200	10,00 290	10,00 120	0,71 11	3,10 50	131
8	14,29 414	8,00 240	8,00 216	0 0	8,00 160	8,00 232	8,00 96	−1,29 −21	1,10 18	−3
9	9,29 269	3,00 90	3,00 81	−5,00 −80	3,00 60	3,00 87	3,00 36	−6,29 −101	−3,90 −62	−126
10	6,29 182	0 0	0 0	−8,00 −128	0 0	0 0	0 0	−9,29 −149	−6,90 −110	−387

Строим исходный план методом, аналогичным методу северо-западного угла, распределяем количество продукции в зависимости от мощностей или строим исходный план на основе наименьших характеристик по столбцам, соблюдая ограничения в полном использовании мощности. Это ограничение в нашем конкретном примере составляет 12% мощности. Считается, что при отклонении мощности до 12% характеристики связи существенно не меняются. Отклонение должно быть предусмотрено в любом случае, так как оно дает возможность выбрать из большого количества вариантов оптимальный план. Например, при мощности предприятия в 30 тыс. *т* годовой продукции отклонение будет до 3,6 тыс. *т*, а параметр использования мощности — от 0,88 до 1, что означает использование мощности от 26,4 до 30 тыс. *т*.

Далее рассчитываем оценки клеток как разницу между $Q_{is^{i}j}$ в занятой клетке и остальными $Q_{is_{i}j}$ в клетках j-го столбца, которую умножаем на b_j. Например, оценка первой и второй клетки в первом столбце будет $\tau_{11}^{30} = (16{,}56-16{,}56)29 = 0$ и $\tau_{11}^{50} = (33{,}56 - 16{,}56)29 = 493$. Так, получаем разницу между характеристиками в занятой и остальных клетках, а также оценки клеток, указанные в табл. 6.

Вычисляем оценки по строкам, начиная с наименьшей и далее в порядке возрастания величины оценок в строке до полного исчерпывания мощности с точностью до параметра β_{is}, и суммируем потребности в столбцах по отмеченным клеткам (см. табл. 6). Выбираем наименьшую оценку

Таблица 7

Производители		Потребители									
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	недоиспользованная мощность
A_1^{30}	30000	16,56	17,56	17,06	15,75	14,16	14,00 29000	19,69	17,36	16,56	+1000
A_2^{50}	50000	32,75	33,75	33,26	31,46	30,69 20000	31,16	36,69 12000	32,75	30,85 16000	+2000
A_3^{120}	120000	22,85 29000	23,85 30000	23,35 27000	23,46 16000	23,95	25,56	29,15	23,46 16000	23,95	+2000
		29000	30000	27000	16000	20000	29000	12000	16000	16000	

Таблица 8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d
1	—182,41	—188,70	—169,83	—123,36	—330,60	0	—204	—97,60	—228,64	—432,64
2	310,59	321,30	289,17	148,64	9,40	493,00	0	174,40	43,36	52,76
3	165,59	171,30	154,17	68,64	—90,60	348	—60	94,40	—36,64	—24,20
4	345,10	357,00	321,30	160	40	555,64	24	180,64	32	56
5	287,10	297	267,30	128	0	497,64	0	148,64	0	0
6	142,10	147,00	132,30	48	—100	352,64	—60	68,64	—80	—192
7	290	300	270	160	65,20	625,24	29,52	160	49,60	79,12
8	232	240	216	128	25,20	567,24	5,52	128,00	17,60	48,32
9	87	90	81	48	—74,80	422,24	—54,48	48	—62,40	—95,68
10	0	0	0	0	—134,80	335,24	—90,48	0	—110,40	—335,68

из всех оценок строк, определяющую завод, мощность которого будет включена в следующий план. Продолжаем в порядке возрастания величины оценок строк выбирать заводы до тех пор, пока сумма выбранных мощностей будет равна сумме потребностей или будет превышать ее с точностью до множителя $(1 - \beta_{i\ i})$. Выбранные оценки строк (—387, —335 и 0) соответствуют заводам A_3 с мощностью 120 тыс. $т$, A_1 с мощностью

Таблица 9

Производители		Потребители									
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	недоиспользованная мощность
A_1	30000	16,56	17,56	17,06	15,75	14,16	14,00 29000	19,69	17,36	16,56	+1000
A_2	90000	27,75	28,75	28,25	26,46 16000	25,69 20000	26,15	31,69 12000	27,75 16000	25,85 16000	+10000
A_3	90000	25,85 29000	26,85 30000	26,35 27000	26,46	26,95	28,56	32,15	26,46	26,95	+4000

30 тыс. $т$ и A_2 с мощностью 50 тыс. $т$; при этом сумма выбранных мощностей удовлетворяет условию (в тыс. $т$): $195 \leqslant 200 \leqslant 221{,}6$.

При таком выборе мощностей заводов и их размещения, распределяем продукцию между потребителями любым методом решения транспортной задачи, что видно из табл. 7.

Исчисляем критерий этого набора, суммируя оценки занятых клеток: $-335 + 135 + 90 + 0 + 182 + 0 + 0 - 128 - 149 = -205$; значит, новый план дает экономию против предыдущего на 205 000 руб.

Продолжаем исчислять новые оценки клеток таким же образом, отправляясь от занятых клеток нового плана. Описанным выше способом получаем оценки клеток только в одной из строк (в которой не фигурирует занятая клетка), а оценки клеток в остальных строках находим по формуле (14).

Так, например, исчисляем оценки клеток в третьей строке (новой матрицы), которая не содержит занятых клеток: $(28,56-22,85)\cdot 29 = 165{,}59$ и т. д. Затем получаем оценки клеток в остальных строках; например, если работаем с точностью до второго знака, получаем для клеток (1,2), (2,2) ... (2,4):

$$\begin{aligned}
\tau_{12}^{30} &= 171{,}30-(171{,}30-(-188{,}70))=-188{,}70\\
\tau_{22}^{50} &= 171{,}30-(171{,}30-321{,}30)=321{,}30\\
&\vdots\\
\tau_{21}^{50} &= 68{,}64-(-59{,}00-21{,}00)=148{,}64
\end{aligned}$$

и т. д., что видно из табл. 8.

Новые оценки строк вписываем в последний столбец табл. 8. Выбор мощностей производим в порядке возрастания величин оценок строк с точностью потребностей до множителя $(1-\beta_{is_i})$. Такой последовательностью является: $-432{,}64$, $-335{,}68$, -192; но в ней мощности превышают потребности с точностью до определенного параметра. Следовательно, необходимо искать на следующем заводе такую мощность, которая дает общую сумму мощностей в границах (в тыс. $т$):

$$195 \leqslant \sum_{i=1}^{3} a_{is_i} \leqslant 221{,}6.$$

При таком наборе $(-432{,}64,\ -192,\ -95{,}68)$ сумма мощностей равна 210 тыс. $т$, т. е. находится в определенных границах. Распределяем продукцию между потребителями, как показано в табл. 9.

В соответствии с табл. 9 исчисляем критерий этого набора: $0 + 48 - 100 - 60 + 68{,}64 - 80 + 87 + 90 + 81 = 134{,}64$. Так как он положителен, суммарные расходы по новому плану дороже предыдущего на 134640 руб.

Ищем другой набор отрицательных оценок строк, который покрывает потребности мощностями. Таким набором является комбинация строк с оценками —355,68 и —192, которые соответствуют заводам с общей мощностью 210 тыс. *т*. Распределение продукции дано в табл. 10.

Критерий набора $(-100 + 352{,}64 - 60 - 80 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 112{,}64)$ показывает, что суммарные расходы по этому плану дороже предыдущего на 112640 руб. Этим исчерпаны наборы с отрицательными оценками строк. Следовательно, не существует лучшего набора по сравнению с предыдущим; он является оптимальным (см. табл. 7).

Таблица 10

Производители		Потребители									
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	недоиспользованная мощность
A_1	90000	28,75	28,75	28,25	26,46	25,69 20000	26,16 29000	31,69 12000	27,75	25,85 16000	+13000
A_2	120000	22,85 29000	23,85 30000	23,35 27000	23,46 16000	23,95	25,56	29,15	23,46 16000	23,95	+2000

На последней итерации план может быть найден без выполнения условия неразделения потребностей.

Предлагаемый метод может быть использован для выбора мощностей и территориального размещения предприятий промышленности, транспорта, строительства, торговли и других отраслей народного хозяйства.

Если мы включим в исходный план и заводы, находящиеся вне района, для которого решаем задачу, то оптимальное распределение покажет, какие заводы тесно примыкают к данному району. Это наводит на мысль о целесообразности разделить страну на несколько районов, для которых могут существовать самостоятельные решения задач.

С развитием науки и техники развиваются методы решения комплексных задач выбора мощности и территориального размещения производственных предприятий с целью ускоренного развития производительных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Пробст. Размещение социалистической промышленности. М., Экономиздат, 1962.
2. Проблемы оптимального планирования, проектирования и управления производством. Тр. экон. конф. на экон. факультете МГУ. М., Изд-во МГУ, 1963.
3. Математические методы и проблемы размещения производства. Сб. под ред. Н. Я. Бирмана и Л. Е. Минца. М., Экономиздат, 1963.
4. Методы и алгоритмы решения транспортной задачи. Сб. под ред. В. С. Немчинова и др. Вып. 1. М., Госстатиздат, 1963.
5. Планирование и экономико-математические методы. Сб. под ред. Н. П. Федоренко. М., «Наука», 1964.
6. А. Л. Лурье. Методы линейного программирования и их применение в экономике. М., «Статистика», 1964.
7. Применение математики при размещении производительных сил. Сб. под ред. Н. Н. Некрасова. М., «Наука», 1964.
8. НИИЭС Госстроя СССР. Методические указания по определению оптимальных схем перевозок, снабжения и размещения предприятий с помощью линейного программирования. М., «Экономика», 1964.
9. А. Е. Пробст. Методология за определение на икономическата ефективност на вариантите за териториалното разпределение на промишлеността. Икономическа мисъл, София, 1964, кн. 5.
10. Вычислительные методы и программирование. Сб. под ред. В. В. Воеводина. М., Изд-во МГУ, 1965.
11. Д. Брадистилов. Териториално разпределение на дървообработващата и мебелна промишленост в НР България. София, Изд-во БАН, 1965.
12. R. Ackoff. Progress in Operations Research. V. 1. New York, 1961.

Поступила в редакцию
24 V 1965