ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 6

БЛОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Б. А. ЩЕННИКОВ

(МОСКВА)

Настоящая работа посвящена итерационному методу решения системы линейных уравнений

$$x = Ax + B, \tag{1}$$

где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица, обладающая следующими свойствами:

$$0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1, \quad \alpha_j = \underset{i}{} a_{ij} \leqslant 1,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Система (1) появляется при моделировании процесса народнохозяйственного планирования и называется системой уравнений межотраслевого баланса (в стоимостной форме). Свойства (2) вытекают из смысла самой задачи. В настоящее время основным препятствием для ее численного анализа является большая размерность матрицы A. Народное хозяйство является сложной системой. Реальное число переменных в задаче (1) измеряется десятками миллионов. Поэтому численное решение задачи (1) естественно представить в виде последовательного решения задач меньшей размерности. Такой процесс решения (итерационный процесс последовательного агрегирования и дезагрегирования) построен из экономических соображений в [1]. В настоящей работе рассматривается некоторый специальный частный случай этого процесса, по существу являющийся новым методом решения системы линейных уравнений (1).

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ решение системы (1). Сложив все уравнения системы (1), получим скалярное уравнение

$$X = aX + b. \tag{3}$$

Здесь $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $a = \underset{i=1}{} \alpha_i p_i$, $p_i = x_i / X$, $b = b_1 + \ldots + b_n$.

Обратно, если известно X — решение уравнения (3), то

$$x_i = \Big(\sum_{j=1} a_{ij} p_j \Big) X + b_i. \tag{4}$$

Видно, что задача (1) будет решена, если удастся определить числа $p_i \Big(\sum_i p_i = 1 \Big)$ так, что $p_i = x_i / X$.

Пусть задано $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n)$ — некоторое начальное приближение решения системы (1). Положим

$$X^{(0)} = \sum_{i=1} x_i^{(0)}, \quad p_i^{(0)} = x_i^{(0)} / X^{(0)}.$$

Построим $X^{(1)}$ (индекс вверху означает номер итерации) по следующему правилу

$$X^{(1)} = (\alpha_1 p_1^{(0)} + \ldots + \alpha_n p_n^{(0)}) X^{(1)} + b, \quad \text{или} \quad X^{(1)} = a^{(0)} X^{(1)} + b, \tag{5}$$

и далее

$$X^{(N+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j{}^{(N)} \right) X^{(N+1)} + b, \tag{6}$$

$$x_i^{(N+1)} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j^{(N)} \right) X^{(N+1)} + b_i; \quad p_j^{(N)} = x_j^{(N)} / X^{(N)}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем

$$p_i^{(N+1)} = x_i^{(N+1)} / X^{(N+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j^{(N)} + r_i \sum_{j=1}^{n} \beta_i p_j^{(N)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + r_i \beta_j) p_j^{(N)}, \tag{8}$$

$$r_i = b_i / b, \quad \beta_j = 1 - \alpha_j.$$

Введем матрицу

$$S = \{s_{ij}\},$$

$$s_{ij} = a_{ij} + r_i \beta_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

и перепишем (8) в следующем виде:

$$p^{(N+1)} = S p^{(N)} = S^{N+1} p^{(0)}. \tag{9}$$

S обладает следующими свойствами: $s_{ij} \geqslant 0$ и $\sum_i s_{ij} = \sum_i (a_{ij} + r_i \beta_i) = = \alpha_i + \beta_j = 1$, т. е. S^T является стохастической матрицей некоторой регулярной марковской цепи.

Будем предполагать, что матрица S неразложима. Достаточным условием для этого является неразложимость матрицы A. Это свойство матрицы A с экономической точки зрения означает, что все продукты x_i участвуют в производстве друг друга, хотя бы и косвенно. Более точно скажем, что для любых двух продуктов x_i и x_j существует последовательность индексов $i = i_1, i_2, \ldots, i_k = j$, что $a_{i_r i_{r+1}} > 0$ для $r = 1, \ldots, k-1$.

Известно (см., например, [2]), что:

а) последовательность $\{S^N\}$ сходится к некоторой матрице T;

б) векторы-столбцы матрицы T одинаковы и равны вектору $t > 0$;

в) для любого вектора p $\left(p_i > 0, \ \sum_i p_i = 1\right)$

$$\lim_{N \to \infty} S^N p = t \quad \text{и} \quad t = St.$$

Из (9) и свойств матрицы S следует, что при $N \to \infty$ $p^{(N+1)} \to p$ и

$$X^{(N+1)} = \frac{b}{\sum_j \beta_j p_j^{(N)}} \to X, \qquad x_i^{(N+1)} \to x_i.$$

Для оценки скорости сходимости процесса воспользуемся представлением (см. [2, гл. 1])

$$S^N = T + \lambda^N S_1, (N), \tag{10}$$
$$\lambda = \{\max_i \lambda_i < 1 \mid \det |S - \lambda_i E| = 0\}.$$

$S_1(N) = \{s_{ij}(N)\}$ — дифференциальная матрица, $\sum_i s_{ij}(N) = 0$, $|s_{ij}(N)| \leqslant c$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Используем полученные результаты для построения итерационного процесса, более удобного с вычислительной точки зрения.

Назовем X_k J_k-агрегированным переменным, если

$$X_k = \sum_{i \in J_k} x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, l; \quad J_j \cap J_i = 0; \quad l \neq j; \quad \bigcup_{i=1}^{l} J_i = (1, 2, \ldots, n).$$

При агрегировании матрица $A_{(n \times n)}$ свертывается в матрицу $\bar{A}_{(l \times l)}$. Элементы $\bar{a}_{ij}$ новой матрицы $\bar{A}$ получаются следующим преобразованием элементов матрицы A:

$$a_{ij} = \sum_{s,\,t} a_{s,\,t} \bar{p}_t, \ s \in J_i, \ t \in J_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, l, \tag{11}$$

$$\bar{p}_t = x_t / X_j, \qquad \sum_{t \in J_j} \bar{p}_t = 1.$$

Обозначим $\bar{b}_i = \sum_{s \in J_i} b_s$, и $\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_l \end{pmatrix}$.

Тогда система (1) преобразуется в

$$X = \bar{A}X + \bar{B}. \tag{12}$$

При построении итерационного процесса задаем, как и раньше, начальное значение $x_s^{(0)}$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

На первом шаге итерации можно получить значение $X_1, \ldots, X_l$ в результате решения системы

$$X^{(1)} = \bar{A}^{(0)} X^{(1)} + \bar{B}. \tag{13}$$

Элементы $\bar{a}_{ij}^{(0)}$ матрицы $\bar{A}^{(0)}$ получаются из (11), если положить

$$\bar{p}_t = \bar{p}_t^{(0)} = \frac{x_t^{(0)}}{X_j^{(0)}}, \quad t \in J_j; \quad X^{(0)} = \sum_{t \in J_j} x^{(0)}; \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Однако знание точного решения системы (13) не является, по существу необходимым.

Построим процесс решения (1) следующим образом.

Определим $Y^{(0)} = \sum_{k=1}^{l} X_k^{(0)}$;

$$q_k^{(0)} = X_k^{(0)}/Y^{(0)}, \quad \bar{\alpha}_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{l} \bar{a}_{ij}^{(0)},$$

$$\bar{a}^{(0)} = \sum_{j=1} \bar{\alpha}_j^{(0)} q_j^{(0)}, \quad \bar{b} = \sum_{i=1}^{l} \bar{b}_i. \tag{14}$$

Пусть $Y^{(1)}$ получается в результате решения скалярного уравнения

$$Y^{(1)} = \bar{a}^{(0)} Y^{(1)} + \bar{b}. \tag{15}$$

Вместо того чтобы определить $X_k^{(1)}$ из (13), положим

$$X_k^{(1)} = Y^{(1)} q_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{16}$$

далее получим

$$x_s^{(1)} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{t \in J_j} a_{s,\,t} \bar{p}_t^{(0)} X_j^{(0)} + b_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Аналогично $x_s^{(N+1)}$ — значение x_s на $(N+1)$-м шаге итерации получим по формуле

$$x_s^{(N+1)} = \sum_{j=1}^{l} \sum_{t \in J_j} a_{s,\,t}\, \bar{p}_t^{(N)} X_j^{(N+1)} + b_s;$$
$$p_t^{(N)} = x_t^{(N)}/X_j^{(N)}, \quad t \in J_j,$$
$$X^{(N+1)} = Y^{(N+1)} q^{(N)}, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \quad Y^{(N+1)} = \bar{a}^{(N)} Y^{(N+1)} + b; \tag{18}$$
$$q_j^{(N)} = X_j^{(N)}/Y^{(N)}.$$

Назовем процесс решения системы (1) одношаговым итерационным процессом, а процесс, описанный только что, двухшаговым. Будем иметь в виду, что в первом случае все переменные системы (1) были объединены сразу в одно переменное X, сейчас же аналогичный процесс объединения произошел за два шага.

В результате итерации с номером N двухшагового процесса были получены некоторые значения переменных $x_s = \bar{x}_s^{(N)}$. Пусть $x_s = x_s^{(N)}$ — значение x_s после N-й итерации в одношаговом процессе объединения. Доказательство сходимости двухшагового процесса следует из приведенных ниже рассуждений.

Начальные значения для обоих процессов одинаковы, следовательно,

$$p_t^{(0)} = \bar{p}_t^{(0)} q_j^{(0)}, \quad t \in J_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l. \tag{19}$$

Сравним уравнения (4) и (15).

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{l} \bar{b}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b,$$

$$\bar{a}^{(0)} = \sum_{j=1}^{l} \bar{\alpha}_j^{(0)} q_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \bar{a}_{ij}^{(0)} q_j^{(0)} = \sum_{\substack{s \in \bigcup J_i \\ t \in \bigcup J_j}} \sum a_{s,\,t} p_t^{(0)} = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} p_j^{(0)} = a^{(0)}. \tag{20}$$

Из (4), (15) и (19), (20) получаем

$$X^{(1)} = Y^{(1)}. \qquad (21)$$

Используя (7), (14), (17), (19), (21) и то, что множества J_j не пересекаются, получим

$$\bar{x}_s^{(1)} - b_s = \sum_{j=1} \sum_{t \in J_j} a_{s,\,t} \bar{p}_t^{(0)} q_j^{(0)} Y^{(1)} = \sum_{t \in \bigcup J_j} a_{s,\,t} p_t^{(0)} X^{(1)} = x_s^{(1)} - b_s.$$

Далее нужно воспользоваться соображениями индукции, чтобы доказать равенство $\bar{x}^{(N)} = x_s^{(N)}$.

Процесс решения системы (1) можно естественным образом представлять не только двухшаговым, но и многошаговым. В трехшаговом процессе, например, все переменные $x_1, \ldots, x_n$ можно объединять сначала в $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$ $((x_1, \ldots, x_n) \to (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n))$, затем $(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_{n_1}) \to X_1, \ldots \ldots, X_{n_2}) \to X$.

В заключение необходимо отметить, что описанный метод дает возможность численно решать задачу (1) за счет одновременного параллельного использования многих ЭВМ, каждая из которых вмещает в себя лишь часть матрицы A, либо некоторую свертку $\bar{A}$ матрицы A.

В том случае, когда (1) интерпретируется как задача народнохозяйственного планирования, разработанный метод позволяет ее решить путем последовательного решения ряда отраслевых задач.

Автор выражает глубокую признательность профессору Д. Б. Юдину за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Дудкин, Э. Б. Ершов. Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов. Плановое хозяйство, 1965, № 5.
2. Ховард. Динамическое программирование и марковские процессы. М., «Сов. радио», 1964.
3. Р. Аллен. Математическая экономия. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

Поступила в редакцию
17 V 1965