

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАНОВЫХ ЗАДАНИЙ В ОТРАСЛИ

(на примере целлюлозно-бумажной промышленности)

В. Г. МЕДНИЦКИЙ

(МОСКВА)

Лабораторией математических моделей управления ЦЭМИ и Лабораторией экономических исследований ЦНИИБ в 1963—1964 гг. были проведены работы по составлению оптимального плана загрузки мощностей целлюлозно-бумажной промышленности.

Общие результаты работы освещены в статье В. Ф. Пугачева и Б. З. Смоляницкого (см. [1]).

Настоящая статья посвящена описанию вычислительного алгоритма, разработанного для решения экстремальной задачи, к которой была сведена проблема построения оптимального плана. Этот метод не связан с конкретной спецификой данной отрасли и поэтому может найти применение в других отраслях.

Общая идея метода состоит в описании функционирования системы итеративной схемой определенного типа.

Алгоритм разработан в процессе длительного экспериментирования на ЭВМ, и окончательная схема оказалась сложной. Поэтому чисто математических результатов типа доказательства сходимости не получено. Основным оправданием является экспериментальный факт: задача, содержащая около сотни наименований в номенклатуре продукции и видов оборудования (100×100), потребовала для своего решения около часа машинного времени (БЭСМ-2). Алгоритм разработан при участии А. К. Пителина и А. А. Тхайцукова. В чисто математическом смысле задача, метод решения которой здесь излагается, известна. Впервые она описана Л. В. Канторовичем [2].

1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В результате обсуждения, проведенного в Лаборатории экономических моделей управления ЦЭМИ АН СССР, были выделены следующие основные черты, характеризующие данную отрасль.

Производство осуществляется на небольшом количестве «крупных» единиц оборудования — бумагоделательных машинах, общее количество которых исчисляется по отрасли в целом несколькими сотнями. Каждая из этих машин — комплекс устройств, охватывающий все стадии переработки сырья вплоть до получения товарной продукции, которой являются бумага и картон различных типов. В этом смысле отрасль может рассматриваться как чисто горизонтальное объединение сравнительно небольшого числа параллельно действующих объектов со значительной взаимозаменяемостью — машина может выпускать различные виды бумаги и одна и та же бумага может вырабатываться на различных машинах. Часть производства осуществляется на специализированных машинах, выпускающих один вид бумаги, другая — деспециализирована.

Деспециализация является отрицательным моментом не только потому, что требует частой перестройки технологического процесса (за счет чего по данным ЛЭИ ЦНИИБ теряется от 5 до 8% в общем выпуске продукции [3]), но еще и потому, что ряд машин загружается технологически невыгодными видами продукции.

Для устранения этих несоответствий необходим глобальный анализ по крайней мере всей неспециализированной части отрасли, что невыполнимо без серьезного применения математических методов.

Изучение отрасли при помощи математической модели позволяет провести необходимый по существу вопроса глобальный анализ. Тем не менее этот подход также имеет свои ограничения и недостатки. Главный из них состоит в том, что в математической модели не могут быть учтены все факторы, от которых зависит реальное производство. В результате, изучая картину целого, недоступную при старых методах исследования, можно допустить значительно большие погрешности в деталях. Поэтому, несмотря на общую правильность методологии, конкретная модель может приводить к неверным результатам и должна рассматриваться как гипотеза, подлежащая дальнейшей проверке. Анализ оптимального решения может показать как пригодность модели для систематического изучения отрасли, так и необходимость внесения в нее уточнений.

Простая модель, которая здесь описана, по-видимому, подходит для решения некоторых вопросов, связанных с составлением планов годового производства изучаемой отрасли, и это является одним из основных результатов работы.

В итоге проведенного обсуждения была намечена следующая структурная схема отрасли: бумагоделательная машина — основной исходный элемент, осуществляющий производство, и общий выпуск отрасли должен рассматриваться как сумма выпусков машин. Звено — предприятие, важное в практическом планировании, непосредственно в расчетах оптимального плана не фигурирует. Информация, необходимая для предприятия, может быть получена прямым счетом после составления оптимального плана отрасли.

Возможности машины по выпуску продукции могут ограничиваться действием факторов двух типов:

1) обеспеченностью исходным сырьем (в основном целлюлоза), поставки которого, однако, могут изменяться в довольно широких пределах;

2) большим количеством факторов местного значения, таких, как технические возможности машины, обеспеченность электроэнергией, паром и т. п.

Анализ, проведенный ЛЭИ ЦНИИБ, показал, что сырьевые факторы отрасль не лимитируют и поэтому могут не приниматься во внимание. Точный учет действия факторов второй группы потребовал бы точного описания технологических процессов, что привело бы к сложной модели.

Таблица 1

Основной производственный способ	Номер бумаги					
	1	2	31	45	53	...
Режим 1	×	×			×	
» 2		×	×	×		
» 3		×	×	×		×
» 4	×		×	×	×	
.						
.						
.						

Поэтому в качестве исходных данных для расчета было принято аппроксимационное описание машины.

Исходные данные для аппроксимации могут быть получены из сопоставления среднечасовой выработки и среднего числа часов работы машины в течение суток, которые входят в систему отчетных показателей предприятия. В результате для каждой из машин можно составить компактную таблицу (табл. 1).

Номера бумаги здесь должны быть заданы в соответствии с единой классификацией, составленной для отрасли в целом. В основу классификации режимов был положен принцип максимума выпуска какого-нибудь одного профилирующего в данном способе производства вида бумаги. Численное значение этой величины на планируемый период находится в диагональной клетке таблицы и может быть получено на основании отчетных данных. Внедиагональные элементы показывают сопутствующее производство (так называемый отбор), который представляет побочную продукцию более низкого качества, получаемую в качестве отходов на ранних стадиях технологического процесса.

Совокупность режимов может быть теперь истолкована как набор опорных точек многогранника, аппроксимирующего производственные возможности машины [4, 5].

Если ввести в качестве обозначений:

x — суммарный выпуск отрасли (вектор); j — номер машины ($1 \leq j \leq n$); x_j — выпуск j -й машины (вектор); a_l^j — l -й режим на j -й машине (вектор, $1 \leq l \leq N_j$); ξ_l^j — интенсивность использования l -го режима на j -й машине в плановом периоде, то легко получить следующее описание выпуска отрасли:

$$x = \sum_j x_j, \quad (1)$$

$$x_j = \sum_l a_l^j \cdot \xi_l^j \quad (2)$$

$$\sum_l \xi_l^j \leq 1, \quad \xi_l^j \geq 0; \quad (3)$$

(величина планового периода принята за единицу).

В дальнейшем для краткости соотношения (1) — (3) будут называться многогранником A . Этот многогранник будет рассматриваться как точное описание множества допустимых значений выпуска отрасли.

Для окончательной постановки экстремальной задачи необходимо задать критерий — обобщенный, скалярный показатель, максимизация которого отвечала бы представлению о движении отрасли к максимальному выпуску продукции. Эта «скаляризация» может быть выполнена двумя способами:

Можно жестко задать пропорции между компонентами искомого вектора x , т. е. определить некоторый основной комплект продукции и искать оптимальный план как максимальное число этих комплектов, разрешая по отдельным компонентам отклонение от пропорций в сторону увеличения. Критерий такого типа рассматривался в работах Л. В. Канторовича [2].

Другой путь состоит в построении некоторой системы взвешивающих коэффициентов, каждый из которых оценивает значимость единицы продукции соответствующего типа, с последующей максимизацией взвешенной суммы компонент вектора выпуска. Взвешивающие коэффициенты, вообще говоря, зависят от взвешиваемых объемов; поэтому критерий такого типа должен быть нелинейным. Однако непосредственно в точке оптимума чле-

ны второго порядка и выше можно отбросить и использовать в качестве критерия линейное соотношение.

Альтернатива тогда состоит в следующем: при размерности x , равной m , можно задать либо $m - 1$ число, характеризующее направление луча пропорций (вектор l), либо тем же числом параметров определить направляющий вектор гиперплоскости p .

Как показывает рис. 1, при точном определении векторов p и l оба способа описания функционала приводят, вообще говоря, к одинаковому

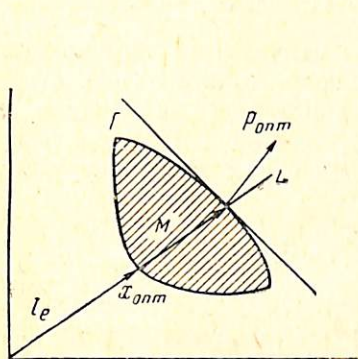


Рис. 1. Оптимальное решение с точки зрения двух равносильных критериев

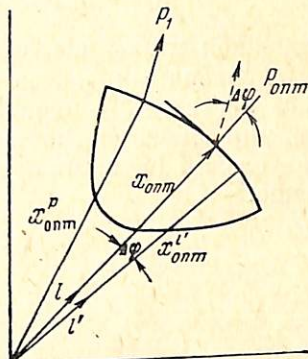


Рис. 2. Отклонение решений от оптимального при не точно известных параметрах критериев

результату. Однако нельзя быть уверенным в точности определения ни одного из этих векторов. Рис. 2 показывает, что ошибка в определении векторов l и p приводит к небольшому отклонению от оптимальности в первом случае и к значительному — во втором (ограничивающая поверхность Γ полого).

Таким образом, если оптимальное решение находится на поверхности небольшой кривизны, то оно менее чувствительно к ошибкам, допускаемым в определении пропорций комплекта, чем к ошибкам в определении коэффициентов вектора опорной гиперплоскости.

В рассматриваемой задаче предполагаемый комплект может быть оценен из различных соображений, в то же время надежная информация для определения вектора внешних оценок отсутствует. Поэтому в качестве критерия было выбрано требование максимизации продукции в заданных пропорциях. Если обозначить через x вектор основного комплекта и через θ — количество этих комплектов, то соотношения: $\max \theta$ при $x \geq \theta x$, $x \in A$ позволяют завершить постановку задачи.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Простые преобразования позволяют написать полученную экстремальную задачу в следующей форме:

$$\max \theta$$

при ограничениях

$$\sum_{j, l} a_l^j \xi_l^j \geq \theta \bar{x}, \quad (4)$$

$$\sum_l \xi_l^j = 1, \quad \xi_l^j \geq 0, \quad (5)$$

где равенства в (5) представляют условия полного использования мощностей отрасли (в дальнейшем для краткости задача Б).

Двойственная задача имеет вид:

$$\min \sum_{j=1}^n \mu_j$$

при ограничениях

$$\mu_j - (p, a_l^j) \geq 0, \quad p \geq 0, \quad (p, x) = 1. \quad (6)$$

Дальнейшей целью является анализ структуры сопряженных задач. Первый из очевидных фактов состоит в том, что замена в Б функционала величиной $k\theta$, где k — произвольная константа, не меняет (5). Поэтому нормирующее соотношение в (6), очевидно, не существенно. В результате условия оптимальности решений обеих задач могут быть написаны в виде:

$$\theta x - \sum_{l,j} a_l^j \xi_l^j \leq 0, \quad (7)$$

$$\sum_l \xi_l^j = 1, \quad (8)$$

$$\xi_l^j \geq 0, \quad (9)$$

$$q \geq 0, \quad (7')$$

$$V_j - (q, a_l^j) \geq 0. \quad (9')$$

Ограничения (7'), (9') имеют очень простую структуру. Произвольно определив вектор q (например, $q = q^t$), легко получить их допустимое решение, положив

$$V_j^t = \max_{1 \leq l \leq N_j} (q^t, a_l^j). \quad (10)$$

В оптимальном плане соотношения (9), (9') должны быть связаны условиями дополняющей нежесткости [6]. Поэтому если равенство $V_j^t = (q^t, a_l^j)$ выполняется для множества индексов L_j , то набор ξ_l^j в (9) с учетом (8) должен удовлетворять условиям:

$$\xi_l^j = 0, \quad \text{если } l \notin L_j \quad \text{и} \quad \sum_{l \in L_j} \xi_l^j = 1. \quad (11)$$

Пусть, однако, установлено правило однозначного выбора элемента $l_j \in L_j$, и будем полагать:

$$\hat{\xi}_l^j = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq l_j \\ 1, & \text{если } l = l_j. \end{cases} \quad (12)$$

Образуем вектор

$$G^t = \sum_{l,j} a_l^j \hat{\xi}_l^j. \quad (13)$$

Этот вектор является допустимым значением выпуска отрасли ($G^t \in A$). Кроме того, для

$$\min_j \{g_i^t / x_i\} = v_t \quad \text{и} \quad \mu_t = \sum_j V_j^t / (q^t, x) \quad (14)$$

имеет место неравенство

$$v_t \leq \theta \leq \mu_t. \quad (15)$$

И если $v_t = \mu_t$, то решение оптимально [7].

Последнее равенство может выполняться лишь в исключительном случае. Поэтому, произвольно изменяя оценки, можно получить последовательность векторов $[G_1, G_2, \dots, G_T \dots]$, каждый из которых будет только допустимым значением выпуска ($G_t \in A$), и описать выпуск отрасли их выпуклой комбинацией. Основная задача тогда преобразуется в следующую (в дальнейшем задача В):

$$\max \theta$$

при ограничениях

$$\sum_{t=1}^T \lambda_t G_t \geq \theta x, \quad (16)$$

$$\sum_{t=1}^T \lambda_t = 1, \quad \lambda_t \geq 0. \quad (17)$$

Все векторы типа G_t строятся стандартно: выбирается по одной опорной точке из аппроксимационного многогранника каждой машины, и все выбранные векторы суммируются.

Обозначим совокупность всех векторов, которые можно таким способом получить, через G и выпуклую оболочку этого множества через $\hat{G}$. Последняя в данном случае является множеством допустимых решений В. Очевидно, любой вектор x , являющийся элементом $\hat{G}$, принадлежит и A . С другой стороны, вектор $\bar{x}$, для которого справедливы соотношения $\bar{x} \subset A$ и $\bar{x} \notin \hat{G}$, можно отделить от $\hat{G}$ соответствующим образом подобранной гиперплоскостью, так что будут выполняться, например, следующие неравенства: $(h, \bar{x}) > 1$ и $(h, x) \leq 1$ для любого $x \in \hat{G}$.

Поскольку, однако, $\bar{x} \subset A_j$, то имеем: $(h, \bar{x}) = \sum_j (h, \bar{x}_j) = \sum_{l,j} \xi_l^j (h, \bar{a}_l^j)$

при условиях $\sum_l \bar{\xi}_l^j = 1, \bar{\xi}_l^j \geq 0$. Поэтому относительно каждого из скалярных произведений $(h, \bar{x}_j)$ получаем $(h, \bar{x}_j) \leq \max_{1 \leq l \leq N_j} \{(h, \bar{a}_l^j)\} = (h, \bar{a}_{l_j}^j)$

и, следовательно, для вектора $\bar{A} = \sum_j \bar{a}_{l_j}^j$ тем более должно выполняться

неравенство $(h, \bar{A}) > 1$. Но по построению $\bar{A} \subset \hat{G}$. Это противоречие доказывает справедливость обратного включения $\bar{A} \subset \hat{G}$, и в силу эквивалентности множеств допустимых решений, оптимальные решения задач В и В совпадают.

Единицы измерения компонент вектора пропорций x до сих пор никак не были определены. В теоретическом отношении, однако, существует наиболее естественный способ нормировки x , при котором выпуск в оптимальном плане измеряется в долях x_i . В этом случае x в В состоит из единиц. Тогда В представляет задачу максимизирующего игрока в игре с матрицей $[G_1, G_2, \dots, G_n]^T$ [8] (здесь T знак транспонирования). Обозначив для краткости эту матрицу через B , можно переписать основную задачу в следующем виде.

Найти $\max_{\lambda} \min_p \lambda^T B p$, где λ, p — векторы вероятности соответствующих размерностей.

Главная особенность этой игры состоит в том, что B представляет собой лишь часть полной игровой матрицы, которая целиком игрокам неизвестна и в этом смысле может рассматриваться как подматрица, описывающая усеченную игру. Поэтому действия игроков будут включать два основных этапа. На первом находится решение усеченной игры и на втором разыскивается не известная ранее стратегия первого игрока, обеспечивающая оптимальный ответ [9] против накопленной смешанной второго (из соотношений (10) — (13)). Если она позволяет получить платеж (μ_t из (14)), превышающий только что найденную цену усеченной игры, то множество чистых стратегий первого игрока расширяется добавлением вновь полученной стратегии. Процесс, очевидно, должен продолжаться до того момента, когда оптимальный ответ обеспечит лишь получение найденной на предыдущем этапе цены усеченной игры. Это будет означать, что найдено решение всей игры.

Казалось бы, процедура симплекс-метода (например, в модифицированной форме) должна дать наиболее изящное оформление этой схемы, так как она позволяет, во-первых, ограничить множество чистых стратегий, которые должен был бы фиксировать первый игрок, и, во-вторых, смешанные стратегии обоих игроков на каждом шаге являлись бы наборами оптимальных весов по отношению к множествам рассмотренных чистых стратегий.

Эксперимент, проведенный на задаче, содержащей 60 наименований в номенклатуре выпускаемой продукции, привел, однако, к отрицательным результатам. Базисные наборы оказались плохо обусловленными и вычисления по симплекс-схеме останавливались на промежуточных итерациях. Интуитивно это явление можно объяснить следующей особенностью рассматриваемой задачи. Стратегии первого игрока получаются в результате перебора всевозможных комбинаций опорных точек многогранников машин. При рассматривавшейся номенклатуре выпуска можно принять, например, общее число машин равным 100 при пяти способах производства, приходящихся на одну машину. Это дает общее число возможностей, равное 5^{100} . Конечно, не все из образованных таким образом векторов будут экстремальными элементами $\hat{G}$, однако даже если сбросить на этом основании с приведенной оценки несколько порядков, то и тогда общее число векторов, входящих в полную матрицу B , чрезвычайно велико по отношению к размерности основного пространства.

Таким образом, грубо говоря, «плотность» расположения экстремальных вершин в $\hat{G}$ очень велика, и среди них должно быть много близких по направлению. В результате базисные наборы могут отличаться плохой обусловленностью, а методы, опирающиеся на вычисление обратной матрицы, оказываются непригодными для решения задачи.

При отказе от применения симплексной схемы теряется возможность взвешивания известных стратегий игроков при помощи наборов оптимальных взвешивающих коэффициентов. С другой стороны, очевидно, процесс, использующий механизм неоптимального взвешивания, можно построить самыми различными способами, моделируя интуитивно правдоподобным образом действие игроков.

Известно довольно большое число методов такого типа, например, ряд вычислительных схем, предложенных Нейманом [10, 11], схема Брауна — Робинсон [12] и т. д. Однако для крупных задач эти приемы приводят к слишком большим затратам времени и потому практически непригодны [13].

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Метод, при помощи которого получался вектор G^{t+1} , можно интерпретировать следующим образом.

Известен вектор оценок на продукцию отрасли q^T , и каждый из n независимых производителей, располагая машиной и стремясь получить максимальный доход, выбирает из имеющихся в его распоряжении способов производства $\{a_i^j\}_{j=1, 2, \dots, N}$ тот, который соответствует максимуму скалярного произведения (q^T, a_i^j) . В результате их независимых выборов возникает суммарная чистая стратегий коллектива $G_{T+1} = \sum_j a_{i_j}^j$.

Правило однозначного выбора интерпретируется тогда экономически: при наличии равновыгодных способов оценки не могут указать, какому способу необходимо отдать предпочтение. С другой стороны, для производителя они все равно выгодны, и поэтому можно выбрать один из них произвольно. Помимо суммарной чистой стратегии G_{T+1} равенство (14) позволяет получить верхнюю оценку выпуска системы μ_t . Кроме того, такой же оценкой является величина

$$\bar{\mu} = \min_t \{\mu_t\}.$$

Рассмотрим теперь в качестве механизма изменения оценок следующий довольно общий процесс.

Пусть $\bar{\mu}_{t^*}$ — лучшая из оценок комплекта, полученная к моменту $t > t^*$, и ϵ_l^t — невязка, определяемая из соотношений:

$$\epsilon_l^t = (p^t, G_l) - \bar{\mu}_{t^*}, \quad (18)$$

где совокупность $\{G_l\}$ изображает всю матрицу игры. Очевидно, существуют две возможности: $\epsilon_l^t \leq 0$ при всех l , либо среди $\{\epsilon_l^t\}$ найдутся положительные. Сначала рассмотрим второй случай. Пусть

$$\epsilon_k^t = \max_l \{\epsilon_l^t\}.$$

Очевидно, в качестве плана производства в момент $t + 1$ будет выбран вектор G_h . Обозначим его компоненты через g_i^k ($i = 1, 2, \dots, m$). Вектор p^{t+1} мы представим как $p^t + \Delta p^{t+1}$ и относительно компонент Δp^{t+1} предположим, что выполняются условия

$$\Delta p_i^{t+1} (g_i^k - \bar{\mu}_{t^*}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (19)$$

причем существуют значения i , для которых неравенство выполняется строго.

Это означает, что оценка будет увеличиваться, если выпуск по i -й компоненте меньше предполагаемой величины комплекта $\bar{\mu}_{t^*}$, и наоборот (конкретный способ построения Δp^{t+1} сейчас безразличен). Единственное ограничение состоит в том, что как p^t , так и p^{t+1} — векторы вероятности, и, следовательно, в дополнение к (16) необходимо положить:

$$\Delta p_i^{t+1} = 0, \quad \text{если } p_i^t = 0 \text{ и } g_i^k - \bar{\mu}_{t^*} > 0. \quad (20)$$

Можно показать, что при таком изменении оценок невязка ε_k^{t+1} будет меньше, чем невязка предыдущего шага ε_k^t . Действительно:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^{t+1} &= (p^{t+1}, G^k) - \bar{\mu}_{l^*} = \varepsilon_k^t + (\Delta p^{t+1}, G_k) = \\ &= \varepsilon_k^t + \bar{\mu}_{l^*} \cdot \sum \Delta p_i^{t+1} + \sum \Delta p_i^{t+1} \cdot (g_i^k - \bar{\mu}_{l^*}).\end{aligned}$$

Второй член последнего выражения обращается в нуль, а третий меньше нуля в силу (17). Следовательно, неравенство $\varepsilon_k^{t+1} < \varepsilon_k^t$ выполняется.

Экономический смысл такого изменения оценок состоит в следующем. После того, как коллективный игрок выбирает стратегию, обеспечивающую максимальный платеж μ_l , оценки в своей совокупности изменяются так, чтобы платеж μ_{l+1} при той же стратегии коллективного игрока уменьшился. (Естественно, что после этого может оказаться оптимальной по отношению к сложившимся оценкам уже другая стратегия, и платеж на самом деле не только не уменьшится, но даже увеличится.)

Систему (16) можно заменить эквивалентной совокупностью неравенств:

$$(p_l G_k) \leq \bar{\mu}_{l^*}, \quad (21)$$

решение которых при условиях $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$; заведомо существует.

В качестве меры отклонения можно ввести функцию

$$\varphi = \sum_{\varepsilon_l > 0} \varepsilon_l,$$

где ε_l определяется согласно (16). Экспериментальный материал, накопленный при отработке метода, позволяет сделать предположение, что при самых различных конкретных механизмах изменения оценок $\varphi \rightarrow 0$.

Для промежуточных итераций утверждение $\varphi \rightarrow 0$ означает, что процесс, развиваясь хоть и не монотонно, приводит в конце концов к положению, в котором для всех l справедливы неравенства $\varepsilon_l \leq 0$. Если при этом оптимальные оценки p^* еще не получены, то для того, чтобы пройденный цикл «сдвинул» систему к оптимуму, необходимо выполнение более сильного условия $\max \varepsilon_l = \varepsilon_k < 0$. Только в этом случае, принимая $\bar{\mu} =$

$= \bar{\mu}_{l^*} + \varepsilon_k$, можно получить лучшую оценку комплекта. Вопрос о том, можно ли провести процесс такого последовательного улучшения верхней оценки $\bar{\mu}$ вплоть до оптимального значения θ (хотя бы в чисто теоретическом плане), не имеет однозначного решения. В частности, ответ, по-видимому, зависит от конкретного способа изменения оценок, и легко привести примеры как стабилизации у промежуточного положения $\bar{\mu}$, зависящего от начального значения вектора p , так и примеры, когда он приводит к оптимальному решению.

Поскольку используется только верхняя оценка оптимального решения, практически невозможно найти хороший критерий, который позволял бы оканчивать вычисления. Малость изменения самой верхней оценки может при этом свидетельствовать не столько о близости к оптимуму (в смысле, например, какой-нибудь нормы вектора $p - p^*$), сколько об общей пологости поверхности многогранника A при медленной сходимости процесса.

Последнее замечание показывает необходимость использования в схеме компонент накопленного вектора выпуска, который можно ввести формулой:

$$x^{T+1} = (1 - a_T)x^T + a_T G^{T+1}. \quad (22)$$

«Малость» относительной ошибки

$$\varepsilon = \frac{\bar{\mu} - v_T}{\bar{\mu}}; \quad (23)$$

может служить в таком случае признаком окончания вычислений.

Здесь:

$$v_T = \min_i \{x_i^T / x_i^0\}.$$

Изменение оценки p_i в зависимости от разности $g_i - \mu$ выглядит не очень естественно, так как последние принимает дискретный набор значений. Поскольку построенный статистически вектор x изменяется в значительно более широкой области, то интуитивно более естественной представляется корректировка оценок по разностям $x_i - \rho$, где $\rho \in [v_T, \bar{\mu}]$. С другой стороны, непосредственно изменение оценки сказывается на мгновенном выпуске G_T и лишь затем через механизм осреднения на векторе x . Разберем поэтому связь $p^{t-1} \leftrightarrow x^t$, G^t подробнее, предполагая, что оценки корректируются по разности $x_i - \rho$ при помощи механизма того же типа, что и только что описанный.

При обсуждении удобно использовать геометрическую иллюстрацию процесса рис. 3, на котором угловые точки с A_1 по A_6 изображают концы векторов, принадлежащих G , многоугольник $kA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — выпуклое множество планов, удовлетворяющих условию полной загрузки мощностей, x_t и Π_t — накопленный план и гиперплоскость оценок к моменту t ; μ_t — верхняя оценка, относящаяся к тому же моменту. Численно она измеряется длиной отрезка луча пропорций от начала координат до точки его пересечения с гиперплоскостью Π_t . В качестве единичного вектора луча пропорции при этом должен быть принят вектор исходных пропорций (учитывая ранее сделанный выбор нормировки, в данном случае это — «главная» диагональ единичного m -мерного куба). Жирной линией изображена предполагаемая траектория конца вектора x_t (в дальнейшем для краткости траектория x_t); вид которой будет проанализирован подробно.

В момент t_1 x_{t_1} начнет перемещаться вдоль линии $x_{t_1}A_2$, а гиперплоскость Π_{t_1} , в соответствии с выводами предыдущего пункта, поворачиваться вокруг точки A_2 так, чтобы уменьшить общую «стоимость» вектора x_t в оценках p_t , т. е. в направлении, указанном стрелкой. Если в этот момент «отбросить» все элементы G , лежащие правее линии TT' , то гиперплоскость Π_t могла бы неограниченно приближаться к предельному положению Π^* , а вектор x_t к A_2 . Наличие векторов A_i правее A_2 , однако, этому мешает. Поэтому Π_t при своем повороте будет последовательно «натывать» на вершины A_3 , A_4 , и т. д. Соответственно будет меняться направление движения x_t . Точка x_{t_2} в этом смысле соответствует положению, при котором гиперплоскость начинает поворот вокруг A_4 . В этот момент x_t начинает двигаться в «нужном» направлении к одной из угловых точек, входящих в оптимальное решение (A_4). Однако поворот гиперплоскости по часовой стрелке будет продолжаться до тех пор, пока x_t остается слева от часовой стрелки будет продолжаться до тех пор, пока x_t остается слева от луча пропорций. Положение x_{t_3} соответствует моменту времени, когда центром поворота Π_t делается крайняя из точек многогранника A_6 . Для большей выразительности предполагается, что в этот момент гиперплоскость все еще вращается в направлении часовой стрелки (так как x_t левее L). Наконец, достигнуто положение x_{t_4} , в котором метод «способен различить» положение x_t правее L , и гиперплоскость Π_{t_4} начинает обратный поворот. Однако вектор x_t продолжает двигаться в направлении A_6 , A_5 и т. д., так как требуется время, чтобы повернуть гиперплоскость в положение Π_{t_5} , в котором точкой поворота становится A_3 — вторая из угловых точек, входящих в оптимальное решение. Однако к тому моменту x_t опи-

сал достаточно внушительную петлю $x_{t_4}x_{t_5}$, и к этому моменту, как будет найдено «левое различимое положение» x_{t_7} , гиперплоскость уже вращается снова вокруг точки A_2 , с которой был начат процесс. С положения Π_1 , начинается обратный поворот гиперплоскости, но вектор x_t успевает перейти в положение x_{t_8} прежде, чем точка A_3 делается центром вращения гиперплоскости.

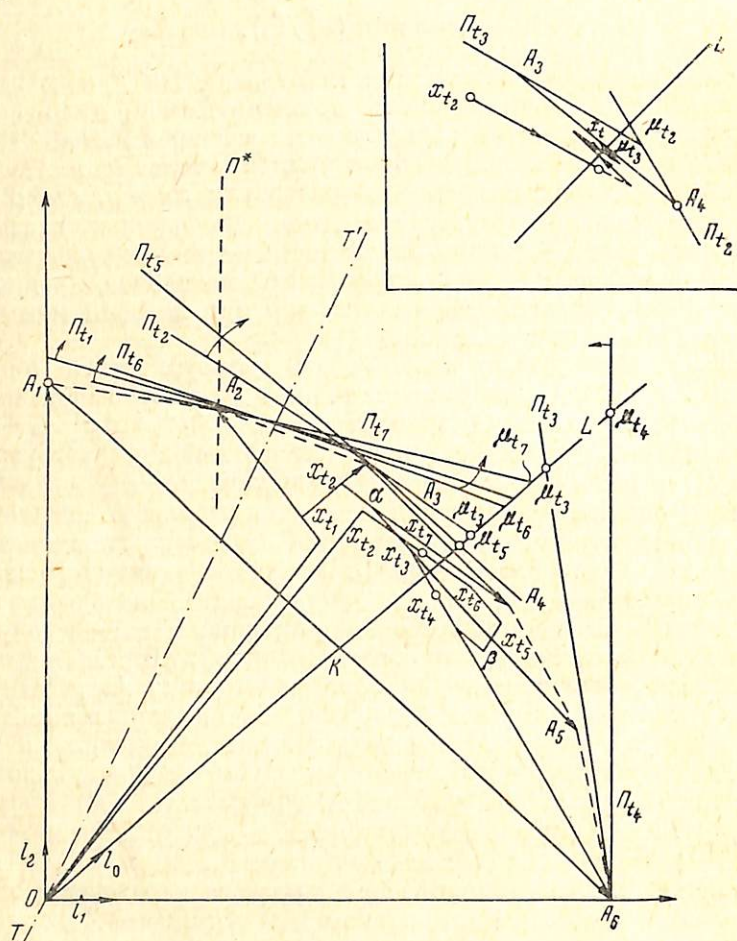


Рис. 3. Примерная траектория x^t

Существенной особенностью процесса является отрезок пути $\alpha x_{t_3} x_{t_4} \beta$, на котором в накопленный план входят способы A_6 , A_5 с ненулевыми интенсивностями. В силу этого обстоятельства выпуклая комбинация, соответствующая плану x_t , содержит с точки зрения оптимального решения «запрещенные элементы», и план x_t все время отклоняется от оптимального.

Наличие участка $\alpha x_{t_3} x_{t_4} \beta$ в траектории x_t вызвано тем, что после того, как в момент $t_2(t_5)$ гиперплоскость «садится» на точку $A_4(A_3)$, ее поворот продолжается, несмотря на то, что нужный регулирующий эффект уже достигнут. Принципиальный недостаток регулирования состоит, таким образом, в недостаточном демпфировании изменения оценок, в результате чего гиперплоскость дважды проходит участок $A_4 A_5 A_6$.

Устранить этот недостаток значительно труднее, чем обнаружить. Рис. 3 показывает, что в момент, когда A_4 делается точкой поворота, сле-

довало бы прекратить всякое изменение оценок до тех пор, пока x_i не окажется вправо от луча пропорций, после чего изменение оценок автоматически сделает точкой поворота A_3 . В этот момент опять изменение оценок следует прекратить и т. д. Траектория такого типа изображена на рис. 3а, который соответствует части рис. 3. Непосредственно обобщить эти рассуждения, однако, невозможно, так как для этого необходимо уметь классифицировать векторы A_i по признаку «входит в оптимальный план», «не входит», что сделать невозможно. Можно, однако, предложить прием демпфирования оценок, исходя из несколько других соображений.

Легко видеть, что компонента x_i^{T+1} всегда находится внутри отрезка $[x_i^T, G_i^{T+1}]$ (если положить для определенности $G_i^{T+1} > x_i^T$) и если оценка выпуска $\rho^T \subset [x_i^T, G_i^{T+1}]$ ($\rho^T \subset [\underline{v}_T, \bar{u}]$), то механизм осреднения и без изме-

нения оценки p_i приводит к уменьшению $|x_i \frac{T}{\rho^T}|$. Поэтому в вычислительной схеме было использовано следующее правило для изменения оценок*:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ Уменьшить } p_i^t, \text{ если } x_i^t > \rho \text{ и } g_i^t > \rho. \\ 2. \text{ Увеличить } p_i^t, \text{ если } x_i^t < \rho \text{ и } g_i^t < \rho. \\ 3. \text{ Не изменять } p_i \text{ в остальных случаях.} \end{array} \right\} \quad (24)$$

Этот способ можно назвать «методом двойного регулирования оценок», так как изменение последних производится из сопоставления величины предполагаемого выпуска с двумя параметрами процесса.

В итоге вычислительная схема приняла следующую форму.

1. Стационарное состояние: q_i, x_i .

2. Операции, связанные с получением вектора будущего производства и верхней оценки комплекта:

$$V_j^{t+1} = \max_{1 \leq l \leq N_j} (q^t, a_l^j) = (q^t, a_{l_j}^j),$$

$$V^{t+1} = \sum_{j=1}^n V_j^{t+1}, \quad \mu^{t+1} = \frac{V^{t+1}}{\|q^t\|},$$

$$\bar{\mu}^{t+1} = \min(\bar{\mu}^t, \mu^{t+1}),$$

$$G^{t+1} = \sum_j a_{l_j}^j.$$

3. Получение нового накопленного вектора:

$$x^{t+1} = (1 - \alpha_t)x^t + \alpha_t A^{t+1}.$$

4. Оценка «близости» решения к оптимальному.

5. Изменение оценок, если оптимальное решение не получено:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t / (1 + h^t), & \text{если } x_i^{t+1} > \rho^{t+1}, g_i^{t+1} > \rho^{t+1}, \\ q_i(1 + h^t), & \text{если } x_i^{t+1} < \rho^{t+1}, g_i^{t+1} < \rho^{t+1}, \\ q_i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

* Этот прием был предложен при отработке метода на ЭВМ ст. инж. ЦЭМИ А. К. Пителиным.

Дальнейшие операции схемы необходимо производить с пункта 2.

Единственными свободными переменными процесса оказываются две константы: h^t и α^t . Первая определяет интенсивность изменения оценок, вторая — вес вновь поступающего плана к выпуклой комбинации. По мере приближения пары q^t , x^t к оптимальным значениям, вообще говоря, должно иметь место: $\alpha^t, h^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Более детальное обсуждение механизма изменения этих величин целесообразно провести при анализе экспериментального материала.

Механизм изменения оценок в пункте 5 был выбран из следующих соображений. Пусть $x_i^t < \rho < g_i^{t+1}$. Тогда q_i^t не изменяется, а $x_i^{t+1} > x_i^t$ до тех пор, пока x_i^{t+h} не окажется больше ρ . В этот момент оценка q_i начнет уменьшаться, но точка x_i будет удалаться от положения равновесия ρ , пока g_i не сделается меньше x_i , изменение же оценки q_i прекратится лишь после того, как g_i станет меньше ρ . Размах колебаний x_i , g_i при этом зависит от быстроты, с которой изменяется q_i . Таким образом, для хорошей работы схемы необходимо быстрое и не зависящее от их абсолютных величин изменение оценок, что, по-видимому, формулами пункта 5 обеспечивается.

Анализируя операцию получения G^t ((10) — (14)), можно отметить, что переменные двойственной задачи разделились. Часть из них — q^t задается произвольно и после этого возникает возможность определить допустимые решения обеих задач. При этом часть ограничений удовлетворяется тривиально (9), (9'); (8) и в соответствии с условиями дополняющей нежесткости. Другие (они соответствуют произвольно задаваемым переменным двойственной задачи) могут быть удовлетворены лишь искусственно и без соблюдения условий оптимальности (7). Естественно поэтому ввести некоторую терминологию и называть переменные типа q_i ключевыми, соответствующие им двойственные ограничения существенными, а решения типа G^t условно-оптимальными.

Теперь, подводя итог всему сказанному выше, можно отметить, что по существу предложено два различных метода получения итеративных вычислительных схем. Один основан на непосредственной теоретико-игровой интерпретации исходной задачи, развитой в разделе 2. В этом смысле, проводя тривиальные преобразования общей задачи линейного программирования в матричную игру (например, так, как это описано в [8]), можно дальше прямо применять описанную в разделе 3 итеративную схему без всяких изменений. При этом не обращается внимание на конкретную специфику задачи и используется только определенное общее свойство всего класса задач такого типа — возможность сформулировать ее как матричную игру общего вида.

Второй подход опирается на принципиально иную систему рассуждений. Анализируется строение сопряженных ограничений, непосредственно описывающих условия оптимальности решения именно данной конкретной задачи (в общем случае необходимые и достаточные условия наличия седловой точки в смысле Куна — Таккера [14]). Существенная часть анализа заканчивается в тот момент, когда выделен набор ключевых переменных, существенных ограничений и описана процедура получения условно-оптимального решения. Как после этого будут удовлетворяться существенные ограничения и каким образом с этим будет связано изменение ключевых переменных, остается в значительной степени открытым вопросом, требующим самостоятельного рассмотрения. Содержание раздела 3

позволяет в этом смысле высказать лишь рекомендацию общего характера: по-видимому, целесообразно наряду с условно-оптимальными решениями использовать их вероятностную смесь и поставить изменение ключевых переменных в связи с компонентами невязок существенных ограничений по обоим векторам. Однако более вероятно, что в каждом конкретном случае необходим конкретный анализ, и на разделы 2, 3 настоящей работы можно сослаться лишь как на частный пример анализа такого типа, проведенного применительно к конкретной задаче, описанной в разделе 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Пугачев, Б. З. Смоляницкий. Опыт составления оптимального плана развития отрасли. Плановое хозяйство, 1965, № 8.
2. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. Применение математических методов и вычислительной техники в планировании производства целлюлозно-бумажной промышленности. Отчет ЛЭМЦЭМИ и ЛЭИЦНИИБ. М., 1965.
4. В. Ф. Пугачев. Аппроксимационная схема многоступенчатого оптимального планирования народного хозяйства. Сб. Экономико-матем. методы. Вып. 2. М., «Наука», 1965.
5. В. Ф. Пугачев. Модель многоступенчатой системы оптимального планирования. ЛЭММ АН СССР, Экономико-математические тетради. Вып. 5, Оптимальное планирование в условиях большой размерности. М., 1963.
6. У. А. Таккер. Двойственные системы линейных соотношений. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
7. А. Дж. Голдман, У. А. Таккер. Теория линейного программирования. Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. В. А. Волконский. Оптимальное планирование в условиях большой размерности (итеративные методы и принцип декомпозиции). Экономика и математические методы, 1965, т. 1, вып. 2.
10. G. W. Brown and J. von Neumann. Solutions of Games by Differential Equations. Сб. Contributions to the Theory of Games, v. 1.
11. John von Neumann. A Numerical Method to Determine Optimum Strategy. Naval. Res. Log. Q., 1954, v. 1.
12. G. W. Brown. Iterative Solutions of Games by Fictitious Play. Activity Analysis of Production and Allocations. Ed. by T. C. Koopmans. Cowles Commission for Research in Economics. Monograph No. 13. New York, Wiley, 1951. Дж. Робинсон. Итеративный метод решения игр. Сб. Матричные игры. М., Физматгиз, 1961.
13. M. Hershkowitz. A Computational Note on von Neumann's Algorithm for Determining Optimal Strategy. Naval. Res. Log. Q., 1964, v. 11, No. 1.
14. H. W. Kuhn, W. A. Tacker. Nonlinear Programming. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1951.

Поступила в редакцию
24 VII 1965