ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1965 том I, вып. 6

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. И. ХВАТОВ

(МОСКВА)

Трудно найти сколько-нибудь обширное исследование по математическому программированию, где бы так называемая транспортная задача (известная еще как задача Хичкока) не получила того или иного отражения. Достаточно обширна и литература, описывающая опыт проведения практических расчетов на базе алгоритма транспортной задачи.

Являясь частным случаем общих методов линейного программирования, транспортная задача, в силу простоты своего алгоритма и удобства реализации его для машинного счета, в настоящее время по праву считается одним из наиболее разработанных разделов линейного программирования и может быть отнесена к числу классических методов.

Популярность транспортной задачи объясняется также и тем, что чрезвычайно большое число экономических и технических ситуаций описывается ее математической моделью, причем среди них есть и такие, которые непосредственно с транспортом не связаны.

Что же представляет собой математическая постановка задачи, нашедшей столь широкое применение, какие проблемы она призвана решать, какие вычислительные схемы предложены для ее решения?

Если обозначить объемы определенной продукции у поставщиков через A_i, спрос на нее у потребителей — B_j, а размер конкретных поставок — x_{ij}, то исходные условия транспортной задачи будут иметь всем хорошо известный вид:

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min. \tag{4}$$

В то время как первые три соотношения являются ограничениями, подлежащими обязательному соблюдению, выражение (4) указывает цель, ради которой следует вести расчет, в силу чего оно и получило название целевой функции.

Известны две формы решения транспортной задачи: матричная и сетевая. В первом случае исходные данные задаются в виде таблицы (см.

табл. 1). Во втором, как на это указывает само название, основой служит сеть путей сообщения, связывающая пункты отправления и прибытия (см. рис. 1). При матричной форме к моменту начала решения оценки

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	12	19	27	12	25	
A_1 20	27	16	14	10 6	15 14	10
A_2 45	8 12	10	5 27	9 6	16	11
A_3 30	9	17 19	15	19	25 11	0
	19	17	16	20	25	u_i / v_j

связей между поставщиками и потребителями (c_{ij}, записываемые в верхнем углу клеток таблицы и обозначающие обычно либо расстояние между соответствующими пунктами, либо плату за перевозку, либо затраты транспорта, с ней связанные) уже определены (предполагается, что это сделано наилучшим образом, т. е. найденная величина c_{ij} является минимальной для каждой корреспонденции). При сетевой форме вначале известны лишь значения связей по отдельным участкам (также обозначаемые как c_{ij}; на рис. 1 обозначены цифрами без кружка), а оценка конкретных корреспонденций между пунктами отправления и прибытия груза может быть произведена лишь по окончании решения на основе так называемого дерева оптимальных связей, о чем речь будет идти ниже.

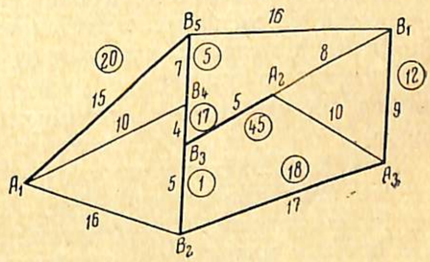

Рис. 1. Транспортная сеть и дерево кратчайших расстояний (жирные линии)

В настоящее время известно много приемов решения транспортной задачи. Однако, несмотря на их кажущееся многообразие, все алгоритмы решения транспортной задачи можно разбить на три большие группы в зависимости от того, какой общий метод линейного программирования в них реализуется. Таких методов существует три.

Первый из них — метод последовательного улучшения плана. Основные идеи его были сформулированы в 1947 г. Данцигом; за рубежом он известен под названием симплексного метода. Отличительной чертой метода является то, что на его основе решается так называемая прямая задача линейного программирования. Идеи этого метода реализованы в пяти алгоритмах транспортной задачи: распределительном методе [1, стр. 430—436], методе 0-преобразований [2], методе Глейзала [3, стр. 131—137], методе условных стоимостей [4] и в венгерском методе, так как он изложен в статье Куна [5, стр. 35—52].

Второй метод — метод последовательного уточнения оценок построен на идеях решения двойственной задачи линейного программирования. Впервые он был описан Лемке в 1954 г. и лег в основу двух алгоритмов транспортной задачи: метода потенциалов, предложенного в 1949 г. Л. В. Канторовичем и М. К. Гавуриным [6, стр. 110—138], и его американского варианта — модифицированного распределительного метода (метода МОДИ) [7].

Наконец, третий метод — метод последовательного сокращения невязок предполагает одновременное решение двух задач: прямой и двойственной ей. Идея метода принадлежит Л. В. Канторовичу и была высказана им в 1939 г. Позднее, в 1956 г. она была независимо сформулирована тремя американскими учеными: Данцигом, Фордом и Фулкерсоном. На базе этого метода предложено четыре алгоритма транспортной задачи: метод разрешающих слагаемых (условно-оптимальных планов) [8] и [9], метод Манкреса [10], метод Форда и Фулкерсона [11, стр. 61—72, 95—102], метод Брудно [12, стр. 17—38].

Как правило, решение транспортной задачи начинается с составления исходного прикрепления (начального плана) участвующих в задаче поставщиков к потребителям, чей спрос подлежит удовлетворению. Имеются два пути составления начального плана и его последующего изменения, так, чтобы он в конечном счете удовлетворял условию (4) при соблюдении ограничений (2) и (3). Один путь предполагает составление начального плана, который удовлетворяет ограничениям задачи, но отнюдь не является оптимальным, т. е. значение выражения (4) может быть уменьшено. Примером такого плана может служить вариант прикрепления поставщиков к потребителям, который представлен в табл. 1. Алгоритмы, по которым составление начального плана производится описанным выше способом, предусматривают ту или иную последовательность изменений этого плана, при которых соблюдение равенств (2) и (3) выполняется, а целевая функция за конечное число шагов достигает своего экстремального значения (причем всегда имеется критерий, указывающий на то, что процесс улучшения плана дальше продолжен быть не может).

Если следовать другому пути, то вначале строится такой план, при котором значение целевой функции минимально, хотя условия (2) и (3) и не соблюдаются. Применительно к данным табл. 1 построение начального плана с использованием второго пути означало бы назначение поставок в соответствии с наименьшими значениями c_{ij} по каждому столбцу независимо от того, достаточно для этого ресурсов у того или иного поставщика или нет. Руководствуясь этим принципом, поставщику A_2 следовало бы снабжать всех потребителей за исключением пятого, которого надо было бы прикрепить к A_1. Что же касается третьего поставщика, то его ресурсы вообще не следовало использовать. Смысл последующих действий по алгоритмам, реализующим второй путь, сводится к тому, чтобы ценой минимального ухудшения значения целевой функции изменить начальный план таким образом, чтобы нарушения ограничений (2) и (3) были устранены.

В принципиальном отношении сетевые методы решения транспортной задачи ничем не отличаются от матричных, так как в них реализуются те же общие методы линейного программирования, о которых речь шла выше. Известная разница здесь имеется лишь в отношении формы, в которой выступают результаты решения. Вместо объема поставок от конкретных поставщиков к конкретным потребителям в этом случае мы получаем лишь значения величины потока по участкам (на рисунке обозначены цифрами в кружках), сам же путь следования груза по каждой корреспонденции и его численная характеристика, в особенности при больших размерах сети, в наглядной форме не выступает. Требуются некоторые дополнительные выкладки, чтобы определить какой пункт куда и сколько грузит и через какие участки сети осуществляется каждая перевозка, включенная в оптимальный план. Правда, большую помощь в этом отношении оказывает дерево оптимальных связей, которое формируется в процессе решения (на рисунке оно обозначено жирными линиями). Дерево оптимальных связей образует участки, входящие в состав кратчайших путей, соединяющих все пункты отправления и прибытия груза. Его особенностью является то, что оно не должно включать замкнутых контуров. Двигаясь от крайних вершин дерева, мы можем установить, откуда удовлетворяется потребность пунктов спроса и определить путь следования груза, а по нему и его характеристику, т. е. значение c_{ij} в том виде, в каком, оно выступает при решении задачи на матрице.

Тот факт, что в сетевой задаче мы получаем план перевозок в виде величины потока по участкам, является главным преимуществом этой формы транспортной задачи, которое позволяет находить решение в тех случаях, когда пропускная способность участков ограничена.

Решение транспортной задачи применительно к этим условиям влечет за собой расширение числа ограничений, подлежащих обязательному соблюдению, еще на одно:

$$x_{ij} \leqslant d_{ij}. \tag{5}$$

При матричной форме задачи также могут вводиться ограничения пропускной способности (кстати, они будут записываться аналогично (5)), однако касаться они будут, вполне понятно, не отдельных участков, а всего маршрута по конкретной корреспонденции или самого пункта назначения. Для тех случаев, когда перевозка между отдельными пунктами вообще является нежелательной, т. е. когда пропускная способность равна нулю, существует специальный прием, который заключается в том, что величина c_{ij} устанавливается максимально большой (что принято обозначать M), и такого рода связи по существу выпадают из рассмотрения.

Как уже отмечалось выше, решение по любому алгоритму транспортной задачи продолжается до тех пор, пока не появятся определенные признаки, свидетельствующие о том, что полученный план прикрепления является окончательным и улучшен быть не может. Эти признаки варьируют в зависимости от типа алгоритма. Однако имеется универсальный критерий, по которому может быть проверен на оптимальность план прикрепления, полученный любым методом. В явной форме этот критерий используется в методе потенциалов и МОДИ. Заключается он в том, что для любого плана (если только он не вырожденный) можно построить две системы величин, именуемых потенциалами: одну — для строк, другую — для столбцов; обычно их обозначают соответственно u_i и v_j. Чтобы построить систему потенциалов для случая вырождения (число используемых корреспонденций для постановок меньше $m + n - 1$), разработан искусственный прием, предусматривающий введение условной нулевой поставки (существуют правила, в какую клетку матрицы эта поставка должна быть назначена).

Доказано, что план оптимален, если

$$v_j - u_i \leqslant c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0, \tag{6}$$

и

$$v_j - u_i = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} \geqslant 0. \tag{7}$$

Применительно к примеру, приведенному в табл. 1 видно, что составленный начальный план не оптимален, так как условие (6) нарушено в клетках 3.1, 3.3 и 3.4 (номера клеток складываются из индексов i и j при A и B). Наоборот, система потенциалов табл. 2 свидетельствует о том, что здесь мы имеем дело с оптимальным решением, поскольку условия (6) и (7) оказываются выполненными для всех клеток матрицы.

Таблица 2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
	12	19	27	12	25	
A_1 20	$\boxed{27}$	$\boxed{16}$	$\boxed{14}$	$\boxed{10}$	$\boxed{15}$ 20	8
A_2 45	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{5}$ 27	$\boxed{9}$ 12	$\boxed{16}$ 5	7
A_3 30	$\boxed{9}$ 12	$\boxed{17}$ 18	$\boxed{15}$	$\boxed{19}$	$\boxed{25}$	0
	9	17	12	16	23	u_i / v_j

В случае решения задачи с ограничениями пропускной способности по участкам d_{ij}, вводится еще одно условие:

$$v_j - u_i \geqslant c_{ij}, \quad (\text{при } x_{ij} = d_{ij}), \tag{8}$$

а соблюдение условия (7) вменяется для значений x_{ij} в интервале

$$d_{ij} \geqslant x_{ij} \geqslant 0.$$

Система потенциалов может быть построена и применительно к сетевой задаче; в этом случае соблюдение условий (6), (7) и (8) также является обязательным.

Помимо того, что потенциалы играют важную роль при определении оптимальности полученного плана прикрепления поставщиков к потребителям, значение их определяется также той содержательной экономической информацией, которую они несут в себе.

Будучи разновидностью объективно-обусловленных оценок, предложенных Л. В. Канторовичем, потенциалы (кстати, названные так им же) служат базой для создания такой системы оценок поставок, которая отличается от показателей непосредственных затрат на перевозку тем, что их величина определяется всей совокупностью условий, присущих изучаемому экономическому объекту. Этим и объясняется тот факт, что система оценок, построенная на базе потенциалов, оказывается справедливой лишь применительно к заданным исходным предпосылкам и устойчивость ее сохраняется только в ограниченном диапазоне их изменений.

Если бы ресурсы имелись в неограниченном количестве, то было бы вполне естественным удовлетворить спрос всех потребителей за счет связей, являющихся для каждого из них наиболее выгодными. В этом случае наиболее выгодный для отдельных потребителей вариант прикрепления был бы таковым и для всей их совокупности. Однако на практике, как правило, приходится сталкиваться с положениями, когда ресурсы поставщиков, расположенных по отношению к потребителям наиболее благоприятно, оказываются недостаточными для удовлетворения всей имеющейся потребности. Эта ограниченность ресурсов и делает необходимым включение в план снабжения поставщиков, находящихся в сравнении с другими в относительно худших условиях, и составление такого плана прикрепления, при котором с учетом всего многообразия факторов, порождающих конкретную народнохозяйственную ситуацию, поставки осуществляются наиболее экономным образом.

В этих условиях потенциалы выступают как мера выгодности расположения отдельных поставщиков по отношению к рынкам сбыта продукции, и их значения могут рассматриваться в качестве оценок, по своей природе аналогичных дифференциальной ренте.

Все сказанное достаточно наглядно иллюстрируется табл. 2, из которой видно, что по оптимальному плану спрос каждого потребителя удовлетворен за счет тех поставщиков, у которых величина $c_{ij} + u_i$, представляющая собой оценку конкретной связи с позиций учета всей совокупности факторов, является минимальной, причем величина ее для всех поставщиков, обслуживающих одного потребителя, устанавливается на одинаковом уровне, равном потенциалу соответствующего столбца v_j. Это и приводит к тому, что поставщики, расположенные относительно более выгодно, по оптимальному плану не только компенсируют свои затраты, но и получают еще известную надбавку. Эта надбавка оказывается одинаковой для всех отправок каждого из поставщиков, и ее выражением служат потенциалы строк u_i.

Значение величин u_i и v_j оказывается чрезвычайно полезным, так как позволяет судить, с какими потерями для всего народнохозяйственного объекта связано изменение исходных предпосылок и конкретных связей по поставкам. Так, если обратиться к табл. 2 и выяснить, как отразится на величине целевой функции увеличение ресурсов поставщика A_1 на единицу, то, учитывая значение потенциала для первой строки, равное 8, можно заключить, что целевая функция при этом уменьшится в таком же размере. Действительно, увеличение поставки B_5 на единицу за счет A_1 означает одновременно сокращение на такую же величину поставки из A_2, что ведет к экономии в размере $(16 - 15) = 1$. К этому надо добавить эффект от изменения поставки потребителю B_2, который теперь будет получать от A_2 уже не одну, а две единицы при сокращении снабжения за счет A_3 до 17 единиц. С этим связана экономия уже в размере $(17 - 10) = 7$, что дает общий результат, равный 8. Аналогичные рассуждения, но уже в отношении потребителей, можно было бы привести на базе потенциалов столбцов.

Все, что говорилось о транспортной задаче до сих пор, в основном, (если исключить вопрос об учете пропускной способности) касалось того ее варианта, в котором этот метод линейного программирования возник первоначально. Дело в том, что ситуация, вызвавшая к жизни транспортную задачу, чрезвычайно проста: в m пунктах имеется совершенно однородный продукт, который надо поставить в n пунктов; предъявляемый к перевозке продукт локализован по пунктам отправления, т. е.

$A_i(1 \div m)$ точно соответствуют конкретным пунктам; строго фиксирована величина спроса на продукт применительно к географии его потребления $B_j(1 \div n)$; величины c_{ij} определены однозначно и не являются функциями x_{ij}; наконец, соблюдается равенство спроса и предложения.

Вполне понятно, что обстоятельства, аналогичные описанным, на практике встречаются не так уже часто. Поэтому сразу же после появления на свет первых описаний алгоритма транспортной задачи начались попытки такой модификации ее исходных условий, которые давали бы возможность расширить круг проблем, решаемых этим методом. Модификация шла по всем направлениям: через введение неоднородности продукции, нарушение баланса между спросом и предложением, отступление от стабильности величин c_{ij}. Некоторые из этих нововведений оказались вполне пригодными на практике, другие, несмотря на всю свою заманчивость, по-видимому, нуждаются еще в доработках и представляют больше теоретический интерес.

Поскольку, казалось бы, самые однородные продукты, например, уголь или цемент, имеют различные потребительные свойства в зависимости от марки или сорта, и спрос на них может быть удовлетворен лишь с учетом этой дифференциации, возникло естественное стремление применить алгоритм транспортной задачи прежде всего к взаимозаменяемым продуктам.

Был найден простой способ, позволяющий использовать в этих случаях обычный алгоритм транспортной задачи без всяких его модификаций [13]. Правда, при нем резко возрастают размеры матриц, так как каждый поставщик оказывается представленным таким числом строк, сколько видов взаимозаменяемой продукции у него имеется. Пересчет каждого вида продукции по соответствующему коэффициенту практически делает ее однородной, что позволяет удовлетворять спрос конкретных потребителей без учета индивидуальных свойств источников покрытия. В тех же случаях, когда поставка по какому-то сорту продукта для конкретного потребителя осуществлена быть не может, обычным путем вводится запрещение на перевозку.

Делались попытки приспособить алгоритм транспортной задачи и для рационализации перевозок нескольких различных грузов. Для этой цели были предложены довольно сложные модификации сетевого алгоритма транспортной задачи. Теоретический интерес таких работ очевиден, однако сейчас еще трудно судить сколь широка будет область практического применения этих методов.

Наконец, стремление охватить перевозки хотя и различных грузов, но являющихся продуктами последовательной обработки какого-то исходного сырья, породило так называемую многоэтапную транспортную задачу. Метод фиктивной диагонали позволяет с успехом решать эту проблему [14]. Однако, как и в предыдущем случае, серьезные трудности возникают с существенным увеличением размеров матрицы, на базе которой производится расчет.

Другим направлением развития алгоритма транспортной задачи было нарушение обязательности совпадения спроса и предложения. Первым шагом, предпринятым здесь, явилось введение так называемого фиктивного столбца. Все значения c_{ij} этого столбца принимаются равными между собой (удобно их брать нулевыми), а потребление по нему устанавливается на уровне разницы между предложением продукта и спросом на него. В результате решения задачи часть поставок оказывается прикрепленной к фиктивному потребителю, представляемому этим столбцом. Это наименее выгодные, в данных условиях, корреспонденции — они-то и остаются неиспользованными для снабжения реальных потребителей.

Подобный же прием может быть использован и для решения задач, где превышающим элементом является спрос, а не предложение. В этом случае фиктивной уже будет строка.

Интересной является другая модификация алгоритма транспортной задачи, также предназначенная для случаев, когда спрос не совпадает с предложением,— это так называемый алгоритм с верхними и нижними границами производства [15]. В задачах, решаемых по этому методу, производство задается двумя уровнями (или границами): верхним и нижним. Сумма объемов производства по верхним границам превышает общий размер потребления (который установлен однозначно), а по нижним границам не достигает его. Оптимальный план, получаемый в результате решения, определяет, на каком уровне наиболее выгодно зафиксировать производство по каждому пункту.

Хотя сам по себе этот метод мало отличается от алгоритма транспортной задачи в ее первоначальной постановке, вопросы, которые решаются с его помощью, оказываются существенно иными: вместо проблемы рациональной организации снабжения на первый план здесь выдвигаются проблемы размещения производства. Другими словами, вопрос о том, кого откуда снабжать, перерастает в вопрос выбора пунктов снабжения и определения уровня производства по каждому из них.

Новая постановка задачи вызвала к жизни и ряд проблем, связанных с тем, что брать в качестве c_{ij} (показателей критерия оптимальности, как их принято называть). Если транспортная задача в первоначальном варианте ориентировалась либо на минимизацию объема работы транспорта (исчисляемую в тонна-километрах), либо на сокращение размера выплат транспорту за оказываемые им услуги по перевозке грузов (расчет по тарифам), то уже попытка разработки рациональных планов поставок с участием нескольких видов транспорта и организации этих расчетов с позиций минимизации затрат народного хозяйства на перевозку, привела к необходимости строить расчет, исходя из затрат самого транспорта.

В принципе такой подход является единственно правильным, так как только таким путем можно достаточно полно соизмерить преимущества использования различных конкурирующих между собой вариантов. Однако на практике сразу же пришлось столкнуться с рядом трудностей. Дело в том, что затраты на перевозку, отнесенные на 1 *т/км*, не остаются стабильными с изменением объема перевозок — они меняются, причем отнюдь не линейно.

Проблема нелинейности затрат по сравниваемым вариантам еще в более сложной форме выступает при решении проблем размещения производства. К нелинейности транспортной составляющей общего критерия, по которому ведется счет, здесь добавляется нелинейность затрат на производство конкретной продукции в каждом пункте в зависимости от объема ее выпуска.

Было предпринято немало попыток разработать такой метод, который бы эффективно решал задачи с нелинейными значениями, однако достигнутые здесь результаты пока не дают оснований считать проблему решенной.

До сих пор речь шла лишь о точных методах решения транспортной задачи. Однако на сегодняшний день разработан и ряд методов, позволяющих найти хотя и не оптимальное, но близкое к нему решение. Приближенные методы более просты, чем точные, и результат, как правило, достигается за меньшее число шагов, в силу чего они удобны для ручного счета; в некоторых случаях целесообразно использование приближенных методов для решения задач очень больших размеров, расчет которых даже с использованием ЭВМ на базе точных методов оказывается (в связи с большими затратами машинного времени) практически не выполнимым.

В непосредственной связи с приближенными методами расчетов находятся и различные приемы ручной корректировки оптимальных планов, рассчитанных на ЭВМ. Дело в том, что далеко не всегда оптимальный план, рассчитанный точными методами, в силу различных обстоятельств, может быть снова пересчитан с их использованием применительно к новым изменившимся условиям. В связи с этим разработаны приемы, позволяющие сделать это, не прибегая к услугам ЭВМ и с минимальными отклонениями от оптимума.

* * *

Выше была сделана попытка проследить те изменения, которые претерпел алгоритм транспортной задачи с момента его возникновения. Не вызывает сомнения, что эти изменения существенно расширили возможности метода. Вместе с тем следует отметить, что, несмотря на разработанность математического аппарата транспортной задачи, результаты практического ее внедрения для решения конкретных народнохозяйственных проблем на сегодняшний день оставляют желать лучшего. Причины здесь самые разнообразные: частично это общие трудности, стоящие на пути внедрения математических методов в практику экономических расчетов, частично же они порождены самой природой транспортной задачи и тех проблем, которые с ее помощью иногда решаются. Ряд неудач в использовании алгоритма транспортной задачи был вызван тем, что на ее базе пытались решать вопросы, которые по сложности своего содержания выходят за рамки возможностей этого алгоритма. В связи с этим, по-видимому, уместно обратить внимание на существование проблемы такого рода. С одной стороны, простота и изученность алгоритма транспортной задачи, а также наличие большого числа программ для машинного счета порождают вполне закономерное желание всемерно расширять сферу применимости этого метода математического программирования, тем более, что как об этом уже говорилось выше, с его помощью можно решать задачи вообще не имеющие никакого отношения ни к транспорту, ни к перевозкам: с другой — не следует забывать, что всякий метод имеет предел своих возможностей, по достижению которого он не только перестает быть эффективным, но и может привести к неправильным результатам. В связи с этим желание во что бы то ни стало втиснуть многообразие действительных ситуаций в ограничения, накладываемые алгоритмом транспортной задачи, может на практике привести лишь к дискредитации самого метода.

Отсюда решение вопроса о том, что можно сделать на путях использования даже такого, казалось бы простого и очевидного метода, каким является алгоритм транспортной задачи, а что выходит за пределы его возможностей, приобретает весьма актуальное значение. Данная статья, естественно, не преследовала цель дать ответ на этот вопрос. Однако изложение математической постановки транспортной задачи, модификаций, которые претерпел метод за время своего существования и проблем, возникающих при его практическом применении, позволит читателю самому задуматься над этим вопросом в плане тех конкретных задач, с которыми ему приходится сталкиваться, и попытаться найти на него правильный ответ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Креко. Лекции по линейному программированию. Сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 1. М., Соцэкгиз, 1959.
2. Математические методы планирования производства. Сб. статей под ред. М. М. Федоровича. М., Экономиздат, 1961.
3. Глейзал. Алгоритм для решения проблемы транспортировки. Сб. Математика. Т. 2, № 1, М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. R. Dorfman, P. A. Samuelson, R. Solow. Linear Programming and Economic Analysis. New York, 1958.
5. Г. Кун. Венгерский метод решения задачи о назначениях. Сб. Методы и алгоритмы решения транспортной задачи. М., Госстатиздат, 1963.
6. Л. В. Канторович, М. К. Гавурин. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Сб. Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., Изд-во АН СССР, 1949.
7. Н. Рейнфельд, У. Фогель. Математическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Ю. А. Олейник. Решение задачи о транспортировке на ЭВМ методом приближения условно оптимальными планами. Изд-во АН СССР, 1960.
9. А. Л. Лурье. Алгоритм решения транспортной задачи путем приближения условно-оптимальными планами. Тр. науч. совещ. о примен. матем. методов в эконом. исследованиях и планировании, т. 6. М., Изд-во АН СССР, 1961.
10. Манкрес. Алгоритм решения задачи выбора и транспортной задачи Сб. [1].
11. Форд, Фулкерсон. Решение транспортной задачи. Алгоритм одновременного решения прямой и двойственной задачи для проблемы Хичкока с ограничениями пропускной способности. Сб. [5].
12. А. Л. Брудно. Решение транспортной задачи методом вычеркивающей нумерации. Сб. Применение ЦВМ в экономике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
13. В. А. Маш. Применение методов линейного программирования для решения обобщенной задачи поставок. Сб. Вопр. совершенствования планирования и материально-технического снабжения. М., Экономиздат, 1963.
14. Е. П. Нестеров. Транспортные задачи линейного программирования. М., Трансжелдориздат, 1962.
15. И. Я. Бирман. Транспортная задача линейного программирования. М., Экономиздат, 1962.

Поступила в редакцию
3 VI 1965