

Назовем *аналитическим плановым расчетом* для S автономных и (или) сводных плановых расчетов

$$\{(f_{k_p ij}^\sigma)\}, \{(q_{k_p})\}, \{A_{k_p}\}, B_p, \text{ где } k_p \in \{k_p\}, p = 1, 2, \dots, S,$$

прямой плановый расчет

$$\{(f_{kij}^\sigma)\}, \{(q_k)\}, \{A_k\}, \quad (*)$$

где $k \in \{k\}$ и выдаются на печать все таблицы результатов, если для любого $k \in \{k\}$ область определения функций $\{(f_{kij}^\sigma)\}$ принадлежит матрицам

$$(q_k), \bigcup_{k_p \in \{k_p\}} (q_{k_p}).$$

Можно привести эквивалентное определение аналитического планового расчета, использующее понятие базовой матрицы*.

Рассмотрим S автономных и (или) сводных плановых расчетов

$$\{(f_{k_p ij}^\sigma)\}, \{(q_{k_p})\}, \{A_{k_p}\}, B_p, \text{ где } k_p \in \{k_p\}, p = 1, 2, 3, \dots, S.$$

Назовем экономический показатель базовым для аналитического планового расчета (*), если его значение входит в область определения функций $\{(f_{kij}^\sigma)\}$.

Пусть $\{O_i P_1^i P_2^i, \dots, P_r^i\}$ — множество базовых показателей. Составим матрицу, у которой строки (столбцы) образуют соответствующие экономические показатели из множества базовых показателей. Обозначим полученную матрицу через (q_B) и будем называть ее базовой.

Аналитическим плановым расчетом для S автономных и (или) плановых расчетов $\{(f_{k_p ij}^\sigma)\}, \{(q_{k_p})\}, \{A_{k_p}\}, B_p$, где $k_p \in \{k_p\}$, $p = 1, 2, \dots, S$, называется прямой плановый расчет $\{(f_{kij}^\sigma)\}, \{(q_k)\}, \{A_k\}$, где $k \in \{k\}$ и выдаются на печать все таблицы результатов, если для любого $k \in \{k\}$ область определения функций $\{(f_{kij}^\sigma)\}$ принадлежит матрице (q_B) .

Автономные плановые расчеты, свободные плановые расчеты, аналитические плановые расчеты являются по определению прямыми плановыми расчетами, но каждый из них обладает частными особенностями. Следовательно, можно говорить о трех подклассах класса прямых плановых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Волчков, Ю. Р. Лейбkind, Ю. М. Самохин. Некоторые вопросы создания автоматизированной системы разработки народнохозяйственного плана. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 1.
2. В. С. Проскуров, О. М. Юнъ. Автоматизация разработки планового баланса денежных доходов и расходов населения. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 4.

Поступила в редакцию
13 I 1967

* Название базовой матрицы предложено М. А. Макаркиным.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Е. БАХТИН, Ю. И. ВОЛКОВ

(Новосибирск)

В заметке рассматривается вопрос об использовании метода последовательного улучшения плана для решения класса линейных задач с матрицей специальной структуры. Предполагается, что эта матрица наряду с произвольным блоком содержит транспортный блок.

Известно, что при применении общих алгоритмов линейного программирования для решения больших задач встречаются значительные трудности, ограничивающие размеры решаемых задач. Опыт показывает, что для многих практически важных задач, если учесть их особенности, эти трудности могут быть успешно преодолены. Эта общая идея учета специфики и использована при организации вычислений в методе последовательного улучшения плана для решения рассматриваемых задач. Основной выигрыш получается за счет компактной записи необходимой оперативной информации.

1. Постановка задачи. Заданы вещественные числа $c_j, j = 1, \dots, n, c_{ik}, (i, k) \in J \subset \{(i, k) : i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n; l \neq k\}$ и m -мерные векторы-столбцы $\bar{a}_j = (a_{ij})_{i=1, \dots, m}, j = 1, \dots, n, \bar{a} = (a_i)_{i=1, \dots, m}$.

Требуется найти неотрицательный вектор $X = (x_j)_{j=1, \dots, n}$ и систему неотрицательных чисел $X = \{x_{ik}\}, (i, k) \in J$, минимизирующие функцию

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{(i,k) \in J} c_{ik} x_{ik} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \sum_{k: (i, k) \in J} x_{ik} + \sum_{l: (l, i) \in J} x_{li} = a_i, \quad i \in \mu = \{1, \dots, m\}. \quad (2)$$

Сформулированная задача допускает следующую экономическую интерпретацию. Имеется несколько технологических способов производства различных продуктов. Известно задание на выпуск каждого вида продукции. В некоторых случаях разрешается замена одного вида продукции другим, что связано с дополнительными затратами. Требуется найти интенсивности использования технологических способов и указать, в каких объемах выгодно произвести замену продуктов, чтобы выполнить задание по выпуску с наименьшими суммарными затратами.

На схеме 1 показана структура матрицы поставленной задачи линейного программирования. Матрица ограничений (2) этой задачи содержит m строк и $n + n'$ столбцов, где n' — число элементов в множестве пар J .

Первые n столбцов этой матрицы совпадают с заданными векторами $\bar{a}_j$; остальные столбцы $\bar{a}_{(i,k)}$ $((i,k) \in J)$ содержат по два ненулевых элемента: i -й элемент равен -1 , k -й равен $+1$.

c_j	c_{ik}	
$\vdots$	$\vdots$	
$\dots a_{ij} \dots$	$\dots -1 \dots$	$\dots a_i$
$\vdots$	$\vdots$	
$\dots a_{kj} \dots$	$\dots +1 \dots$	$\dots a_k$
$\vdots$	$\vdots$	

Схема 1

Неотрицательная пара (X, X) , удовлетворяющая условиям (2), называется *допустимым* решением задачи. Допустимое решение (X, X) называется *оптимальным*, если функция (1) принимает на нем минимальное значение.

2. Описание алгоритма. При отыскании оптимального решения задачи линейного программирования методом последовательного улучшения на каждом шаге имеется допустимое решение и соответствующая ему система линейно независимых векторов (столбцов матрицы системы (2)). С помощью оценок, однозначно определяемых из системы линейных уравнений, проверяется оптимальность имеющегося решения и в случае неоптимальности производится его улучшение (см. [1]).

Пусть (X, X) — допустимое базисное решение задачи, а

$$\bar{a}_j, j \in \{j_1, \dots, j_N\},$$

$$\bar{a}_{(i,k)}, (i,k) \in T = \{(i_1, k_1), \dots, (i_M, k_M)\} \quad (3)$$

— соответствующая ему система линейно независимых векторов, которые образуют базис в m -мерном пространстве $(N + M = m)$. Система (3) такова, что

$$x_{j_1} \bar{a}_{j_1} + \dots + x_{j_N} \bar{a}_{j_N} + x_{i_1 k_1} \bar{a}_{(i_1, k_1)} + \dots + x_{i_M k_M} \bar{a}_{(i_M, k_M)} = \bar{a}. \quad (4)$$

Вектор оценок $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ находится из уравнений

$$\sum_{i=1}^m a_{ij_t} \pi_i = c_{j_t}, \quad t = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$\pi_k - \pi_i = c_{ik}, \quad (i,k) \in T.$$

В системе (5) вторая группа уравнений имеет специфический вид, и это, как мы покажем ниже, позволяет вместо обратной матрицы системы (5) порядка m запоминать некоторое преобразование, занимающее значительно меньший объем памяти машины и несущее в себе всю информацию, необходимую для проведения метода последовательного улучшения плана.

Рассмотрим ориентированный граф (μ, T) . Он состоит из нескольких несвязанных между собой связных подграфов* и подграфов, являющихся

* Граф (μ, T_ρ) называется связным, если для любых двух его вершин k_1 и k_2 найдется цепь из ребер, соединяющая их. Цепью, соединяющей вершину k_1 с вершиной k_2 , называется последовательность ребер, в которой первое и последнее ребро (и только они) содержат вершины k_1 и k_2 соответственно, любые два соседних ребра имеют общую вершину и никакие два несоседних ребра общих вершин не имеют.

изолированными вершинами. И те и другие обозначим через (μ_ρ, T_ρ) , $\rho = 1, \dots, N$ (для изолированных вершин соответствующие множества μ_ρ будут содержать лишь одну вершину, а множества ребер T_ρ пусты).

Разобьем вторую группу уравнений системы (5) на подгруппы соответственно разбиению множества T на подмножества T_ρ :

$$\pi_k \rightarrow \pi_i = c_{ik}, \quad (i, k) \in T_\rho.$$

Из каждой такой подсистемы с точностью до постоянного слагаемого найдем оценки:

$$\pi_i = \pi_{i0} + \Delta_\rho. \quad (6)$$

В дальнейшем для удобства записи будем считать, что формулы (6) определяют π_i для $i \in \mu_\rho$ при всех $\rho = 1, \dots, N$, положив для изолированных вершин соответствующие им π_{i0} равными нулю.

Если теперь в (5) вместо π_i подставить выражения (6), то для определения неизвестных величин Δ_ρ получим систему:

$$\sum_{\rho=1}^N \left(\sum_{i \in \mu_\rho} a_{ij_t} \right) \Delta_\rho = c_{j_t} - \sum_{i \in \mu} a_{ij_t} \pi_{i0}, \quad t = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Порядок системы (7) равен N , т. е. числу векторов $\bar{a}_{j_t}$, вошедших в базис. Ясно, что если система (5) имеет единственное решение, то и система (7) также будет иметь единственное решение.

Перепишем систему (7) в виде

$$\bar{\Delta} B = \bar{d}, \quad (7')$$

где

$$B = \{b_{\rho t}\}, \quad \rho, t = 1, \dots, N,$$

$$b_{\rho t} = \sum_{i \in \mu_\rho} a_{ij_t}, \quad \rho = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\bar{d} = (d_1, \dots, d_t, \dots, d_N),$$

$$d_t = c_{j_t} - \sum_{i \in \mu} a_{ij_t} \pi_{i0}, \quad t = 1, \dots, N. \quad (9)$$

$\bar{\Delta} = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ — вектор неизвестных величин.

Вычислив для B обратную матрицу B^{-1} , найдем решение системы (7'):

$$\bar{\Delta} = d B^{-1}.$$

Базисное решение (X, X) оптимально тогда и только тогда, когда найденные оценки $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$\pi_k - \pi_i \leq c_{ik}, \quad (i, k) \in J,$$

причем, для $j \in \{j_1, \dots, j_N\}$ и $(i, k) \in T$ имеет место равенство.

Если в (10) неравенство с номером j_0 или (i_0, k_0) не выполняется, то вводя в базис вектор $\bar{a} = (a_i)_{i=1, \dots, m}$, равный соответственно $\bar{a}_{j_0}$ или $\bar{a}_{(i_0, k_0)}$, можно улучшить решение. Для этого нужно найти коэффициенты разложения вектора $\bar{a}$ по векторам базиса $\bar{a}_{j_t}$, $t = 1, \dots, N$ и $\bar{a}_{(i_\tau, k_\tau)}$, $\tau = 1, \dots, M$, т. е. решить систему линейных уравнений:

$$\sum_{t=1}^N a_{ij_t} x'_{j_t} - \sum_{k: (i, k) \in T} x_{ik}' + \sum_{l: (l, i) \in T} x_{li}' = a_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Решение системы (11) может быть получено следующим образом. Преобразуем m -мерный вектор $\bar{a}$ в N -мерный вектор $\bar{\beta} = (\beta_\rho)_{\rho=1, \dots, N}$ по формулам:

$$\beta_\rho = \sum_{i \in \mu_\rho} a_i, \quad \rho = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Формулу (12) будем называть преобразованием вектора $\bar{a}$ в соответствии с графом (μ, T) . Столбцами матрицы B , таким образом, являются векторы $\bar{a}_{j_t}$, $t = 1, \dots, N$, преобразованные в соответствии с графом (μ, T) .

Замечание. Применительно к векторам вида $\bar{a}_{(i, k)}$ преобразование (12) упрощается: если i и k являются вершинами одного и того же подграфа, то $\bar{\beta} = 0$; если же $i \in \mu_{\rho_1}$, а $k \in \mu_{\rho_2}$ ($\rho_1 \neq \rho_2$), то ρ_1 -я компонента преобразованного вектора равна -1 , ρ_2 -я $+1$, остальные равны нулю.

Умножим матрицу B^{-1} на вектор $\bar{\beta}$, получим $B^{-1}\bar{\beta} = X' = (x'_{j_1}, \dots, x'_{j_N})$ — коэффициенты разложения $\bar{a}$, относящиеся к векторам $\bar{a}_{j_t}$. Коэффициенты разложения $\bar{a}$ при векторах $\bar{a}_{(i_\tau, k_\tau)}$ находятся из системы:

$$-\sum_{k: (i, k) \in T} x'_{ik} + \sum_{l: (l, i) \in T} x'_{li} = a_i - \sum_{t=1}^N a_{ij_t} x'_{j_t}, \quad i \in \mu. \quad (13)$$

Система (13) распадается на N независимых подсистем

$$-\sum_{k: (i, k) \in T_\rho} x'_{ik} + \sum_{l: (l, i) \in T_\rho} x'_{li} = a_i - \sum_{t=1}^N a_{ij_t} x'_{j_t}, \quad i \in \mu_\rho, \quad \rho = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Подсистемы, состоящие из одного уравнения, т. е. те, которые соответствуют изолированным вершинам, представляют собой тождества и потому могут быть исключены из рассмотрения. Каждая из оставшихся подсистем содержит одно уравнение, являющееся следствием остальных, и неизвестные x'_{ik} , $(i, k) \in T_\rho$ определяются из ρ -й подсистемы аналогично потокам в замкнутой транспортной задаче.

Таким образом, вектор $\bar{a}$ может быть представлен:

$$\bar{a} = x'_{j_1} \bar{a}_{j_1} + \dots + x'_{j_N} \bar{a}_{j_N} + x'_{i_1 k_1} \bar{a}_{(i_1, k_1)} + \dots + x'_{i_M k_M} \bar{a}_{(i_M, k_M)}. \quad (15)$$

Умножая (15) на ε , $\varepsilon > 0$ и вычитая из соотношения (4), получим:

$$(x_{j_1} - \varepsilon x'_{j_1}) \bar{a}_{j_1} + \dots + (x_{j_N} - \varepsilon x'_{j_N}) \bar{a}_{j_N} + (x_{i_1 k_1} - \varepsilon x'_{i_1 k_1}) \bar{a}_{(i_1, k_1)} + \dots + (x_{i_M k_M} - \varepsilon x'_{i_M k_M}) \bar{a}_{(i_M, k_M)} + \varepsilon \bar{a} = \bar{a}. \quad (16)$$

Если взять ε равным

$$\min \left(\min_{x'_{j_t} > 0} \frac{x_{j_t}}{x'_{j_t}}, \min_{x'_{i_\tau k_\tau} > 0} \frac{x_{i_\tau k_\tau}}{x'_{i_\tau k_\tau}} \right)$$

и подставить его в (16), получим соотношение типа (4), т. е. разложение вектора $\bar{a}$ по новому базису (в базис вошел вектор $\bar{a}$ вместо вектора, коэффициент при котором в (16) обратился в нуль). Коэффициенты этого разложения представляют собой компоненты нового решения.

Покажем теперь, как исправляются матрица B^{-1} и граф (μ, T) при переходе к новому базису.

Граф, соответствующий новому базису, обозначим $(\mu, \bar{T})$, его подграфы — $(\mu_\rho, \bar{T}_\rho)$, а матрицу новой системы $(7')$, получаемую преобразованием векторов $\bar{a}_i$ нового базиса по графу $(\mu, \bar{T})$, через $\tilde{B}$.

Возможны следующие случаи.

I. Вектор $\bar{a} = \bar{a}_{j_0}$ вытесняет из базиса вектор $\bar{a}_{j_t}$. В этом случае $(\mu, \bar{T}) = (\mu, T)$, $(\mu_\rho, \bar{T}_\rho) = (\mu_\rho, T_\rho)$, $\rho = 1, \dots, N$; матрица $\tilde{B}$ отличается от B одним столбцом (вместо столбца, соответствующего выводимому из базиса вектору, записывается преобразованный по графу $(\mu, \bar{T})$ вектор $\bar{a}_{j_0}$).

Переход от B^{-1} к $\tilde{B}^{-1}$ осуществляется по формулам (см. [2]):

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{\rho\tau} &= z_{\rho\tau} - \frac{z_{\tau t}}{x_{j_t}} x_{j_\rho}, \quad \rho \neq t, \quad \tau = 1, \dots, N, \\ \tilde{z}_{t\tau} &= \frac{z_{\tau t}}{x_{j_t}}, \quad t = 1, \dots, N,\end{aligned}\quad (17)$$

где $z_{\rho\tau}$ и $\tilde{z}_{\rho\tau}$ — элементы матриц B^{-1} и $\tilde{B}^{-1}$ соответственно, а x_{j_ρ} , $\rho = 1, \dots, N$ — коэффициенты разложения вектора $\bar{a}_{j_0}$ по старому базису.

II. Вектор $\alpha = \bar{a}_{j_0}$ вытесняет из базиса $\bar{a}_{(i,k)}$. Пусть, например, $(i, k) \in T_{\rho_1}$. Тогда число подграфов в графе $(\mu, \bar{T})$ будет на единицу больше числа подграфов в графе (μ, T) , причем $(\mu_\rho, \bar{T}_\rho) = (\mu_\rho, T_\rho)$, $\rho = 1, \dots, N$, $\rho \neq \rho_1$, а $(\mu_{\rho_1}, \bar{T}_{\rho_1})$ и $(\mu_{N+1}, \bar{T}_{N+1})$ получаются из $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$, если из T_{ρ_1} выбросить ребро (i, k) . Порядок матрицы $\tilde{B}$ на единицу больше порядка B , и она имеет вид:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} & \beta_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_{\rho_1 1} & \dots & \tilde{b}_{\rho_1 N} & \tilde{\beta}_{\rho_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} & \beta_N \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{N+1,1} & \dots & b_{N+1,N} & \beta_{N+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}b_{\rho,t} &= \sum_{i \in \mu_{\rho_1}} a_{it}, \quad t = 1, \dots, N, \quad b_{N+1,t} = \sum_{i \in \mu_{N+1}} a_{it}, \quad t = 1, \dots, N, \\ \tilde{\beta}_{\rho_1} &= \sum_{i \in \mu_{\rho_1}} a_{ij_0}, \quad \beta_{N+1} = \sum_{i \in \mu_{N+1}} a_{ij_0}.\end{aligned}$$

Переход от B^{-1} к $\tilde{B}^{-1}$ можно осуществить последовательным выполнением следующих двух шагов.

Шаг I. Вычисляется обратная матрица к матрице

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{b}_{\rho_1 1} & \dots & \tilde{b}_{\rho_1 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} - \rho_1\text{-я строка.}$$

Матрица $\hat{B}$ отличается от B лишь одной строкой, и элементы ее обратной матрицы могут быть вычислены так же, как и в случае I путем исправления B^{-1} :

$$\hat{z}_{\rho t} = z_{\rho t} - \frac{z_{\rho \rho_1}}{x_{\rho_1}} x'_t, \quad \rho = 1, \dots, N, t \neq \rho_1,$$

$$\hat{z}_{\rho\rho_1} = \frac{z_{\rho\rho_1}}{x_{\rho_1}'}, \quad \rho = 1, \dots, N.$$

Здесь $z_{\rho t}$, $\hat{z}_{\rho t}$ — элементы матриц B^{-1} и $\hat{B}^{-1}$ соответственно; $x_t' - t = 1, \dots, N$ — компоненты вектора $\bar{x}' = (x_1', \dots, x_N')$, получающегося в результате умножения ρ -й строки матрицы $\hat{B}$ на матрицу B^{-1} .

Шаг 2. Из $\hat{B}^{-1}$ за одну итерацию метода окаймления (см. [2]) находится матрица $\tilde{B}^{-1}$. Соответствующие формулы имеют вид

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{B}^{-1} + \frac{\hat{B}^{-1}\hat{\beta}\bar{b}_{N+1}\hat{B}^{-1}}{\gamma}, & -\frac{\hat{B}^{-1}\hat{\beta}}{\gamma} \\ -\frac{\bar{b}_{N+1}\hat{B}^{-1}}{\gamma}, & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \beta_{N+1} - \bar{b}_{N+1}\hat{B}^{-1}\hat{\beta}.$$

Здесь через $\bar{b}_{N+1}$ и $\hat{\beta}$ обозначены N -мерные вектор-строка и вектор-столбец, компонентами которых являются первые N элементов последней строки и последнего столбца матрицы $\tilde{B}$ соответственно.

III. В базис вошел вектор $a = \bar{a}_{(i_0, k_0)}$, вытеснив при этом вектор $\bar{a}_{j_t}$, $t \in \{1, \dots, N\}$.

Пусть $i_0 \in \mu_{\rho_1}$, $k_0 \in \mu_{\rho_2}$. Ясно, что $\rho_1 \neq \rho_2$, так как в противном случае система векторов $\{\bar{a}_{(i, k)}, (i, k) \in T_{\rho_1}; \bar{a}_{(i_0, k_0)}\}$ линейно зависима. Число подграфов в графе $(\mu, \tilde{T})$ на единицу меньше по сравнению с (μ, T) . Вместо двух подграфов $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$ и $(\mu_{\rho_2}, T_{\rho_2})$ графа (μ, T) в $(\mu, \tilde{T})$ будет один $(\mu_{\rho_1}, \tilde{T}_{\rho_1})$, где $\mu_{\rho_1} = \mu_{\rho_1} \cup \mu_{\rho_2}$, $\tilde{T}_{\rho_1} = T_{\rho_1} \cup T_{\rho_2} \cup (i_0, k_0)$. Остальные же подграфы графа (μ, T) будут не связанными между собой подграфами и графа $(\mu, \tilde{T})$. Мы лишь изменим номер N -го подграфа, присвоив ему номер ρ_2 , $(\mu_{\rho_2}, \tilde{T}_{\rho_2}) = (\mu_N, T_N)$. Матрица $\tilde{B}$ будет иметь порядок на единицу меньше порядка матрицы B и может быть получена из нее вычеркиванием столбца с номером t и сложением строк с номерами ρ_1 и ρ_2 . В матрице $\tilde{B}$ строка, получающаяся от сложения двух этих строк, должна быть помещена в строке с номером ρ_1 , а в ρ_2 -й строке должна быть помещена N -я строка матрицы B . Переход от B^{-1} к $\tilde{B}^{-1}$ осуществляется за два шага.

Шаг 1. Путем исправления B^{-1} находится обратная матрица для матрицы $\hat{B}$, где

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_1 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_1 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} - \rho_1\text{-я строка}, \quad \hat{b}_{\rho_1 t} = b_{\rho_1 t} + b_{\rho_2 t}, \quad t = 1, \dots, N.$$

Делается это так же, как шаг 1 случая II.

Шаг 2. Аналогично, путем исправления $\hat{B}^{-1}$, находится обратная матрица для матрицы

$$\hat{\hat{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_1 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_1 N} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} - \begin{matrix} \rho_1\text{-я строка,} \\ \rho_2\text{-я строка.} \end{matrix}$$

Если теперь в матрице $\hat{\hat{B}}^{-1}$ поменять местами ρ_2 -й и N -й столбцы, а также t -ю и N -ю строки, то в левом верхнем углу будет находиться $\tilde{B}^{-1}$ (см. [2]).

IV. В базис вошел вектор $\bar{a} = \bar{a}_{(i_0, k_0)}$, вытеснив при этом вектор $\bar{a}_{(i, k)}$:

1) $i_0, k_0 \in \mu_\rho$. Тогда $(\tilde{\mu}_\rho, \tilde{T}_\rho) = (\mu_\rho, T_\rho)$, если $\rho \neq \rho_0$, то $(\mu_{\rho_0}, T_{\rho_0})$ преобразуется в $(\tilde{\mu}_{\rho_0}, \tilde{T}_{\rho_0})$ следующим образом: $\tilde{\mu}_{\rho_0} = \mu_{\rho_0}$, $\tilde{T}_{\rho_0} = T_{\rho_0} \cup (i_0, k_0) \setminus (i, k)$. Матрица $\tilde{B}$ равна B и, следовательно, $\tilde{B}^{-1} = B^{-1}$.

2) $i_0 \in \mu_{\rho_0}$, $k_0 \in \mu_{\rho_1}$, $\rho_0 \neq \rho_1$, а $(i, k) \in T_{\rho_2}$.

Количество подграфов графа (μ, T) равно количеству подграфов графа (μ, T) . Как и в случае II, при выведении из базиса $\bar{a}_{(i, k)}$ граф $(\mu_{\rho_2}, T_{\rho_2})$ после удаления из него ребра (i, k) распадется на два не связанных между собой подграфа, которые мы обозначим $(\tilde{\mu}_{\rho_2}, \tilde{T}_{\rho_2})$ и $(\mu_{\rho_1}, \tilde{T}_{\rho_1})$. Наряду с этим, благодаря тому, что в базис вошел вектор $\bar{a}_{(i_0, k_0)}$, вместо двух графов $(\mu_{\rho_0}, T_{\rho_0})$ и $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$ образуется один граф, который обозначим $(\tilde{\mu}_{\rho_0}, \tilde{T}_{\rho_0})$ (см. случай III). Все остальные подграфы остаются без изменения, и мы сохраним за ними прежнюю нумерацию. Матрица $\tilde{B}^{-1}$ может быть получена из B^{-1} за три шага.

Шаг 1. Вычисляется обратная матрица для матрицы

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_2 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_2 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} - \rho_2\text{-я строка,} \quad \hat{b}_{\rho_2 t} = \sum_{i \in \tilde{\mu}_{\rho_2}} a_{it}, \quad t = 1, \dots, N.$$

Шаг 2. Переход от $\hat{B}^{-1}$ к $\hat{\hat{B}}^{-1}$

$$\hat{\hat{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_0 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_0 N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_2 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_2 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} - \rho_0\text{-я строка,} \\ \\ - \rho_2\text{-я строка,} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\hat{\hat{b}}_{\rho_0 t} = b_{\rho_0 t} + b_{\rho_1 t}, \quad t = 1, \dots, N.$$

Шаг 3. Вычисление $\tilde{B}^{-1}$ путем исправления $\hat{\hat{B}}^{-1}$.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_0 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_0 N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_2 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_2 N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_1 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_1 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ - \rho_0\text{-я строка,} \\ \\ - \rho_2\text{-я строка,} \\ \\ - \rho_1\text{-я строка,} \\ \end{matrix}$$

$$\tilde{b}_{\rho_1 t} = \sum_{i \in \tilde{\mu}_{\rho_1}} a_{it}, \quad t = 1, \dots, N.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
10 VIII 1965

$$\hat{z}_{\rho\rho_1} = \frac{z_{\rho\rho_1}}{x_{\rho_1}}, \quad \rho = 1, \dots, N.$$

Здесь $z_{\rho t}$, $\hat{z}_{\rho t}$ — элементы матриц B^{-1} и $\hat{B}^{-1}$ соответственно; $x_t' - t = 1, \dots, N$ — компоненты вектора $\bar{x}' = (x_1', \dots, x_N')$, получающегося в результате умножения ρ -й строки матрицы $\hat{B}$ на матрицу B^{-1} .

Шаг 2. Из $\hat{B}^{-1}$ за одну итерацию метода окаймления (см. [2]) находится матрица $\tilde{B}^{-1}$. Соответствующие формулы имеют вид

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{B}^{-1} + \frac{\hat{B}^{-1}\hat{\beta}\bar{b}_{N+1}\hat{B}^{-1}}{\gamma}, & -\frac{\hat{B}^{-1}\hat{\beta}}{\gamma} \\ -\frac{\bar{b}_{N+1}\hat{B}^{-1}}{\gamma}, & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \beta_{N+1} - \bar{b}_{N+1}\hat{B}^{-1}\hat{\beta}.$$

Здесь через $\bar{b}_{N+1}$ и $\hat{\beta}$ обозначены N -мерные вектор-строка и вектор-столбец, компонентами которых являются первые N элементов последней строки и последнего столбца матрицы $\hat{B}$ соответственно.

III. В базис вошел вектор $\bar{a} = \bar{a}_{(i_0, k_0)}$, вытеснив при этом вектор $\bar{a}_{i_1}$, $t \in \{1, \dots, N\}$.

Пусть $i_0 \in \mu_{\rho_1}$, $k_0 \in \mu_{\rho_2}$. Ясно, что $\rho_1 \neq \rho_2$, так как в противном случае система векторов $\{\bar{a}_{(i, k)}, (i, k) \in T_{\rho_1}; \bar{a}_{(i_0, k_0)}\}$ линейно зависима. Число подграфов в графе (μ, T) на единицу меньше по сравнению с (μ, T) . Вместо двух подграфов $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$ и $(\mu_{\rho_2}, T_{\rho_2})$ графа (μ, T) в (μ, T) будет один $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$, где $\mu_{\rho_1} = \mu_{\rho_1} \cup \mu_{\rho_2}$, $T_{\rho_1} = T_{\rho_1} \cup T_{\rho_2} \cup (i_0, k_0)$. Остальные же подграфы графа (μ, T) будут не связанными между собой подграфами и графа (μ, T) . Мы лишь изменим номер N -го подграфа, присвоив ему номер ρ_2 , $(\mu_{\rho_2}, T_{\rho_2}) = (\mu_N, T_N)$. Матрица B будет иметь порядок на единицу меньше порядка матрицы B и может быть получена из нее вычеркиванием столбца с номером t и сложением строк с номерами ρ_1 и ρ_2 . В матрице $\tilde{B}$ строка, получающаяся от сложения двух этих строк, должна быть помещена в строке с номером ρ_1 , а в ρ_2 -й строке должна быть помещена N -я строка матрицы B . Переход от B^{-1} к $\tilde{B}^{-1}$ осуществляется за два шага.

Шаг 1. Путем исправления B^{-1} находится обратная матрица для матрицы $\tilde{B}$, где

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_1 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_1 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{— } \rho_1\text{-я строка,} \\ \\ \hat{b}_{\rho_1 t} = b_{\rho_1 t} + b_{\rho_2 t}, \quad t = 1, \dots, N. \\ \\ \end{matrix}$$

Делается это так же, как шаг 1 случая II.

Шаг 2. Аналогично, путем исправления $\tilde{B}^{-1}$, находится обратная матрица для матрицы

$$\hat{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_1 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_1 N} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{— } \rho_1\text{-я строка,} \\ \\ \\ \text{— } \rho_2\text{-я строка.} \end{matrix}$$

Если теперь в матрице $\hat{\tilde{B}}^{-1}$ поменять местами ρ_2 -й и N -й столбцы, а также t -ю и N -ю строки, то в левом верхнем углу будет находиться $\tilde{B}^{-1}$ (см. [2]).

IV. В базис вошел вектор $\bar{a} = \bar{a}_{(i_0, k_0)}$, вытеснив при этом вектор $\bar{a}_{(i, k)}$:
1) $i_0, k_0 \in \mu_{\rho}$. Тогда $(\mu_{\rho}, T_{\rho}) = (\mu_{\rho}, T_{\rho})$, если $\rho \neq \rho_0$, то $(\mu_{\rho_0}, T_{\rho_0})$ преобразуется в $(\mu_{\rho_0}, T_{\rho_0})$ следующим образом: $\mu_{\rho_0} = \mu_{\rho_0}, T_{\rho_0} = T_{\rho_0} \cup (i_0, k_0) \setminus (i, k)$. Матрица B равна B и, следовательно, $B^{-1} = B^{-1}$.

2) $i_0 \in \mu_{\rho_0}, k_0 \in \mu_{\rho_1}, \rho_0 \neq \rho_1$, а $(i, k) \in T_{\rho_2}$.
Количество подграфов графа (μ, T) равно количеству подграфов графа $(\mu_{\rho_2}, T_{\rho_2})$. После удаления из него ребра (i, k) распадется на два не связанных между собой подграфа, которые мы обозначим $(\mu_{\rho_2}, T_{\rho_2})$ и $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$. Наряду с этим, благодаря тому, что в базис вошел вектор $\bar{a}_{(i_0, k_0)}$, вместо двух графов $(\mu_{\rho_0}, T_{\rho_0})$ и $(\mu_{\rho_1}, T_{\rho_1})$ образуется один граф, который обозначим $(\mu_{\rho_0}, T_{\rho_0})$ (см. случай III). Все остальные подграфы остаются без изменения, и мы сохраним за ними прежнюю нумерацию. Матрица B^{-1} может быть получена из B^{-1} за три шага.

Шаг 1. Вычисляется обратная матрица для матрицы

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_2 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_2 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{— } \rho_2\text{-я строка,} \\ \\ \hat{b}_{\rho_2 t} = \sum_{i \in \mu_{\rho_2}} a_{i t}, \quad t = 1, \dots, N. \\ \\ \end{matrix}$$

Шаг 2. Переход от $\hat{B}^{-1}$ к $\tilde{B}^{-1}$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_0 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_0 N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_2 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_2 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{— } \rho_0\text{-я строка,} \\ \\ \text{— } \rho_2\text{-я строка,} \\ \\ \hat{b}_{\rho_0 t} = b_{\rho_0 t} + b_{\rho_2 t}, \quad t = 1, \dots, N. \end{matrix}$$

Шаг 3. Вычисление $\tilde{B}^{-1}$ путем исправления $\tilde{B}^{-1}$.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_0 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_0 N} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_{\rho_2 1} & \dots & \hat{b}_{\rho_2 N} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & \dots & b_{NN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{— } \rho_0\text{-я строка,} \\ \\ \text{— } \rho_2\text{-я строка,} \\ \\ \text{— } \rho_1\text{-я строка,} \\ \\ \hat{b}_{\rho_1 t} = \sum_{i \in \mu_{\rho_1}} a_{i t}, \quad t = 1, \dots, N. \end{matrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
10 VIII 1965