16. J. Pearson. Decomposition, Coordination and Multilevel Systems. Syst. Sci. Conf., Cleveland, Ohio, 1965.
17. Б. Н. Михалевский, Ю. П. Соловьев. Производственная функция народного хозяйства СССР в 1951—1963 гг. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 6.
18. Б. Н. Михалевский. Макроэкономическая функция как модель экономического роста. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 2.
19. Статистика народного богатства, народного дохода и национальные счета. М., «Наука», 1967.
20. А. С. Соловьев. Финансово-производственные связи в народнохозяйственной модели планирования. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 1.
21. J. Bates and Bachrach. Input-Output Relations-Ship 1960—1961. Cambridge University, Program for Growth. Cambridge, 1963.
22. И. Ямада. Теория и приложение межотраслевого метода, М., изд-во иностр. лит., 1962.
23. R. Frisch. A Complete Scheme for Computing All Direct and Crose-Demand Elasticitied in a Model With Many Sectors. Econometrica, 1959, v. 27, N 2.
24. Б. Н. Михалевский. Две задачи оценки эффективности капиталовложений в отрасль. В сб. [1].
25. К. В. Ачелашвили. Оценка проектов капиталовложений по критерию максимума нормы эффективности в условиях неполной информации. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 4.
26. И. П. Френкина. Статистическая обработка динамических рядов, Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 2.
27. Н. О. Райбман, В. О. Чадеев. Адаптивные модели в системах управления. М., «Советское радио», 1966.

Поступила в редакцию
15 IV 1967

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 5

ЛОКАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ И РЕШЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

В. Ф. ПУГАЧЕВ

(Москва)

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Столь сложная система, как народное хозяйство, не может функционировать в качестве единого монолита, в качестве единого гигантского предприятия. Экономическая система всегда распадается на ряд более простых частей (подсистем), на ряд хозяйственных объектов, так или иначе взаимодействующих друг с другом. Правильная организация этого взаимодействия — одно из важнейших направлений в разработке конструктивной теории социалистической экономики.

Взаимодействие хозяйственных объектов может осуществляться, например, на основе директивных методов руководства. Однако опыт свидетельствует о недостаточной эффективности таких методов. Директивные методы должны заменяться иными, экономическими методами управления, построенными на действенном стимулировании каждого хозяйственного объекта в соответствии с интересами общества.

В процессе функционирования современной развитой экономики определяющую роль играет научно-технический прогресс, непрерывное создание новых производственных возможностей. Единственным источником совершенствования экономики является человек: инициатива и творчество всех членов общества приводят как к крупным открытиям, так и к повседневному улучшению хозяйства.

Но способности человека могут проявляться тем полнее, чем большей свободой выбора решений он обладает и чем выше его заинтересованность в получении результата. Именно эти особенности человеческой личности в конечном счете определяют коренные преимущества экономических методов руководства народным хозяйством.

Эффективное использование экономических методов возможно, однако, лишь при условии, что социалистическое общество может правильно ориентировать все хозяйственные объекты в процессе их деятельности и правильно ставить задачи перед любой частью народного хозяйства, исходя из интересов целого. Иначе говоря, общество должно располагать таким *локальным критерием оптимальности*, который бы полностью соответствовал народнохозяйственному оптимуму. Выявление такого локального критерия является одной из главных проблем теории оптимизации экономики.

Построение локального критерия с позиций принципа народнохозяйственной оптимальности было осуществлено в статье [1]. В статье показано, что локальным критерием, наиболее полно соответствующим народнохозяйственному оптимуму, является критерий вида

$$W = \int_{-\infty}^{t} p\,dx, \qquad (1)$$

где $p = p(t)$ — вектор оптимальных цен, $x = x(t)$ — вектор продукции и затрат хозяйственного объекта, dx — дифференциал вектора x.

Нижний предел интегрирования в формуле (1) может браться и конечным; удобно, например, взять за начало отсчета времени ($t = 0$) тот момент, начиная с которого реально осуществляется вычисление величины W, и вместо формулы (1) записать:

$$W = \int_0^t p dx. \tag{2}$$

Критерий W получил название *народнохозяйственной эффективности объекта*. Такое название правомерно в силу основного свойства критерия W — пропорциональности любых его приращений, соответствующим приращениям народнохозяйственного критерия оптимальности U (см., например, [2]):

$$dW \div dU. \tag{3}$$

Практические приложения локального критерия народнохозяйственной эффективности (и его модификации в виде роста эффективности ΔW) могут быть различными. В статье [1] рассматривалось лишь одно из возможных направлений применения локального критерия W — для оценки хозяйственной деятельности и стимулирования работников.

Весьма интересные возможности открываются и при использовании локального критерия W для решения частных задач оптимизации (в первую очередь отраслевых), для построения эффективных алгоритмов многоступенчатой оптимизации (в частности межотраслевой) и т. д. Данная статья посвящена первому из этих новых направлений применения критерия W.

Интересно отметить, что исследования в области разработки оптимальных отраслевых планов фактически уже привели к использованию дискретной формы показателя народнохозяйственной эффективности. Однако в силу дискретности такого процесса оптимизации он ранее трактовался как процесс максимизации прибыли.

Так, часто предлагалось осуществлять расчеты оптимальных отраслевых планов для нескольких дискретных значений объема производства продукции, каждый из которых соответствует вполне определенной цене реализации (или, что фактически то же самое, определенной эффективности использования). Решая далее задачу на максимум суммарной прибыли, получающейся для всех выделенных дискретных объемов производства и соответствующих им цен, можно найти оптимальное значение объема производства продукции и соответствующий этому объему оптимальный план отрасли.

Нетрудно видеть, что такая «суммарная прибыль» фактически является не прибылью в обычном понимании, а народнохозяйственной эффективностью отрасли. Однако эффективность здесь исчисляется приближенно, через ряд дискретных значений объемов производства.

Если же осуществить предельный переход к бесконечно малым приращениям объемов производства и операцию суммирования заменить интегрированием, то это как раз и даст общую интегральную форму народнохозяйственной эффективности. Зная зависимость цен от объемов производства, с помощью этой интегральной формулы можно осуществить точное построение критерия отрасли в виде соответствующей нелинейной функции.

В. А. Маш разработал постановку задачи оптимального развития и размещения отрасли, предусматривающую максимизацию народнохозяйственной эффективности [3]. Эта же постановка используется также некоторыми другими авторами.

Понятие эффективности возникает и при рассмотрении некоторых алгоритмов решения условно-экстремальных задач, в которых используется механизм оценок. При реализации этих алгоритмов на каждой итерации осуществляется максимизация прибыли, исчисляемой в оценках предыдущей итерации. Но то, что на отдельной итерации может толковаться как прибыль, при суммировании для ряда итераций является уже не прибылью, а эффективностью, исчисляемой дискретно, по итерациям. Таким образом, во всех таких алгоритмах фактически используется не принцип максимизации прибыли, а механизм максимизации эффективности.

В целом сейчас имеются разные точки зрения на соотношение между понятиями прибыли и народнохозяйственной эффективности. Так, существует мнение, что эффективность является не новым показателем, а лишь новым пониманием прибыли применительно к условиям оптимального функционирования. В связи с этим предлагаются термины «народнохозяйственная прибыль», «сверхприбыль», «оптимальная прибыль» и т. д.

Вряд ли дискуссия в этом направлении является достаточно содержательной. В конце концов нужно знать, *как строить и использовать локальный критерий*, а не как его трактовать. Но, конечно, нельзя противопоставлять прибыль и эффективность; наоборот, полезно подчеркивать, что локальный критерий народнохозяйственной эффективности является дальнейшим совершенствованием критерия прибыли.

2. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЧАСТНЫМ ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В многоступенчатой системе оптимизации экономики [4, 5] локальный критерий народнохозяйственной эффективности целесообразно использовать на всех ступенях управления. Это даст наилучшее сочетание интересов всех уровней управления, а тем самым — наиболее точное соблюдение оптимального режима функционирования экономики.

В настоящее время нет еще ситуации, которую бы можно было считать достаточно близкой к оптимальному режиму. Рекомендации, полученные для оптимального режима, можно применять к существующим условиям лишь с очень большой осторожностью. Тем не менее процесс переноса этих рекомендаций на существующую систему является неизбежным, так как это — единственный практически возможный путь последовательной оптимизации экономики.

Локальный критерий народнохозяйственной эффективности может в полной мере проявить свои преимущества лишь при ценах, близких к оптимальным, и при органической связи этих цен с объемами производства. Существующие цены не являются оптимальными и не обладают требуемой оперативностью, в связи с чем сейчас широко используются более простые локальные критерии, чем народнохозяйственная эффективность: такие как максимум прибыли или минимум полных приведенных затрат.

Но по мере расширения фронта работ в области оптимального планирования все чаще возникают задачи, в которых нельзя пренебрегать зависимостью цен (или оценок эффективности использования) от объемов производства.

Сюда относится прежде всего группа задач отраслевого оптимального перспективного планирования, связанных с производством и использованием новых видов материалов. Новый материал может вытеснять ранее применявшиеся традиционные материалы и тем самым создавать ту или иную экономию. Но эта экономия не одинакова при разных направлениях использования нового материала: в одних случаях она очень велика, в других незначительна. Если все возможные варианты применения нового

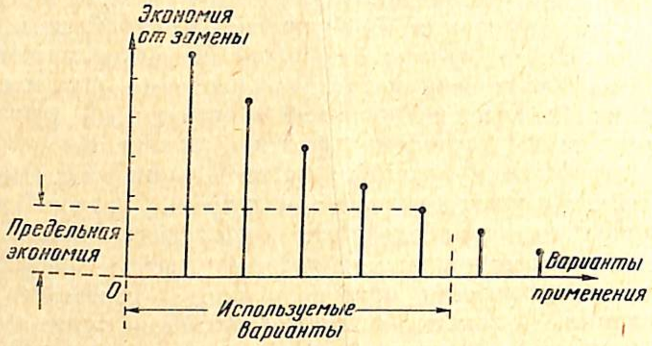

Рис. 1. Варианты использования нового материала и предельная экономия

материала расположить в порядке убывания этой экономии, то по мере увеличения объема производства и расширения сферы применения будут последовательно охватываться все менее эффективные варианты замены (рис. 1). Следовательно, будет падать экономия от использования последней произведенной единицы нового материала. С некоторыми оговорками

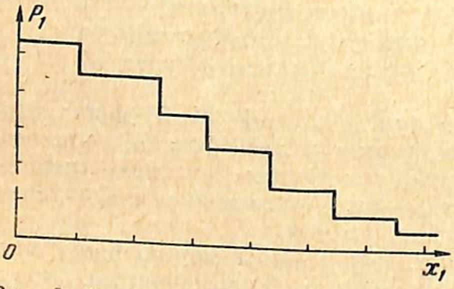

Рис. 2. Ступенчатая зависимость предельной экономии (оптимальной цены реализации p_1) от объема производства x_1

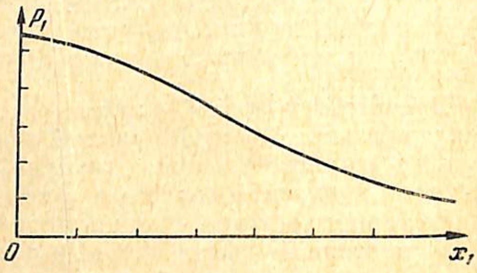

Рис. 3. Плавная зависимость предельной экономии (оптимальной цены реализации p_1) от объема производства x_1

эту предельную экономию можно считать тождественной оптимальной цене реализации нового материала p_1, которая существенно зависит от объема производства x_1:

$$p_1 = p_1(x_1). \tag{4}$$

При относительно небольшом числе вариантов использования нового материала эта зависимость должна рассматриваться как ступенчатая (рис. 2), при значительном числе вариантов — как плавная (рис. 3).

Такая же ситуация возникает в задачах оптимального планирования производства минеральных удобрений, предельная эффективность применения которых падает с увеличением объема производства; в задачах, связанных с производством новых видов машин, вытесняющих старые; наконец, в задачах оптимального планирования производства предметов потребления, где цена реализации непосредственно зависит от объема предложения. В сущности наличие зависимости типа (4) является наиболее общей ситуацией при решении отраслевых задач.

Аналогично (4) в каждой конкретной ситуации может быть построена и зависимость полных предельных затрат p_2 от объема производства x_1, т. е. зависимость вида

$$p_2 = p_2(x_1). \tag{5}$$

Под затратами p_2 при этом понимаются дополнительные затраты на последнюю единицу продукции x_1, исчисленные в оптимальных ценах затрачиваемых ресурсов.

Наличие зависимостей типа (4) и (5) приводит к возможности и необходимости решения соответствующих отраслевых задач с помощью локального критерия народнохозяйственной эффективности W. Однако в задачах планирования нельзя использовать методы вычисления W и ΔW, рассмотренные в статье [1], которые применимы лишь к прошлому, а не к будущему.

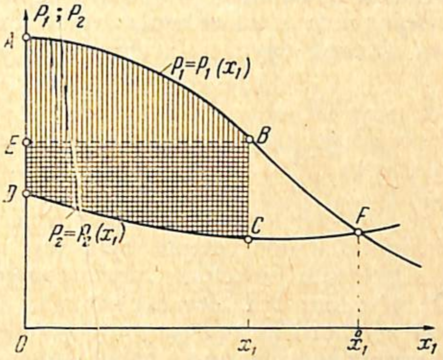

Рис. 4. Народнохозяйственная экономия и прибыль в условиях переменных p_1 и p_2

Рассмотрим сперва однопродуктовую задачу оптимального планирования, в которой для построения критерия имеется информация в виде зависимостей (4) и (5). В этом случае интеграл (2) естественно вычислять не по аргументу t, а по аргументу x_1, учитывая одновременно, что вектор цен p состоит всего из двух составляющих: p_1 (продукция) и $(-p_2)$ — затраты. Тогда получим

$$W = \int_0^{x_1} p\,d\bar{x}_1 = \int_0^{x_1} [p(x_1) - p_2(x_1)]\,dx_1. \tag{6}$$

Смысл этой формы народнохозяйственной эффективности особенно нагляден в том случае, когда x_1 — объем производства нового материала, а p_1 — получаемая при этом экономия. Тогда интеграл (6) дает *полную народнохозяйственную экономию*, соответствующую объему производства x_1. Следуя [3], эту полную экономию можно представить в виде площади фигуры *АВСД* на рис. 4 (штриховка вертикальная). Нетрудно видеть, что она существенно отличается от прибыли, которая равна площади фигуры *ВСДЕ* (штриховка горизонтальная).

Когда в отраслевой задаче берут локальный критерий типа минимума полных приведенных затрат (или минимума себестоимости, минимума капитальных вложений), то неизбежно приходится фиксировать объем производства продукции. Постановка задачи на максимум народнохозяйственной эффективности позволяет снять это крайне неприятное дополнительное условие и резко расширить сферу оптимизации за счет определения самого объема производства в результате решения поставленной задачи.

Так, рис. 4 показывает, что при отсутствии дополнительных ограничений объем производства целесообразно расширять до тех пор, пока это увеличивает площадь фигуры *АВСД*, т. е. пока $p_1 > p_2$. Следовательно, оптимальный объем производства $\mathring{x}_1$ определяется точкой F — точкой пересечения кривых $p_1(x_1)$ и $p_2(x_1)$. По своему смыслу этот результат аналогичен полученному в статье [1] в связи с обсуждением недостатков критерия прибыли; вряд ли стоит еще раз пояснять, что максимизация прибыли привела бы к гораздо меньшему значению x_1.

Введение дополнительных ограничений на затрачиваемые ресурсы меняет не характер рассмотренной задачи, а лишь количественное выражение затрат. В процессе решения задачи оптимального планирования лимитированные ресурсы получают соответствующую оценку и именно с этой оценкой входят в затраты.

Проведенные рассуждения можно обобщить и на многопродуктовые модели оптимизации. Проще всего такое обобщение сделать для случая, когда нет перекрестной зависимости цен от объемов производства, т. е. когда цена каждого продукта зависит только от объема производства этого продукта и не зависит от объемов производства других видов продукции. В этом случае интеграл (2) распадается на n интегралов

$$W = \int_0^x p dx = \sum_i \int_0^{x_i} p_i(x_i) dx_i, \tag{7}$$

в каждом из которых содержится только один аргумент. Дальнейшие вычисления и построение функции $W(x)$ не представляют труда.

Принцип решения многопродуктовых задач оптимизации по критерию (7) в сущности остается прежним. Оптимальный объем производства для каждого из продуктов будет определяться точкой пересечения соответствующей этому продукту кривой $p_i(x_i)$ с кривой затрат на его производства (точкой F на рис. 4). Различие проявится лишь в том, что оценки лимитированных ресурсов, используемых для производства нескольких видов продукции, будут устанавливаться исходя из требования равной эффективности их использования. В связи с этим многопродуктовые задачи оптимизации позволяют устанавливать оптимальную структуру производства при заданных ограничениях на используемые ресурсы.

Построение локального критерия $W(x)$ значительно усложняется, когда имеется перекрестная зависимость цен от объемов, т. е. когда цены p_i являются функциями нескольких x_i. В этом случае интеграл (2) не может быть вычислен непосредственно и необходимо обратиться к дифференциальной формуле народнохозяйственной эффективности

$$dW = pdx. \tag{8}$$

Эта формула показывает, что в общем случае *вектор цен является градиентом W в пространстве x*:

$$\nabla W = p, \tag{9}$$

откуда следует, что локальный критерий W должен определяться из системы n дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial W}{\partial x_n} &= p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial W}{\partial x_n} &= p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Здесь мы сталкиваемся с проблемой, аналогичной проблеме построения единой целевой функции потребления по n заданным функциям спроса. Задача (10) может быть решена лишь при условии, что для первых производных цен по объемам при любых i и j выполняются равенства

$$\partial p_i / \partial x_j = \partial p_j / \partial x_i, \tag{11}$$

т. е. при условии симметричности матрицы эластичностей относительно ее главной диагонали. Несоблюдение условий симметрии (11) будет свидетельствовать о неправильном эмпирическом построении зависимостей $p_i(x)$.

Существуют общие аналитические и численные методы интегрирования системы уравнений типа (10). Однако они сложны, и их использование вряд ли целесообразно. Значительно проще непосредственно закладывать уравнение (10) в итеративные процедуры оптимизации.

Так, многие алгоритмы построены по принципу: задаем некоторые цены, получаем для них оптимальный план; уточняем цены, уточняем план и т. д. Ясно, что для таких процедур практически достаточно знать зависимости $p_i\ (x)$ и не нужно в явном виде строить $W(x)$.

Можно указать, кроме того, относительно простой способ получения W в виде ряда Тейлора. Выбирая некоторую точку $\bar{x}$ в качестве исходной, можно с помощью (10) сразу найти первые производные W в этой точке. Дифференцируя далее соотношения (10), можно найти вторые производные W в точке $\bar{x}$ через первые производные цен

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} = \frac{\partial p_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial p_j}{\partial \bar{x}_i}. \tag{12}$$

Наличие первых и вторых производных позволяет построить квадратичную модель W в окрестности точки $\bar{x}$ — модель вида

$$W(x) = W(\bar{x}) + \nabla W(\bar{x})\,(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\,(x - \bar{x}) \left\| \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}_i \partial \bar{x}_j} \right\| (x - \bar{x}). \tag{13}$$

Такая модель в большинстве случаев была бы, видимо, вполне достаточной. При необходимости дальнейших уточнений можно продолжить процесс вычисления частных производных и строить более сложные модели $W(x)$.

Таким образом, построение локального критерия народнохозяйственной эффективности принципиально возможно во всех тех случаях, когда задана зависимость цен p от объемов производства x, сколь бы сложна ни была эта зависимость. Использование критерия народнохозяйственной эффективности еще только начинается; в решенных задачах пока что нашла применение лишь дискретная форма этого критерия, основанная на дифференцированном учете каждого конкретного направления использования продукции.

3. ПРИМЕР ПОСТАНОВКИ КОНКРЕТНОЙ ОТРАСЛЕВОЙ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

В качестве примера конкретной отраслевой задачи, поставленной и предварительно решенной для дискретной формы народнохозяйственной эффективности, рассмотрим задачу оптимизации структуры производства и распределения химических волокон на 1970 г., описанную в статье [6] *. Здесь мы кратко воспроизведем ее первоначальную постановку данную авторами, а затем покажем, как эту постановку можно было бы видоизменить применительно к общей форме локального критерия народнохозяйственной эффективности.

Пусть i — индекс различных видов производимых химических волокон $(1 \leqslant i \leqslant m)$, x_i — объем производства i-го вида волокна; j — индекс воз-

* Аналогично ставилась задача оптимизации структуры производства и распределения пластмасс [7].

можных потребителей волокон ($1 \leqslant j \leqslant n$), x_{ij} — объем потребления волокна вида i потребителем j, a_{ij} — величина экономического эффекта от использования единицы i-го волокна j-м потребителем (исчисляемая авторами как разность между полными приведенными затратами на единицу заменяемого традиционного материала и на единицу химического волокна-заменителя); b_{0i} — удельная капиталоемкость по кругу сопряженных химических производств для i-го вида волокна, S_0 — суммарные капиталовложения в производство химических волокон и соответствующего химического сырья, выделяемые для этих видов производств; b_{ri} — удельный расход r-го вида дефицитного сырья на единицу i-го вида химического волокна ($1 \leqslant r \leqslant l$); S_r — суммарные ресурсы дефицитного сырья, выделяемые для производства химических волокон; x_j — общий объем потребления волокон j-м потребителем, выраженный либо в условных единицах, либо в основном волокне; c_{ij} — коэффициенты перевода i-го вида волокна, используемого j-м потребителем, в условный или основной продукт; при этом $x_j = \sum_i c_{ij} x_{ij}$; h_i — нижний предел производства i-го химического волокна; m_j и M_j — нижний и верхний пределы суммарного потребления химических волокон j-м потребителем; m_{ij} и M_{ij} — нижний и верхний пределы потребления i-го волокна j-м потребителем; λ_{ij} — составляющие вектора комплектности для тех волокон, используемых j-м потребителем, которые должны поставляться в строгих пропорциях, θ_j — коэффициенты пропорциональности между поставками и векторами λ_j.

В этих обозначениях условия задачи оптимизации структуры производства и распределения химических волокон запишутся в виде системы неравенств:

(а) $\sum_i b_{0i} x_i \leqslant S_0$ — ограничения по общему объему капитальных вложений,

(б) $\sum_i b_{ri} x_i \leqslant S_r$, — ограничения по общему использованию дефицитных видов сырья,

(в) $\sum_j x_{ij} \leqslant x_i$, — балансовые соотношения производства и потребления,

(г) $h_i \leqslant x_i$, — ограничения снизу по объемам производства,

(д) $m_j \leqslant \sum_i c_{ij} x_{ij} \leqslant M_j$, — ограничения снизу и сверху по суммарному потреблению волокон,

(е) $m_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant M_{ij}$, — ограничения снизу и сверху по потреблению каждого вида волокна,

(ж) $x_{ij} = \theta_j \lambda_{ij}$ — условие комплектности поставок волокон (для тех случаев, когда оно имеется).

Критерием оптимальности в описываемой задаче служит требование максимума полной народнохозяйственной экономии от замены традиционных материалов химическими волокнами, т. е. требование максимума народнохозяйственной эффективности. Это требование записывается в дискретной форме

$$(з) \quad \sum_{ij} a_{ij} x_{ij} \to \max.$$

В задаче (а) — (з) неизвестными являются величины x_i и x_{ij}, от которых зависит план производства и распределения всех видов химических волокон. Определив эти величины на основе требования (з) при условиях (а) — (ж), мы получим *оптимальный план* производства и распределения химических волокон.

Сформулированная задача допускает ряд упрощений, которые и используют авторы [6]. Путем соответствующего сдвига начала отсчета для неизвестных x_i и x_{ij} легко устранить ограничения снизу для объемов производства и потребления. Неравенство (в) можно априорно полагать равенством. Наиболее неприятные для вычислений условия (д) и (ж) можно на первом этапе решения отбросить и учесть на последующих этапах. В результате существенными оказываются лишь ограничения (а) — (б) по лимитированным ресурсам и верхние ограничения по потреблению каждого вида волокна.

В связи с этим исходная задача переписывается в виде

$$\begin{gathered}\sum_i b_{ri}x_i \leqslant S_r, \qquad x_i = \sum_i x_{ij}, \\ x_{ij} \leqslant M_{ij}, \qquad \sum_{ij}{}' a_{ij}x_{ij} \to \max.\end{gathered} \tag{14}$$

Расположим теперь для каждого i-го волокна величины a_{ij} в порядке их убывания (как на рис. 1) и построим соответствующие ступенчатые функции:

$$p_i(x_i) = \begin{cases} a_{i1} \text{ при } 0 < x_i < M_{i1}, \\ a_{i2} \text{ при } M_{i1} < x_i < M_{i1} + M_{i2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{in} \text{ при } \sum_{j=1}^{n-1} M_{ij} < x_i < \sum_{j=1}^{n} M_{ij}, \\ 0 \text{ при } x_i > \sum_{j=1}^{n} M_{ij}. \end{cases} \tag{15}$$

Каждая такая функция будет иметь вид, изображенный на рис. 2; но она может легко перейти в плавную кривую (по типу рис. 3). Это может произойти по крайней мере в следующих двух случаях: а) когда число потребителей достаточно велико и ступенчатостью $p_i(x_i)$ практически можно пренебречь; б) когда учитывается падающая эффективность применения химических волокон у каждого конкретного потребителя (т. е. переменность самих величин a_{ij}). Так или иначе функции $p_i(x_i)$ — ступенчатые они или плавные — можно рассматривать как заданные условиями задачи и использовать в качестве основы для построения критерия оптимальности.

Совершенно ясно, что при решении задачи (14) тот или иной вариант использования химического волокна вида i может войти в оптимальный план лишь при условии, что в план уже вошли все более эффективные варианты, характеризующиеся большими значениями a_{ij}. Иначе говоря, варианты использования каждого вида волокон будут входить в оптимальный план *в порядке убывания величин* a_{ij}, т. е. так, как это предусмотрено при построении функций (15).

Если для каждого i величины a_{ij} расположены в порядке их убывания, то при решении задачи (14) суммы

$$\sum_j a_{ij}x_{ij} \tag{16}$$

фактически могут принимать лишь следующие значения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = \begin{cases} a_{i1}x_i \text{ при } 0 \leqslant x_i \leqslant M_{i1}, \\ a_{i1}M_{i1} + a_{i2}(x_i - M_{i1}) \text{ при } M_{i1} \leqslant x_i \leqslant M_{i1} + M_{i2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}M_{ij} + a_{in}\left(x_i - \sum_{j=1}^{n-1} M_{ij}\right) \text{ при } \sum_{j=1}^{n-1} M_{ij} \leqslant x_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} M_{ij}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}M_{ij} \text{ при } x_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} M_{ij}. \end{cases}$$

Сравнивая эти формулы для сумм (16) с ранее построенными функциями (15), нетрудно заметить, что *все возможные значения этих сумм могут быть получены путем интегрирования функций* (15) *по их аргументам* x_i. Следовательно, можно записать

$$\sum_j a_{ij}x_{ij} = \int_0^{x_i} p_i(x_i)\,dx_i. \tag{17}$$

Полученный результат позволяет представить критерий оптимальности задачи (14) в форме

$$\sum_i \int_0^{x_i} p_i(x_i)\,dx_i \to \max,$$

что полностью совпадает с формулой (7) для народнохозяйственной эффективности W (случай отсутствия перекрестных зависимостей цен от объемов производства). Следовательно, задачу (14) можно переписать в виде

$$\sum_i b_{ri}x_i \leqslant S_r, \quad W = \sum_i \int_0^{x_i} p_i(x_i)\,dx_i \to \max, \tag{18}$$

т. е. в виде задачи *на максимум* W.

Главной целью преобразования задачи (14) в задачу (18) было показать *эквивалентность постановок на максимум народнохозяйственной эффективности в дискретной и общей форме.* Эта цель достигнута. Но одновременно более общий взгляд на задачу (14) позволил обобщить и упростить ее.

Обобщение заключается в том, что в задачу (18) можно безболезненно ввести зависимость эффективности использования химических волокон у каждого потребителя от объема потребления, т. е. зависимости a_{ij} от x_{ij}; можно ввести и другие нелинейные факторы. Все это лишь изменит форму функций $p_i(x_i)$, но никак не повлияет на постановку задачи.

Задача (18) проще исходной задачи (14) в силу двух обстоятельств: исключения неизвестных x_{ij} (что сокращает общее число неизвестных в $(n+1)$ раз) и ликвидации двух групп ограничений (балансовые соотношения производства и потребления, верхние границы потребления). В то же время решение задачи (18) позволяет найти не только x_i, но в конечном счете и x_{ij} — в соответствии с правилами формирования функций $p_i(x_i)$.

Для решения задачи (18) могут быть применены относительно простые итеративные методы, реализация которых не требует предварительного вычисления интегралов, содержащихся в критерии оптимальности. Критерий W в своей интегральной форме позволяет указывать для каждого набора x_i соответствующие им цены p_i, и наоборот, для каждого набора цен p_i — отвечающие им значения x_i. Поэтому может быть применена, например, одна из процедур следующего типа: назначаем оценки на ограничения задачи (18), по ним определяем все цены p_i как суммы затрат всех видов лимитированных ресурсов; с помощью критерия W находим x_i, соответствующие этим ценам; проверяем выполнение ограничений путем подстановки в них полученных x_i и уточняем первоначально взятые оценки ограничений; далее все операции повторяем и т. д.

Итеративные процедуры такого типа не могут быть, конечно, реализованы в столь простой форме и требуют использования разного рода дополнительных приемов (например усреднения величин x_i). Различные варианты итеративных методов такого типа были опробованы при составлении оптимального плана для целлюлозно-бумажной промышленности [8, 9] и успешно развиваются в работах [10—12].

Наконец, задача (18) очень прозрачна по своему смыслу, что позволяет легко ее модифицировать применительно к тем или иным дополнительно возникающим ограничениям. Так, ограничения (д) в исходной задаче оптимизации производства и распределения химических волокон можно учесть после предварительного решения (18) путем приравнивания нулю или уменьшения величин M_{ij} для тех видов волокон, которые оказались относительно менее эффективными у j-го потребителя. После соответствующей коррекции функции $p_i(x_i)$ повторное решение задачи (18) дает требуемый результат. С помощью величин M_{ij} можно учесть и дополнительные требования комплектности (ж).

ВЫВОДЫ

Изложенное в данной статье позволяет сделать вывод о возможности и целесообразности практического использования локального критерия народнохозяйственной эффективности при решении ряда задач оптимального планирования. Но, разумеется, исследования в этой области не носят законченного характера и должны быть продолжены. Одним из важных направлений этих работ явилось бы создание алгоритма межотраслевой оптимизации, построенного на основе локального критерия народнохозяйственной эффективности.

Вместе с тем изложенное в данной статье позволяет более четко представить отличия локального критерия народнохозяйственной эффективности от локального критерия в виде прибыли, показывает недостаточность и неправомерность критерия прибыли в условиях переменных цен. Это дает новые аргументы для дальнейшего обсуждения проблем локального критерия оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Пугачев. Локальный критерий и стимулирование работников в оптимальной экономической системе. Экономика и матем. методы, 1966, т. II, вып. 5.
2. В. Ф. Пугачев. О критерии оптимальности экономики. В сб. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. М., изд-во АН СССР, 1963.

3. В. А. Маш. Состояние исследований по перспективному отраслевому планированию и основные направления дальнейших работ. Материалы Всес. конф. по применению экон.-матем. методов в отраслевом планировании и управлении. М., 1966 (ротапринт).
4. В. Ф. Пугачев. Аппроксимационная схема многоступенчатого оптимального планирования народного хозяйства. В сб. Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. М., «Наука», 1965.
5. В. Ф. Пугачев. Проблемы оптимальности в народном хозяйстве. Коммунист, 1966, № 3.
6. Ю. Н. Гаврилец, И. Е. Кричевский. Статическая модель оптимизации структуры производства и распределения химических волокон на период 1966—1970 гг. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 5.
7. Н. П. Федоренко, Б. О. Иоффе, А. О. Алешин. Об оптимизации структуры производства пластмасс. Плановое хоз-во, 1965, № 10.
8. В. Ф. Пугачев, Б. З. Смолянницкий. Опыт составления оптимального плана отрасли. Плановое хоз-во, 1965, № 8.
9. В. Г. Медницкий. О методе решения задачи оптимального распределения плановых заданий в отрасли. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 6.
10. В. Г. Медницкий. О принципах оптимального планирования в отраслях и на межотраслевом уровне. Материалы Всес. конф. по применению экон.-матем. методов в отраслевом планировании и управлении. М., 1966 (ротапринт).
11. В. И. Данилов-Данильян. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. В сб. Модели и алгоритмы оптимального планирования. М., изд. ЦЭМИ АН СССР, 1966.
12. А. К. Пителин. Построение итеративных алгоритмов для решения задач оптимального планирования. Материалы Всес. конф. по применению экон.-матем. методов в отраслевом планировании и управлении. М., 1966 (ротапринт).

Поступила в редакцию
20 IV 1967

ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1967
том III, вып. 5

НЕКОТОРЫЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНЦЕПЦИИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ

Б. С. ФОМИН

(Москва)

Современные международные экономические отношения, характеризующиеся быстрым расширением мировой торговли, вносят много нового и специфического в процесс общественного расширенного воспроизводства. По мере развития международного обмена и усиления национальной производственной специализации внешняя торговля все сильнее оказывает влияние на размеры и материальную структуру валового продукта и национального дохода, подвергает изменениям процессы накопления, распределения и потребления.

Увеличение роли внешней торговли в экономике государств находит выражение прежде всего в росте экспортной квоты продукции промышленности и сельского хозяйства. В Англии, например, доля совокупного продукта, поступающего на внешние рынки, составляет в настоящее время около 15%, в ФРГ — 20%, в Швейцарии — около 25% и т. д. Мультипликационное же воздействие на экономику экспортных оборотов, т. е. воздействие экспортного производства на сопряженные секторы экономики, делает народнохозяйственную зависимость от внешних рынков значительно более сложной и сильной.

Вместе с развитием внешней торговли в капиталистических государствах начинает возрастать и интерес к теоретическим исследованиям проблем международных экономических отношений. Перспективное проектирование развития экономики все в большей степени становится проектированием конъюнктуры на международном рынке. Вопросы формирования международных цен, методы количественного измерения преимуществ, связанных с национальной производственной специализацией, закономерности в миграции капитала и, наконец, влияние внешнеэкономических отношений на развитие национального хозяйства становятся предметом изучения все более широкого круга буржуазных экономистов и начинают занимать видное место в общем комплексе экономических исследований.

Советскому читателю уже известны работы наших экономистов, в которых анализируются буржуазные теории международных экономических отношений. В числе этих работ следует назвать прежде всего фундаментальные исследования проф. А. Фрумкина [1]. Цель же настоящей статьи заключается в том, чтобы сделать краткий анализ некоторых основных современных эконометрических концепций внешней торговли, поскольку для последних лет стало особенно характерным появление на Западе работ, в которых авторы пытаются дать новую трактовку основных положений теории международной торговли с позиций эконометрики.

Критическое исследование современных эконометрических концепций международной торговли необходимо для нас также и потому, что эти концепции и сконструированные на их основе модели в ряде случаев противоречат марксистско-ленинской теории мировой торговли и международ-