ЛИТЕРАТУРА

1. A. magyar népgazdaság M-1 statistikai makromodellje. Budapest, 1965.
2. L. R. Klein, A. S. Goldberger. An econometric model of the United States 1929—1952. Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1955.
3. L. R. Klein, R. J. Ball, A. Hazlewood, P. Vandome. An econometric model of the United Kingdom. Oxford, 1961.
4. A. S. Goldberger. Econometric theory. N. Y., 1964.
5. L. R. Klein. A textbook of econometrics. Evanston, White Plains N. Y., 1953.
6. G. Tintner. Handbuch der Ökonometrie (A handbook of econometrics). Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1960.
7. H. Theil. Economic forecasts and policy. Amsterdam, Narth Holland Publ. Co., 1958.
8. H. Theil. Estimation of parameters of econometric models. Proc. Internat. Statistic. Inst., v. 34, 2e Livre. Rome, 1953.
9. E. Theiss. Statistische Bestimmung der Parameter in Makromodellen. Paper at the symposium «Mathematics and Cybernetics in Economics», Berlin, 1964, 1—3 October.
10. В. С. Немчинов. Экономико-математические методы и модели, М., Соцэкгиз, 1962.
11. L. Halabuk. Das ungarische experimentelle Makromodell M-1. Paper at the symposium «Mathematics and Cybernetics in Economics», Berlin, 1964, 1—3 October.
12. Z. Kenessey. Simulationsuntersuchungen der Wirtschaftsprozesse und Makromodelle. Paper at the symposium «Mathematics and Cybernetics in Economics», Berlin, 1964, 1—3 October.

Поступила в редакцию
20 V 1967

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1967 том III, вып. 6

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ОТРАСЛЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Д. М. КАЗАКЕВИЧ

(*Новосибирск*)

Рассматривается следующая задача развития, размещения и специализации предприятий отрасли.

Имеется m пунктов, где размещены или могут быть построены предприятия отрасли. Для каждого из них имеется несколько вариантов развития и специализации. На предприятии в i-м пункте при развитии его и специализации по r-му варианту $(r = 1, 2, \ldots, R_i)$ может производиться в рассматриваемом периоде $a_{ik}{}^r$ единиц k-го продукта $(k = 1, 2, \ldots, l)$. Производственные затраты на единицу k-го продукта при реализации r-го варианта предприятия в пункте i равны $c_{ik}{}^r$. Потребность в каждом из продуктов распределена между пунктами потребления; в j-м пункте по k-му продукту она составляет b_{jk} единиц. Для каждой пары пунктов i и j известны затраты на перевозку единицы продукции; по k-му продукту они составляют s_{ijk} единиц. Причем предполагается, что транспортные затраты в расчете на единицу продукции постоянны. Вводятся неизвестные $z_i{}^r$ — интенсивность использования в плане r-го варианта предприятия в i-м пункте и x_{ijk} — объем поставки k-го продукта из пункта производства i в пункт потребления j. Требуется найти такой план производства и перевозок продукции в целом для отрасли, в котором из различных возможных комбинаций вариантов размещения, развития и специализации действующих и новых предприятий реализуется такая их комбинация, при которой заданная потребность всех пунктов в различных продуктах удовлетворяется с наименьшей суммой производственных и транспортных затрат.

Таким образом, задача сводится к нахождению значений неизвестных $z_i{}^r$ и x_{ijk}, минимизирующих функцию

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{R_i} a_{ik}{}^r c_{ik}{}^r z_i{}^r + \sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ijk}x_{ijk} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{ik}; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, l, \qquad (2)$$

$$\sum_{r=1}^{R_i} a_{ik}{}^r z_i{}^r \geqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ijk}; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, l, \qquad (3)$$

$$x_{ijk} \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, l, \qquad (4)$$

$$\sum_{r=1}^{R_i} z_i^r \leqslant 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

$$z_i^r = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots, R_i. \tag{6}$$

Ниже предлагается итеративный метод для решения задач такого типа.

Решение поставленной задачи распадается на последовательные стадии. Вначале она разбивается на однопродуктовые блоки, в каждом из которых решается открытая транспортная задача, формируемая следующим образом. Число поставщиков в транспортной задаче k-го блока равно количеству предприятий из числа включенных в производственно-транспортную задачу (1) — (6), которые производят k-й продукт. Объем производства у поставщика в пункте i составляет $\bar{a}_{ik} = \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant R_i} a_{ik}^r$. Таким образом, каждое предприятие представлено в транспортной задаче одним вариантом с максимальным объемом производства. Затраты на единицу продукта, поставляемого из пункта i в пункт потребления j, в формируемой транспортной задаче примем равными $\bar{c}_{ik} + s_{ijk}$, где $\bar{c}_{ik}$ — производственные затраты на единицу продукта, соответствующие его выпуску в объеме $\bar{a}_{ik}$. Введя фиктивный потребитель с номером $n + 1$, получим задачу, в которой отыскиваются значения неизвестных x_{ijk}, минимизирующих функцию

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\bar{c}_{ik} + s_{ijk}) x_{ijk} \tag{7}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk}{}^*; \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ijk} = \bar{a}_{ik}; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

$$x_{ijk} \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1. \tag{10}$$

При этом

$$b_{n+1,\,k} = \sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ik} - \sum_{j=1}^{n} b_{jk}.$$

Используемая дальше схема расчетов определяется в зависимости от исхода решения задачи (7) — (10). Рассмотрим вначале упрощенную схему, а затем перейдем к алгоритму, применяемому в общем случае.

Упрощенная схема расчетов приемлема, если при решении задачи (7) — (10) получаем матрицу, в которой число поставок реальным потребителям равно $\rho + n - 1$, где ρ — количество используемых поставщиков, а n — число реальных потребителей. При таком распределении поставок в плане задачи (7) — (10) связи между всеми используемыми поставщиками определяются через поставки реальным потребителям.

На основе распределения поставок в плане задачи (7) — (10) найдем величины $\hat{\mu}_{ik}$ — коэффициенты экономичности предприятий по затратам

---

* Приняв число поставщиков в задаче (7) — (10) равным m, мы предположили, что k-й продукт производится всеми предприятиями, включенными в задачу (1) — (6).

на транспортировку единицы k-го продукта (ненормированные) — и соответствующие им величины $\hat{v}_{jk}$, которые назовем коэффициентами экономичности потребителей. Вначале находятся коэффициенты $\hat{\mu}_{ik}$ предприятий-поставщиков, которые в плане задачи (7) — (10) прикрепились либо полностью, либо частично к реальным потребителям. Они определяются по следующему соотношению для клеток матрицы, занятых поставками:

$$\hat{v}_{jk} - \hat{\mu}_{ik} = s_{ijk}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Поскольку $\hat{\mu}_{ik}$ и $\hat{v}_{jk}$ исчисляются с точностью до постоянного слагаемого, не имеет принципиального значения, какой поставщик или потребитель получил начальный параметр, как и число, взятое в качестве начального параметра. Если принять для начала коэффициент частично используемого поставщика в плане задачи (7) — (10) равным 0, можно в отдельных случаях получить систему коэффициентов, не нуждающуюся в нормировке. Это соображение и учитывается при введении начального параметра.

Далее определяются коэффициенты экономичности поставщиков, которые в плане задачи (7) — (10) прикрепились полностью к фиктивному потребителю. Они рассчитываются по формуле

$$\hat{\mu}_{ik} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\hat{v}_{jk} - s_{ijk}\}. \tag{12}$$

Система коэффициентов экономичности, полученных согласно (11), (12), может нуждаться в нормировке, проводимой таким образом, чтобы все коэффициенты были неотрицательны и среди них обязательно был нулевой.

Введем μ_{ik} и v_{jk} — нормированные коэффициенты экономичности предприятий-поставщиков и потребителей по транспортным затратам. Чтобы получить μ_{ik} и v_{jk}, среди ненормированных коэффициентов $\hat{\mu}_{ik}$ находится минимальный по значению и затем найденная величина последовательно вычитается из всех $\hat{\mu}_{ik}$ и $\hat{v}_{jk}$. Таким образом,

$$\mu_{ik} = \hat{\mu}_{ik} - \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\hat{\mu}_{ik}\}, \quad v_{jk} = \hat{v}_{jk} - \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\hat{\mu}_{ik}\}. \tag{13}$$

По своему математическому содержанию ненормированные коэффициенты экономичности по транспортным затратам $\hat{v}_{jk}$ и $\hat{\mu}_{ik}$ есть исчисленные с точностью до постоянного слагаемого потенциалы новой транспортной задачи. Сформулируем эту задачу и двойственную ей.

Прямая задача. Найти значения x_{ijk}, минимизирующих функцию

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_{ijk} x_{ijk} \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} = b_{jk}; \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1} x_{ijk} = \tilde{a}_{ik}; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{16}$$

$$x_{ijk} \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Здесь $\tilde{a}_{ik}$ — найденные объемы производства в задаче (7) — (10).

Двойственная задача. Найти $\hat{v}_{jk}$ — потенциалы потребителей и $\hat{\mu}_{ik}$ — потенциалы поставщиков, приводящие к максимуму функцию

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\hat{v}_{jk} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ik}\hat{\mu}_{ik} \tag{18}$$

при условии, что

$$\hat{v}_{jk} - \hat{\mu}_{ik} \leqslant s_{ijk}; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Если провести нормировку полученных потенциалов потребителей и поставщиков, придающую им смысл о.о. оценок [1], получим искомые коэффициенты экономичности потребителей v_{jk} и поставщиков μ_{ik}. Необходимая нам нормировка потенциалов достигается, если в транспортной задаче (14) — (17) объемы производства увеличить на некоторую небольшую величину ε_{ik}, ввести фиктивный потребитель с объемом потребления, равным сумме величин ε_{ik}, добавленных к объемам производства, $v_{n+1,\,k}$ (потенциал фиктивного потребителя) принять равным нулю и определить остальные потенциалы по следующему соотношению для клеток матрицы, занятых поставками:

$$v_{jk} - \mu_{ik} = s_{ijk}; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n + 1. \tag{20}$$

Раскрывая содержание коэффициентов экономичности, полученных по упрощенной схеме расчета, мы по существу уже наметили подход, который используется для их вычисления в общем случае. Упрощенная схема недостаточна, если в плане задачи (7) — (10) связи между используемыми поставщиками находятся через поставки не только реальным, но и фиктивному потребителям, что неизбежно, если число поставок реальным потребителям меньше $\rho + n - 1$.

Алгоритм, используемый для вычисления коэффициентов экономичности μ_{ik} и v_{jk} в общем случае предусматривает, что после нахождения плана задачи (7) — (10) должна решаться новая транспортная задача (14) — (17). Но практически не возникает необходимости проводить специальное решение задачи (14) — (17). План распределения поставок $\{x_{ijk}\}$, найденный при решении задачи (7) — (10), одновременно есть и план задачи (14) — (17), так как распределение поставок в этой закрытой задаче не может измениться из-за того, что вместо коэффициентов целевой функции $\bar{c}_{ik} + s_{ijk}$ берутся s_{ijk}, поскольку $\bar{c}_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — величина, постоянная для всех j. Таким образом, в практических расчетах мы исходим дальше из плана задачи (7) — (10).

Далее формируется новая транспортная задача. В нее включаются поставщики, которые в задаче (7) — (10) либо полностью, либо частично прикрепились к реальным потребителям, т. е. отбираются поставщики, у которых $\tilde{a}_{ik} > 0$. К объемам поставок $\tilde{a}_{ik}$ добавляются ε_{ik}; фиктивный потребитель задачи (7) — (10) отбрасывается, вместо него вводится новый с объемом потребления $\sum\limits_{i} \varepsilon_{ik}$. Объемы b_{jk} для $j = 1, 2, \ldots, n$ остаются теми же, что и в задаче (7) — (10). В качестве коэффициентов целевой функции берутся s_{ijk}. Имея близкое к оптимальному первоначальное распределение поставок (план задачи (7) — (10)), сравнительно быстро находим оптимальное решение данной задачи вручную даже при ее большой размерности, хотя в принципе никаких особых трудностей для ее решения на ЭВМ тоже нет. Если потенциал фиктивного потребителя в рассматриваемой задаче принять равным нулю, получим потенциалы всех потребителей и поставщиков, совпадающие по смыслу с о.о. оценками и являющиеся искомыми коэффициентами экономичности v_{jk} и μ_{ik}. Последние таким образом будут найдены не для всех i. Для предприятий, которые в исходной задаче (7) — (10) прикрепились полностью к фиктивному потребителю ($\tilde{a}_{ik} = 0$), коэффициенты находятся по соотношению

$$\mu_{ik} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \{v_{jk} - s_{ijk}\}. \qquad (12')$$

Мы описали последовательность расчетов по нахождению коэффициентов экономичности в общем случае. Если же иметь в виду математическое содержание этих расчетов, то по существу решаются двойственные задачи (14) — (17) и (18) — (19), а найденные потенциалы нормируются таким образом, чтобы они обладали свойствами о.о. оценок.

Следующий шаг в решении производственно-транспортной задачи (1) — (6) — переход от коэффициентов экономичности по транспортным затратам μ_{ik} к коэффициентам экономичности вариантов предприятий по совокупным затратам $\mu_{ik}{}^r$:

$$\mu_{ik}{}^r = c_{ik}{}^r - \mu_{ik}; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots, R_i. \qquad (21)$$

Коэффициенты экономичности по совокупным затратам характеризуют предприятия по каждому из вариантов развития одновременно и как производителей, и как поставщиков продукции в заданные районы потребления. Экономический смысл коэффициентов $\mu_{ik}{}^r = c_{ik}{}^r - \mu_{ik}$ может быть объяснен следующим образом. Если на предприятии в пункте i по варианту r увеличить производство k-го продукта на единицу, то значение целевой функции задачи (суммы производственно-транспортных затрат) возрастет на величину производственных затрат на единицу $c_{ik}{}^r$ и уменьшится на величину, равную коэффициенту μ_{ik}, отражающему изменение транспортных затрат; в целом функционал изменится на величину разности указанных величин, т. е. на $\mu_{ik}{}^r$.

Величины μ_{ik} есть потенциалы полученного определенным образом плана транспортной задачи. Они остаются постоянными до тех пор, пока, изменяя объемы производства $a_{ik}{}^r$, мы не перешли к другому допустимому базису транспортной задачи. При отыскании целочисленного решения производственно-транспортной задачи и переборе вариантов производства объемов $a_{ik}{}^r$ можно ограничиться изменениями в рамках допустимого базиса транспортной задачи, которому соответствуют величины μ_{ik}, но можно и выйти за эти рамки. Описываемый метод опирается на большой экспериментальный материал и решение многих реальных задач. Как показывает опыт, коэффициенты μ_{ik} устойчивы в достаточно большом интервале и, кроме того, изменяются плавно при переходе от одного базиса транспортной задачи к другому. Поэтому при работе с величинами μ_{ik}, по которым находятся $\mu_{ik}{}^r$, часто удается или найти оптимальный план производственно-транспортной задачи, или в значительной мере приблизиться к нему уже после первой итерации расчетов.

Заметим здесь, что поскольку мы ищем план производства при помощи коэффициентов μ_{ik}, обладающих относительной устойчивостью, важно, чтобы варианты производства были заданы соответствующим образом. Как показывает опыт, быстрота и степень приближения к оптимуму при использовании излагаемого метода решения производственно-транспортных задач во многом зависят от задания вариантов. Чем больше задается вариантов развития и специализации предприятий и чем соответственно менее резко различаются они между собой по объемам производства и экономическим показателям, тем большей является вероятность нахождения при помощи данного метода оптимального решения производственно-транспортной задачи. Более благоприятным следует считать задание объемов производства по вариантам в определенном интервале, в котором величина производственных затрат на единицу продукции c_{ik}^r устойчива.

Перейдем теперь к рассмотрению следующей стадии расчетов. Необходимо отобрать наиболее экономичные варианты предприятий для включения в план. Чтобы отобрать нужные варианты, решим задачу целочисленного программирования, в которой отыщем значения неизвестных z_i^r, минимизирующих функцию

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{R_i} \sum_{k=1}^{l} a_{ik}^r \mu_{ik}^r z_i^r \tag{22}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{R_i} a_{ik}^r z_i^r \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_{jk}; \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{23}$$

$$\sum_{r=1}^{R_i} z_i^r \leqslant 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{24}$$

$$z_i^r = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots, R_i. \tag{25}$$

В задаче (22) — (25) в качестве коэффициентов целевой функции берутся исчисленные по вариантам развития и специализации предприятий суммы произведений объемов производства изделий на коэффициенты экономичности по совокупным затратам. Из многих допустимых планов, удовлетворяющих ограничениям задачи *, выбирается такой, для которого значение сформированной с помощью коэффициентов μ_{ik}^r целевой функции минимально. Мы исходим из того, что минимуму общей суммы произведений объемов производства на коэффициенты μ_{ik}^r по вариантам всех включенных в план предприятий в тенденции должна соответствовать минимальная сумма производственных и транспортных затрат.

Выбор метода решения задачи (22) — (25) во многом зависит от ее размерности и соотношения числа ограничений и переменных. В рамках данной работы не было цели сколько-нибудь подробно касаться методов решения целочисленных задач. В ней рассматривается лишь проблема учета влияния транспортного фактора при планировании развития, размещения и специализации предприятий отрасли с многономенклатурным производством. Проблема разработки методов решения производственных целочисленных задач специализации, к которым сведена на второй стадии решения и наша задача, имеет самостоятельное значение. В связи с вводом в Москве и Новосибирском научном центре БЭСМ-6 могут быть реализованы алгоритмы, предложенные Финкельштейном [2], Пятецким — Шапиро и Волконским [3, 4]. Накоплен значительный опыт решения целочисленных задач специализации большой размерности приближенным способом, суть которого состоит в том, что ограничение (25) вначале отбрасывается, вместо него вводится условие неотрицательности переменных z_i^r и задача решается как линейная. Если число групп переменных z_i^r (определяемое числом предприятий) намного больше числа ограничений типа (23), удается, решая задачу как линейную, получить план, весьма близкий к целочисленному. Решение доводится затем до целочисленных значений всех переменных z_i^r эвристическими методами [5]. Заметим, что

* Наряду с ограничениями (23) в задачу выбора вариантов могут быть введены также ограничения по капитальным вложениям и другим дефицитным ресурсам, если они имеются в производственно-транспортной задаче.

большинство реальных отраслевых задач, поставленных как статические, обладает отмеченной особенностью, что позволяет обходиться упомянутым приближенным способом их решения. При переходе к динамической постановке отраслевых задач (см. ниже) число ограничений типа (23) катастрофически возрастает, структура матрицы изменяется и использование линейных алгоритмов не приносит успеха. В этом случае, конечно, из-за отсутствия эффективных строгих методов задача с самого начала решается эвристическими методами. Таким образом, способ решения задачи (22) — (25), возникающей на второй стадии решения производственно-транспортной задачи (1) — (6), определяется спецификой конкретной задачи и зависит от общего состояния разработки методов для реализации целочисленных моделей.

Перейдем к следующей стадии расчетов. После решения связующей задачи (22) — (25) ставится l транспортных задач. В задачу по k-му продукту включаются предприятия-поставщики по отобранным в результате решения задачи (22) — (25) вариантам производства k-го продукта. Находятся значения неизвестных x_{ijk}, минимизирующих функцию

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ik}{}^{r_i}+s_{ijk})x_{ijk} \tag{26}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ijk}=b_{jk}; \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ijk}\leqslant a_{ik}{}^{r_i}; \quad i=1,2,\ldots,m, \tag{28}$$

$$x_{ijk}\geqslant 0; \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{29}$$

Здесь r_i — выбранный вариант предприятия в пункте i. Ограничение (28) задается в виде неравенства, если в плане производства (определенном на предыдущей стадии) объем выпуска данного продукта превышает суммарную потребность в нем районов потребления. Если же объем производства не превышает потребности, данное ограничение имеет вид равенства. В случае решения транспортной задачи при наличии избытка продукта неиспользованной остается часть продукции наихудшего из вошедших в план предприятий, наихудшего с учетом всей совокупности условий отрасли, включая производственные и транспортные факторы.

Решение производственно-транспортных задач при помощи коэффициентов экономичности — процесс итеративный. Используемый метод во многих случаях приводит к оптимуму или к решению, близкому к оптимуму в результате 1-й итерации. Но встречаются задачи, для решения которых требуется значительное количество итераций. Поскольку их число заранее определить нельзя, во всех случаях процесс вычислений продолжается до тех пор, пока происходит уменьшение суммы производственно-транспортных затрат.

Заключительная стадия расчетов по предыдущей итерации одновременно является началом вычислений для следующей итерации. По результатам решения транспортных задач прикрепления находятся новые системы коэффициентов μ_{ik}. Вначале они рассчитываются для предприятий, включенных в задачу (26) — (29), причем, как правило, по упрощенной схеме. В отдельных случаях, когда в плане задачи (26) — (29) число поставок меньше $m+n-1$, используется процедура, рекомендованная для общего случая. Определив v_{jk}, нетрудно найти μ_{ik} согласно (12′) для предприятий, не вошедших в план задачи (22) — (25). Если хотя бы в одном из блоков коэффициенты μ_{ik} отличаются от соответствующих коэффициентов, по которым рассчитывались $\mu_{ik}{}^r$ на 1-й итерации, расчеты должны быть продолжены. С учетом новых μ_{ik} находятся новые коэффициенты $\mu_{ik}{}^r$ (в соответствующих блоках, где μ_{ik} изменились). Затем вносятся поправки в коэффициенты целевой функции задачи (22) — (25) и повторяется ее решение. После чего вновь решаются транспортные задачи прикрепления и т. д.

Не во всех реальных многопродуктовых задачах удается в числе заданных величин иметь себестоимость единицы изделий и особенно удельные капитальные вложения. Располагая данными о себестоимости годового объема производства продукции по вариантам и капитальных вложениях в целом по вариантам, можно тем не менее решать многопродуктовую задачу описываемым методом, внеся некоторые коррективы в процедуру расчетов. В транспортных задачах, решаемых в начале каждой итерации, коэффициентами целевой функции будут теперь транспортные затраты s_{ijk}, а не производственно-транспортные $\bar{c}_{ik} + s_{ijk}$. Найденные коэффициенты, которые обозначим μ_{ik}', могут существенно отличаться от μ_{ik} (если бы μ_{ik} можно было исчислить), особенно в задачах, в которых варианты производства не обнаруживают тенденции падения удельных затрат с ростом объемов производства. Расчеты с коэффициентами μ_{ik}' требуют поэтому, как правило, значительно большего числа итераций. При работе с коэффициентами μ_{ik}' коэффициенты $\mu_{ik}{}^r$, естественно, не рассчитываются. В этом случае в связующей целочисленной задаче выбора вариантов коэффициентами целевой функции будут величины

$$C_i{}^r - \sum_{k=1}^{l} a_{ik}{}^r \mu_{ik}',$$

где $C_i{}^r = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{ik}{}^r c_{ik}{}^r.$

Задача (1) — (6) сформулирована как статическая. Метод решения при помощи коэффициентов экономичности применим и к задачам в динамической постановке, поскольку задачу для ряда сопряженных периодов математически можно свести к задаче типа (1) — (6), если выпуск одного и того же продукта в разные периоды рассматривать как производство разных продуктов в одном периоде. В этом случае вместо $n \times l$ ограничений типа (2) и $m \times l$ ограничений типа (3) будем иметь соответственно $n \times l \times T$ и $m \times l \times T$ ограничений, где T — количество периодов. Минимизируемая функция (1) примет вид

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{R_i} a^r_{ikt} c^r_{ikt} z_i{}^r + \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_{ijkt} x_{ijkt}.$$

Предполагается, что капитальные и текущие затраты приводятся к одному периоду времени [5].

Условие целочисленности в динамической задаче означает, что в оптимальный план могут включаться лишь сквозные варианты развития производственных объектов. В качестве отдельных вариантов могут рассматриваться различные объемы и структура производства на действующих предприятиях, реконструкция предприятий с вариацией сроков проведения и характера реконструкции. Наличие ряда вариантов для одного предприятия в динамической задаче означает, что на перспективу намечается несколько возможных направлений развития этого предприятия, из которых нужно выбрать одно, исходя из условий развития отрасли в целом. Выбранное направление покажет оптимальные темпы развития предприятия. Среди возможных направлений может рассматриваться и закрытие предприятия, если возникает сомнение в целесообразности сохранения его в перспективе; причем можно и правильнее включать в рассмотрение несколько вариантов с разными сроками закрытия. В динамической модели можно рассматривать и вопросы изменения специализации предприятий в перспективе, задавая различные варианты специализации и сроки ее проведения. В качестве отдельных вариантов выступают различные пункты размещения намечаемых к строительству новых заводов с различными сроками начала и окончания строительства.

В расчет коэффициентов экономичности динамическая постановка задачи ничего принципиально нового не вносит. Исходная матрица задачи разбивается теперь на однопродуктовые — однопериодные транспортные блоки, в которых находятся коэффициенты μ_{ikt} $(t = 1, 2, \ldots, T)$. Затем вычисляются коэффициенты по совокупным затратам μ^r_{ikt}, вводимые в связующую задачу выбора вариантов. На заключительной стадии решения производится прикрепление предприятий к потребителям по видам продукции в каждом из периодов.

Когда при планировании размещения, развития и специализации предприятий отрасли должны быть оптимизированы не только производство и распределение продукции, но одновременно и доставка сырья (полуфабрикатов), возникает необходимость в постановке трехэтапной производственно-транспортной задачи. Если такая задача ставится как динамическая, она может быть сведена к следующей модели.

Необходимо найти значения неизвестных z_i^r, x_{ijkt}, $y_{\varphi i\psi t}$, минимизирующих функцию

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{R_i} a^r_{ikt}c^r_{ikt}z_i^r + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} s_{ijkt}\,x_{ijkt} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{\psi=1}^{\Psi}\sum_{\varphi=1}^{\Phi}\sum_{i=1}^{m} s_{\varphi i\psi t}y_{\varphi i\psi t} \tag{30}$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijkt} = b_{jkt}; \quad j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T, \tag{31}$$

$$\sum_{r=1}^{R_i} a^r_{ikt}z_i^r \geqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ijkt}; \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T, \tag{32}$$

$$\sum_{\varphi=1}^{\Phi} y_{\varphi i\psi t} = \sum_{r=1}^{R_i}\sum_{k=1}^{l} a^r_{ikt}\lambda_{k\psi t}z_i^r; \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ \psi = 1, 2, \ldots, \Psi;\ t = 1, \ldots, T; \tag{33}$$

$$d_{\varphi\psi t} \geqslant \sum_{i=1}^{m} y_{\varphi i\psi t}; \quad \varphi = 1, 2, \ldots, \Phi;\ \psi = 1, 2, \ldots, \Psi;\ t = 1, 2, \ldots, T, \tag{34}$$

$x_{ijkt} \geqslant 0;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, \ldots, T,$

$$y_{\varphi i\psi t} \geqslant 0; \quad \varphi = 1, 2, \ldots, \Phi; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad \psi = 1, 2, \ldots, \Psi;$$
$$t = 1, \ldots, T, \tag{36}$$

$$\sum_{r=1}^{R_i} z_i^r \leqslant 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{37}$$

$$z_i^r = 0, 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots, R_i. \tag{38}$$

Здесь φ — индекс пункта размещения производства (добычи) сырья; ψ — индекс вида сырья; $d_{\varphi\psi t}$ — количество сырья ψ-го вида, получаемого в φ-м пункте в t-м периоде; $\lambda_{k\psi t}$ — норма расхода ψ-го вида сырья на единицу k-й продукции в t-м периоде; $s_{\varphi i\psi t}$ — транспортные затраты по доставке единицы сырья ψ-го вида из φ-го в i-й пункт в t-м периоде; $y_{\varphi i\psi t}$ — искомый объем поставки ψ-го сырья из φ-го пункта предприятию в i-м пункте в t-м периоде. Остальные обозначения прежние.

Трехэтапная производственно-транспортная задача математически может быть сведена к двухэтапной, если объемы переработки сырья по вариантам предприятий принять за производство дополнительных продуктов с нулевыми затратами, а пункты заготовок сырья приравнять к пунктам потребления готовой продукции. Тогда задача решается при помощи описанного метода для двухэтапных многопродуктовых задач.

Изложенный метод использовался для решения многих реальных задач отраслевого планирования, в том числе задач большой размерности. Например, в задаче определения оптимального плана развития, размещения и специализации кабельной промышленности СССР на перспективу [7] насчитывалось 60 действующих и новых предприятий, более 400 вариантов производства, 28 групп продукции, 17 крупных районов потребления. В задаче определения оптимального плана размещения угледобывающей промышленности [4] рассматривались 24 бассейна, около 100 вариантов добычи угля, 70 районов потребления, шесть видов и марок угля. В трехэтапной задаче определения оптимального плана производства стройматериалов [4] насчитывались восемь групп продукции, четыре вида сырья, 150 предприятий, 2150 вариантов производства, 30 пунктов потребления. В последнее время изложенный метод широко используется в Институте экономики СО АН СССР и НИИсистем для решения производственно-транспортных задач в динамической постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
2. Ю. Ю. Финкельштейн. Алгоритм для решения задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, № 5.
3. И. И. Пятецкий-Шапиро, В. А. Волконский, Л. В. Левина, А. Б. Поманский. Об одном итеративном методе решения задач целочисленного программирования. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 6.
4. Экономико-математические модели и методы отраслевого планирования. Новосибирск, «Наука», 1967.
5. Методические положения по оптимальному отраслевому планированию в промышленности. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. А. Л. Лурье. О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства. М., «Наука», 1964.
7. Оптимальное планирование размещения производства. Научн. тр. НГУ, сер. эконом., вып. 7. Новосибирск, 1965.

Поступила в редакцию
17 III 1967

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1967 том III, вып. 6

УДЕЛЬНЫЕ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЯ

З. Ф. ЧУХАНОВ

(*Москва*)

Если известен размер всех капиталовложений, израсходованных на строительство данного предприятия — $K_п{}^н$, и установлено количество ежегодно производимой на нем продукции B_2, то можно определить удельные номинальные капиталовложения $K_у{}^н$ из отношения: $K_у{}^н = K_п{}^н / B_2$.

Размерность удельных капиталовложений — рубли на единицу продукции в год. Иногда вместо годичного производства продукции при определении удельных капиталовложений используют максимальную мощность предприятия (например, для электростанций, вместо рублей на квт-час в год, рубли на квт установленной мощности). Как правило, это совершенно недопустимо, так как резко искажает этот важный экономический показатель, вводя в заблуждение при сопоставлении различных предприятий и особенно способов производства.

Для правильного определения $K_у{}^н$ очень важно, чтобы в $K_п{}^н$ были учтены все номинальные затраты капиталовложений, без которых объективно невозможно сооружение и нормальная эксплуатация рассматриваемого предприятия. Следовательно, в $K_п{}^н$ должны войти затраты на проектно-изыскательские работы, на разведку, на оборудование строительной площадки, на все вспомогательные сооружения, а также на перенос имевшихся зданий и сооружений на другое место. При определении $K_п{}^н$ должны быть учтены и все неизбежные косвенные расходы, связанные с данным строительством. К ним относятся, например, освоение равноценных уничтожаемым пахотных земель и других сельскохозяйственных угодий, сооружение рыбозаводов и т. д., вызванных строительством гидроэлектростанций и других рассматриваемых предприятий.

В реальных условиях определение $K_п{}^н$, однако, часто затрудняется наличием общих для всей отрасли затрат, которые трудно распределить между отдельными предприятиями. Примером являются расходы на геологоразведочные и исследовательские работы. Осложняет расчеты комплексный характер затрат, а также длительные сроки освоения проектной или реальной фактической ежегодной выработки продукции построенными предприятиями.

Между тем для рационального планирования и выбора наиболее экономичных путей развития отрасли очень важно уметь по отчетным данным правильно рассчитывать средние по отрасли и индивидуальные по предприятиям удельные номинальные и фактические прямые, т. е. реально расходуемые отраслью удельные капиталовложения $K_у{}^ф$. Разработка такой системы научно обоснованного расчета позволит создать однозначный способ определения $K_у{}^н$ и $K_у{}^ф$ для различных методов производства продукции (части отрасли), а также для любых конкретных отдельных предприятий, входящих в рассматриваемую отрасль.

Реальные капиталовложения, расходуемые практически в любой отрасли народного хозяйства и за любой период времени, распределяются по