

51. J. W a r g a. Minimizing certain convex functions. J. SIAM, 1963, v. 11, № 3.
52. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
53. P. C r o l a k, L. C o o p e r. An extension of Fibonacci search to several variables. Comm. ACM, 1963, v. 6, № 10.
54. N. S u g i e. An extension of Fibonacci searching to multidimensional cases. IEEE Trans. Autom. Contr., 1964, v. 9, № 1.
55. D. J. W i l d e. A multivariable dichotomous optimum-seeking methods. IEEE Trans. Autom. Contr., 1965, v. 10, № 1.
56. Н. Д. Уайлд, Методы поиска экстремума. М., «Наука», 1967.
57. А. И. Кузовкин, В. М. Тихомиров. О количестве вычислений для нахождения минимума выпуклой функции. Экон. и матем. методы, 1967, т. 3, вып. 1.
58. А. Ю. Левин. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 6.
59. D. J. N e w m a n n. Location of the maximum on unimodal surfaces. J. ACM, 1965, v. 12, № 3.
60. H. J. K e l l e y. The cutting plane method for solving convex programs. J. SIAM, 1960, v. 8, № 4.
61. P. W o l f e. Accelerating the cutting plane method for nonlinear programming. J. SIAM, 1961, v. 9, № 3.
62. Н. З. Шор. Применение метода градиентного спуска для решения сетевых транспортных задач. Материалы научн. семинаров по теории и прикл. вопросам кибернетики. Эконом. кибернетика и исследование операций, вып. I. Киев, 1962.
63. Ю. М. Ермольев. Методы решения нелинейных экстремальных задач. Кибернетика, 1966, № 4.
64. Б. Т. Поляк. Об одном общем методе решения экстремальных задач. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
65. С. Н. Соколов, И. Н. Сплин. Нахождение минимумов функционалов методом линеаризации. Препринт ОИЯИ Д 810, Дубна, 1961.
66. М. К. Гавурпп, Ю. Б. Фарфоровская. Об одном итеративном методе разыскания минимума суммы квадратов. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
67. M. J. D. P o w e l l. A method for minimizing a sum of squares of non-linear functions without calculating derivatives. Computer J., 1965, v. 7, № 4.
68. Д. Б. Юдин. Методы количественного анализа сложных систем. I. Техническая кибернетика, 1965, № 1.
69. И. Н. Бочаров, А. А. Фельдбаум. Автоматический оптимизатор для поиска минимального из нескольких минимумов (глобальный оптимизатор). Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 3.
70. И. Б. Моцкус. Многоэкстремальные задачи в проектировании. М., «Наука», 1967.
71. И. М. Гельфанд, Е. Б. Вул, С. А. Гипзбург, Ю. Г. Федоров. Метод оврагов в задачах рентгеноструктурного анализа. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
6 VI 1966

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ХОАНГ ТУЙ, НГУЕН КУАНГ ТХАЙ

(Вьетнам)

1. При распределении заданий между несколькими станками (или предприятиями) часто встречается следующая задача, которая была впервые рассмотрена Л. В. Канторовичем [1]:

$$z \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях:

$$(A) \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} + x_{i0} = a_i, & i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m b_{ij} x_{ij} = b_j z, & j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0; & i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4)$$

где $a_i > 0$ — время, которым располагает i -й станок; $b_{ij} \geq 0$ — количество изделий j -го вида, которое может изготовить станок в единицу времени (причем предполагается, что $\max_i b_{ij} > 0$ для каждого j); $b_j > 0$ — число

изделий j -го вида, входящих в каждый комплект готовой продукции; x_{ij} — время, использованное i -м станком для производства изделий j -го вида; z — число выпускаемых комплектов.

Как указал Данциг в [2], эта задача была позже изучена также Марковицем [3]. Цель настоящей заметки — изложить новый метод решения этой задачи, который является довольно простым и, в отличие от известных до сих пор методов, не требует специального рассмотрения случая вырожденности.

Докажем сначала некоторые предварительные теоремы.

2. Рассмотрим таблицу T с m строками $i = 1, 2, \dots, m$ и $n + 1$ столбцами $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Обозначим через (i, j) клетку, находящуюся в пересечении i -й строки и j -го столбца. Пусть G — набор клеток, такой, что $b_{ij} > 0$ для всех $(i, j) \in G$, $j \neq 0$. Предположим, что задача (A) при дополнительном ограничении $x_{ij} = 0$ для $(i, j) \notin G$ имеет хотя бы одно допустимое решение, и пусть $x = [x_{ij}]$ — ее оптимальное решение. Тогда матрицу $[x_{ij}]$ будем называть максимальным распределением по G , а соответствующее ей значение z — мощностью набора G .

Определим активные столбцы и строки по следующему индуктивному правилу: 1) столбец $j = 0$ активен; 2) если j -й столбец активен и $x_{ij} > 0$, то i -я строка активна; 3) если i -я строка активна и $(i, j) \in G$, то j -й столбец активен.

Теорема 1. Существует по крайней мере один неактивный столбец.

Доказательство. В силу известной теоремы двойственности найдутся числа λ_i, μ_j , такие, что

$$\lambda_i - b_{ij}\mu_j \geq 0, \quad (i, j) \in G, \quad j \neq 0, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}\mu_j \geq 1, \quad (6)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad (i, 0) \in G, \quad (7)$$

$$\lambda_i - b_{ij}\mu_j = 0, \quad \text{если } x_{ij} > 0, \quad (8)$$

$$\lambda_i = 0, \quad \text{если } x_{i0} > 0. \quad (9)$$

Возьмем какой-нибудь активный j -столбец. Тогда, как легко видеть, существует цепь Γ_j клеток из G : $(i_0, 0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j)$, таких, что $x_{i_0,0} > 0, x_{i_0,j_1} > 0, \dots, x_{i_k,j_k} > 0$. Согласно (9), имеем $\lambda_{i_0} = 0$ и потому, в силу (5), $-b_{i_0,j_1}\mu_{j_1} \geq 0$, т. е. $\mu_{j_1} \leq 0$. С другой стороны, так как $x_{i_0,j_1} > 0$, то согласно (8) и (7), $b_{i_0,j_1}\mu_{j_1} = \lambda_{i_0} \geq 0$, т. е. $\mu_{j_1} \geq 0$. Значит, $\mu_{j_1} = 0$. Аналогичным образом можно последовательно убедиться, что $\lambda_{i_1} = 0, \mu_{j_2} = 0$ и т. д. В конце концов $\mu_j = 0$. Поэтому, если все столбцы активны, то все μ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) равны нулю, что противоречит (6).

Обозначим через P множество всех активных столбцов и строк. Клетку (i, j) назовем переходной, если $i \in P, j \notin P$ — излишней, если $i \notin P, j \in P$. Очевидно, $(i, j) \in G$ для любой переходной клетки, а $x_{ij} = 0$ для любой излишней клетки.

Теорема 2. *Предположим, что исключаются из G все излишние клетки и прибавляется к G одна переходная клетка (r, s) . Тогда:*

- 1) либо мощность G , либо число активных столбцов увеличивается;
- 2) если G не имеет циклов, то новый набор G' также не имеет циклов*.

Доказательство. Так как $x_{ij} = 0$ для каждой излишней клетки (i, j) , то описанная в теореме операция не может уменьшить мощность. Предположим, что последняя не изменяется. Тогда $[x_{ij}]$ остается максимальным распределением по G' и, как легко видеть, каждый активный столбец остается активным. Но s -й столбец, который был неактивным, стал активным, потому что теперь $(r, s) \in G'$, а r -я строка активна. Следовательно, число активных столбцов увеличивается.

Если G не имеет циклов, то переходная клетка (r, s) не может образовать с G никакого цикла, ибо, в противном случае, существовала бы цепь от r -й строки до s -го столбца, не включающая в себя никакой излишней или переходной клетки, потому r -я строка и s -й столбец были бы оба активными или оба неактивными, что неверно.

Первая часть теоремы 2 показывает путь увеличения мощности набора G . Следующее предложение дает критерий оптимального решения.

Теорема 3. *Если $b_{ij} \leq 1$ для всех (i, j) и $b_{ij} = 1$ для всех $(i, j) \in G$ ($j \neq 0$), и если не существует ни одной переходной клетки (r, s) с $b_{rs} > 0$, то матрица $x = [x_{ij}]$ — оптимальное решение задачи (A).*

Доказательство. Положим

$$u_i = \begin{cases} 1, & i \in P, \\ \pi, & i \notin P, \end{cases} \quad v_j = \begin{cases} 1, & j \in P, \\ \pi, & j \notin P. \end{cases}$$

Так как по условию случай $i \in P, j \notin P, b_{ij} > 0$ невозможен и $0 \leq b_{ij} \leq 1$, то, каково бы ни было $\pi \geq 1$, имеем: $u_i - b_{ij}v_j \geq 0$ для всех $i =$

* Под циклом понимается, как обычно, цепь клеток вида $(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_0)$.

$= 1, 2, \dots, m$ и всех $j = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, для любого допустимого решения $x' = [x_{ij}']$ задачи (A) и соответствующего значения z' можно написать:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i u_i - z' \left(\sum_{j=1}^n b_j v_j \right) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i - b_{ij} v_j) x_{ij}' + \sum_{i=1}^m x_{i0}' u_i \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m x_{i0}' u_i \geq \sum_{i=1}^m x_{i0}'. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i - z' \left(\sum_{j=1}^n b_j v_j \right) = \sum_{i \in P} a_i - z' \left(\sum_{j \in P} b_j \right) + \pi \rho(z'), \quad (11)$$

$$\rho(z') = \sum_{i \notin P} a_i - z' \left(\sum_{j \in P} b_j \right). \quad (12)$$

Но, так как $x_{ij} = 0$ для $i \in P, j \notin P$ или $i \notin P, j \in P$, $x_{i0} = 0$ для $i \notin P$ и $b_{ij} = 1$ для $(i, j) \in G$, то

$$\rho(z) = \sum_{i \notin P} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) - \sum_{j \notin P} \left(\sum_{i=1}^m b_{ij} x_{ij} \right) = \sum_{i \in P} \sum_{j \notin P} x_{ij} - \sum_{j \in P} \sum_{i \notin P} x_{ij} = 0.$$

Следовательно, если $z' > z$, то $\rho(z') < 0$ (ибо по теореме 1 существует по крайней мере один $j \notin P$, и, значит, $\sum_{j \in P} b_j > 0$) и, согласно (11),

при достаточно большом π будем иметь

$$\sum_i a_i u_i - z' \sum_j b_j v_j < \sum_{i=1}^m x_{i0}',$$

что противоречит (10). Значит $z' \leq z$, а это означает, что x — оптимальное решение задачи (A).

Для применения теоремы 3 необходимо условие: $0 \leq b_{ij} \leq 1$ для всех (i, j) и $b_{ij} = 1$ для $(i, j) \in G$. Мы добьемся выполнения этого условия, опираясь на следующее замечание.

Пусть P — произвольное множество строк и столбцов, π — произвольная положительная постоянная. Задача (A) не изменяется*, когда мы заменяем a_i, b_j, b_{ij} соответственно на

$$\begin{aligned} a_i' &= \begin{cases} \pi a_i, & i \in P, \\ a_i, & i \notin P, \end{cases} & b_j' &= \begin{cases} \pi b_j, & j \in P, \\ b_j, & j \notin P, \end{cases} \\ b_{ij}' &= \begin{cases} \pi b_{ij}, & i \notin P, j \in P, \\ \frac{1}{\pi} b_{ij}, & i \in P, j \notin P, \\ b_{ij} & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

* Задача (A) не изменяется при описываемом ниже преобразовании коэффициентов a_i, b_j, b_{ij} в том смысле, что компоненты решения преобразованной задачи и задачи (A) связаны простой зависимостью (13), а максимальные значения переменной z равны.

В самом деле, условия (2) — (3) задачи (A) можно написать в виде

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}' + x_{i0}' = a_i', \quad \sum_{i=1}^m b_{ij}' x_{ij}' = b_j' z,$$

где для $j = 0, 1, 2, \dots, n$

$$x_{ij}' = \begin{cases} \pi x_{ij}, & i \in P, \\ x_{ij}, & i \notin P. \end{cases} \quad (13)$$

3. На основании предыдущих результатов, можно предложить следующий алгоритм решения задачи (A).

На первом шаге заменим a_i, b_j, b_{ij} соответственно на

$$a_i^1 = a_i, \quad b_j^1 = \frac{b_j}{\max_i b_{ij}}, \quad b_{ij}^1 = \frac{b_{ij}}{\max_i b_{ij}}.$$

(что не изменяет задачи (A)) и возьмем в качестве исходного набора G_1 множество, состоящее из всех клеток $(i, 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$ и клеток (i, j) , $j = 1, 2, \dots, n$, таких, что $b_{ij}^1 = 1$ (т. е. $b_{ij} = \max_i b_{ij}$). Очевидно,

что G_1 не имеет циклов, и $0 \leq b_{ij}^1 \leq 1$ для всех (i, j) .

На k -м шаге имеются набор G_k без циклов и числа a_i^k, b_j^k, b_{ij}^k (замещающие a_i, b_i, b_{ij}) с условием $0 \leq b_{ij}^k \leq 1$ для всех i, j и $b_{ij}^k = 1$ для $(i, j) \in G_k$ ($j \neq 0$). Определим максимальное распределение по G_k ; для этого решим треугольную систему

$$\sum_{\substack{j=0 \\ (i,j) \in G_k}}^n x_{ij} = a_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{\substack{i=1 \\ (i,j) \in G_k}}^m x_{ij} = b_j^k \theta, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

и, получив решение в виде $x_{ij} = a_{ij} - \beta_{ij}\theta$, определим θ из условия $\theta = \min \{a_{ij} / \beta_{ij} : \beta_{ij} > 0\}$. Затем определим множество P_k активных столбцов и строк.

а) Если нет клетки (i, j) с условием $i \in P_k, j \notin P_k, b_{ij}^k > 0$, то G_k — оптимальный набор. Тогда максимальное распределение по G_k при исходных данных a_i, b_i, b_{ij} задачи (A) дает искомое оптимальное решение.

б) В противном случае исключим из G_k все излишние клетки (i, j) ($i \notin P_k, j \in P_k$) и прибавим к G_k переходную клетку (r, s) , такую, что $b_{rs}^k = \max \{b_{ij}^k : i \in P_k, j \notin P_k\}$.

Умножим на b_{rs}^k все числа a_i ($i \in P_k$), b_j ($j \in P_k$), b_{ij}^k ($i \notin P_k, j \in P_k$), и делим на b_{rs}^k все числа b_{ij}^k ($i \in P_k, j \notin P_k$). Легко видеть, что новый набор G_{k+1} опять удовлетворяет условиям: $0 \leq b_{ij}^{k+1} \leq 1$ для всех (i, j) , $b_{ij}^{k+1} = 1$ для $(i, j) \in G_{k+1}$, $j \neq 0$. Перейдем тогда к следующему шагу.

Так как число различных наборов без циклов, конечно, а по теореме 2 набор, получаемый на каждом шаге, отличается от всех предыдущих либо мощностью, либо числом активных столбцов, то очевидна теорема 4.

Теорема 4. *Описанный алгоритм ведет к оптимальному решению через конечное число шагов.*

Пример. Решить задачу (A) при следующих данных:

2	4	1	b_j	a_i
4	3	3	4	4
3	0	2	8	8
2	2	1	6	6

$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\odot$ $4 - \frac{13}{6}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{1}{2}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{4}{3}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{1}{3}\theta$
$\cdot$ 8	$\frac{3}{4} \otimes$	$0 \times$	$\frac{2}{3} \times$
$\cdot$ 6	$\frac{1}{2} \times$	$\frac{2}{3} \times$	$\frac{1}{3} \times$
$+$	$+$	$+$	$+$
$\theta = \frac{24}{13}$			

$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\odot$ $4 - \frac{5}{3}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{4}{3}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{1}{3}\theta$	4
$\cdot$ $10 - \frac{13}{6}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{13}{6}\theta - 4$	$0 \times$	$\frac{8}{9} \times$
$\cdot$ $\frac{9}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9} \otimes$	$\frac{4}{9} \times$
$+$	$+$	$+$	$+$
$\theta = \frac{12}{5}$			

$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{8}{9}$	$1 \cdot$ $4 - \frac{\theta}{3}$	$1 \cdot$ $\frac{1}{3}\theta$	4
$\cdot$ $\frac{16}{3} - \frac{4}{9}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{4}{9}\theta$	$0 \times$	$1 \otimes$
$\odot$ $8 - \frac{5}{3}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{5}{3}\theta - 4$	$\frac{1}{2}$	4
$+$	$+$	$+$	$+$
$\theta = \frac{24}{5}$			

$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{8}{9}$	$1 \cdot$ $\frac{4}{3}\theta - 4$	$1 \odot$ $8 - \frac{4}{3}\theta$	4
$\cdot$ $\frac{40}{3} - \frac{19}{9}\theta$	$1 \cdot$ $\frac{4}{9}\theta$	$0 \times$	$1 \cdot$ $\frac{5}{3}\theta - 8$
$\frac{2}{3}$	$1 \cdot$ 4	$\frac{1}{2}$	4
$+$	$+$	$+$	$+$
$\theta = 6$			

Оптимальное
решение

0	0	4	0
1	4	0	3
0	0	6	0

Здесь приняты следующие обозначения: активные столбцы и строки $+$; клетка набора G , излишняя клетка $\odot$, переходная клетка $\times$, переходная клетка, которую следует ввести в G , $\otimes$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Математические методы в организации и планировании производства. Л., 1939.
2. G. Dantzig. Linear programming and extensions. Princeton University Press, 1963.
3. H. Markovitz. Concepts and computing procedures for certain Xij programming problems. Proc. of the 2nd Symposium in Linear programming, 1955, v. 2.

Поступила в редакцию
16 IX 1966

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Б. МАНДЕЛЬ

(Москва)

Линейное программирование — наиболее разработанный теоретически и опробованный практически метод нахождения оптимальных решений экономических задач. Библиография по линейному программированию обширна — она включает тысячи журнальных статей и сотни брошюр и монографий. Многие экономисты хорошо освоили принципы разработки экономико-математических моделей для решения задач распределения ограниченных ресурсов между альтернативными видами деятельности, научились успешно применять различные вычислительные методы линейного программирования в зависимости от специфики используемых моделей.

Однако в значительной части прикладных работ по линейному программированию математический аппарат применяется формально, без проникновения в экономическое существо процесса нахождения оптимума. В результате происходит потеря информации, зачастую не менее существенной для анализа решения задачи, чем сам оптимальный план.

Важнейшим средством экономико-математического анализа решения задач линейного программирования являются двойственные оценки оптимального плана или объективно обусловленные (о.о.) оценки по терминологии Л. В. Канторовича. О.о. оценка характеризует влияние того или иного ограничивающего фактора или ресурса на целевую функцию задачи.

Вычисление наряду с оптимальным планом системы связанных с ним о.о. оценок позволяет взвесить относительную важность отдельных производственных факторов для достижения поставленной в задаче цели, установить пропорции взаимозаменяемости ресурсов с точки зрения критерия оптимальности, выявить узкие места и вскрыть внутренние резервы плана*.

Оптимальный план и связанная с ним система о.о. оценок порождены всеми условиями, учтенными при постановке задачи — совокупностью заданных технологических способов, наличными ресурсами производственных факторов, соотношением весов технологических способов в целевой функции. Но изменение исходных параметров задачи оказывает различное влияние на результаты решения. К изменениям одних параметров оптимальное решение очень чувствительно, изменения других — даже в очень широких пределах — не сказываются заметно на результатах.

Исследование чувствительности решения задачи линейного программирования к изменениям в структуре и исходных параметрах модели имеет большое практическое значение. В силу неполной адекватности модели

* О проблемах разработки методологии использования о.о. оценок в экономико-математическом анализе результатов решения задач оптимального планирования см. работу [1].