Оптимальное решение

0	0	4	0
1	4	0	3
0	0	6	0

Здесь приняты следующие обозначения: активные столбцы и строки $+$; клетка набора $G\cdot$, излишняя клетка $\odot$, переходная клетка $\times$, переходная клетка, которую следует ввести в G, $\otimes$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович. Математические методы в организации и планировании производства. Л., 1939.
2. G. Dantzig. Linear programming and extensions. Princeton University Press., 1963.
3. H. Markovitz. Concepts and computing procedures for certain Xij programming problems. Proc. of the 2nd Symposium in Linear programming, 1955, v. 2.

Поступила в редакцию
16 IX 1966

 1967
том III, вып. 6

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАЦИИ

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Б. МАНДЕЛЬ

(Москва)

Линейное программирование — наиболее разработанный теоретически и опробованный практически метод нахождения оптимальных решений экономических задач. Библиография по линейному программированию обширна — она включает тысячи журнальных статей и сотни брошюр и монографий. Многие экономисты хорошо освоили принципы разработки экономико-математических моделей для решения задач распределения ограниченных ресурсов между альтернативными видами деятельности, научились успешно применять различные вычислительные методы линейного программирования в зависимости от специфики используемых моделей.

Однако в значительной части прикладных работ по линейному программированию математический аппарат применяется формально, без проникновения в экономическое существо процесса нахождения оптимума. В результате происходит потеря информации, зачастую не менее существенной для анализа решения задачи, чем сам оптимальный план.

Важнейшим средством экономико-математического анализа решения задач линейного программирования являются двойственные оценки оптимального плана или объективно обусловленные (о.о.) оценки по терминологии Л. В. Канторовича. О.о. оценка характеризует влияние того или иного ограничивающего фактора или ресурса на целевую функцию задачи.

Вычисление наряду с оптимальным планом системы связанных с ним о.о. оценок позволяет взвесить относительную важность отдельных производственных факторов для достижения поставленной в задаче цели, установить пропорции взаимозаменяемости ресурсов с точки зрения критерия оптимальности, выявить узкие места и вскрыть внутренние резервы плана *.

Оптимальный план и связанная с ним система о.о. оценок порождены всеми условиями, учтенными при постановке задачи — совокупностью заданных технологических способов, наличными ресурсами производственных факторов, соотношением весов технологических способов в целевой функции. Но изменение исходных параметров задачи оказывает различное влияние на результаты решения. К изменениям одних параметров оптимальное решение очень чувствительно, изменения других — даже в очень широких пределах — не сказываются заметно на результатах.

Исследование чувствительности решения задачи линейного программирования к изменениям в структуре и исходных параметрах модели имеет большое практическое значение. В силу неполной адекватности модели

* О проблемах разработки методологии использования о.о. оценок в экономико-математическом анализе результатов решения задач оптимального планирования см. работу [1].

реальным условиям и неточности исходных данных оптимальное решение экономической задачи носит зачастую приближенный характер. Поэтому важно наряду с оптимальным планом получить информацию о поведении модели в окрестности оптимума в диапазоне возможных изменений исходных параметров и структуры модели. Такая информация позволит: а) сформулировать требования к точности исходных данных, б) повлиять в нужном направлении на те внешние условия задачи, которые поддаются контролю и регулированию, в) видоизменить модель задачи, огрубив ее в отношении менее чувствительных параметров и ограничений и уточнив в области высокой чувствительности.

Анализ чувствительности модели линейного программирования можно толковать расширительно как изучение эффекта, оказываемого на оптимальное решение при изменениях в исходных параметрах модели — технологических коэффициентах, ценах или ресурсах. Обычно в литературе под анализом чувствительности (sensitivity analysis) подразумевают более узкую задачу, которая сводится к определению условий устойчивости оптимального базиса и соответствующей ему системы о.о. оценок (см., например, [1]). Для каждого исходного параметра модели (при условии, что остальные параметры зафиксированы) определяются верхний и нижний пределы, в рамках которых оптимальный базис и связанная с ним система о.о. оценок не меняются.

Далее можно исследовать устойчивость оптимального решения при одновременном изменении нескольких исходных параметров, отдельных строк или столбцов, а также при изменении структуры модели путем добавления новых строк (ограничений) или столбцов (технологических способов). Более глубокий анализ чувствительности модели в широком диапазоне изменений исходных параметров может быть осуществлен на основе параметрического программирования (см., например, [2, 3]).

Рассмотрим на условном примере построение модели линейного программирования, дадим экономическую интерпретацию всех элементов оптимального решения и исследуем устойчивость оптимального решения при варьировании исходных данных задачи *.

Автомобильный завод может выпускать три типа машин — грузовые марок А и Б и легковую марки В. Максимальная производительность цеха сборки грузовых автомобилей составляет 35 тыс., а цеха сборки легковых автомобилей — 25 тыс. машин в год. Выпуск машин лимитируется также мощностью оборудования комплектующих цехов — кузовного, моторного и колесного.

Таблица 1

Комплектующие цехи	Мощность оборудования	Марки автомобилей		
		А	Б	В
Кузовной	150	3	4	5
Моторный	200	5	6	4
Колесный	50	1,1	1,15	1,2

Мощность оборудования комплектующих цехов (в тыс. машино-час.) и затраты машинного времени на производство одного автомобиля (в машино-час.) приведены в табл. 1.

Реализация автомобилей обеспечивает заводу следующую прибыль: машина марки А — 2 тыс. руб., марки Б — 2,5 тыс. руб., марки В — 3 тыс. руб. Предполагается, что спрос на автомобили неограничен и ассортимент

* Предполагается, что читатель знаком с принципами построения моделей и методами решения задач линейного программирования (см. консультации Б. С. Верховского в нашем журнале за 1965 г., т. I, вып. 4 и 5 или брошюру А. Л. Лурье «Методы линейного программирования и их применение в экономике», М., «Статистика», 1964).

выпуска формируется исходя из критерия максимума прибыли. Задача заключается в том, чтобы загрузить производственные мощности завода, обеспечив максимальную прибыль от реализации продукции. Такую задачу легко представить в виде модели линейного программирования.

Обозначим через x_1 — выпуск грузовых автомобилей марки А, через x_2 — выпуск грузовых автомобилей марки Б, через x_3 — выпуск легковых автомобилей марки В. В качестве единицы измерения для всех переменных примем 1 тыс. машин. Тогда ограничения, характеризующие производственные возможности автомобильного завода, запишутся так:

$$x_1 + x_2 \leqslant 35, \quad (1)$$
$$x_3 \leqslant 25, \quad (2)$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 150, \quad (3)$$
$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqslant 200, \quad (4)$$
$$1{,}1x_1 + 1{,}15x_2 + 1{,}2x_3 \leqslant 50. \quad (5)$$

Введем дополнительные переменные: x_4 — неиспользованная производственная мощность цеха сборки грузовых автомашин; x_5 — то же для цеха сборки легковых автомашин; x_6 — то же для кузовного цеха; x_7 — то же для моторного цеха; x_8 — то же для колесного цеха.

Теперь ограничения задачи можно записать в канонической форме:

$$x_1 + x_2 + x_4 = 35, \quad (1)$$
$$x_3 + x_5 = 25, \quad (2)$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_6 = 150, \quad (3)$$
$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_7 = 200, \quad (4)$$
$$1{,}1x_1 + 1{,}15x_2 + 1{,}2x_3 + x_8 = 50. \quad (5)$$

Должны соблюдаться также естественные для любой экономической задачи условия неотрицательности переменных, т. е. $x_j \geqslant 0$, где $j = 1, \ldots, 8$.

Целевая функция задачи — максимум прибыли — имеет следующий вид:

$$2x_1 + 2{,}5x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x\ + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 = \max.$$

Представим условия задачи в виде таблицы, включающей матрицу коэффициентов при переменных в уравнениях-ограничениях, вектор-столбец свободных членов и вектор-строку коэффициентов целевой функции (табл. 2).

Таблица 2

№ пп	Ограничения	Основные переменные			Дополнительные переменные					Вектор свободных членов
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
1	Сборка грузовых машин	1	1		1					35
2	Сборка легковых машин			1		1				25
3	Кузовной цех	3	4	5			1			150
4	Моторный »	5	6	4				1		200
5	Колесный »	1,1	1,15	1,2					1	50
	Прибыль	2	2,5	3	0	0	0	0	0	

Таблица 3

		$\{j\}$	1	2	3	4	5	6	7	8
M^0	c_i	c_j / x_i^0	2	2,5	3	0	0	0	0	0
4	0	4,231		—0,077		1		0,308	—0,385	
3	3	11,538		0,154	1			0,385	—0,231	
1	2	30,769	1	1,077				—0,308	0,385	
5	0	13,462		—0,154			1	—0,385	0,231	
8	0	2,312		—0,22				—0,123	—0,146	1
	z_j^0	96,153	2	2,615	3	0	0	0,538	0,077	0
		$c_j - z_j^0$	0	—0,115	0	0	0	—0,538	—0,077	0

Решение задачи линейного программирования удобно анализировать, если представить его в виде стандартной симплексной таблицы. Ниже приведена симплексная таблица, соответствующая оптимальному плану рассматриваемой задачи (табл. 3).

Базис оптимального плана образуют переменные — основные ($j = 1, 3$) и дополнительные ($j = 4, 5, 8$). Их номера записаны в первом столбце табл. 3. Множество номеров переменных, образующих базис оптимального плана, обозначим через $M^0 = \{4, 3, 1, 5, 8\}$. Во втором столбце таблицы помещены коэффициенты целевой функции c_i, где i — индекс базисного вектора ($i \in M^0$, т. е. i является элементом множества M^0).

Третий столбец симплексной таблицы содержит значения базисных переменных в оптимальном плане x_i^0 и соответствующее им значение целевой функции — максимум прибыли Z^0.

Оптимальное решение задачи предусматривает выпуск грузовых автомобилей марки А ($x_1^0 = 30{,}769$ тыс. машин) и легковых машин марки В ($x_3^0 = 11{,}538$ тыс. машин). Выпуск грузовых автомобилей марки Б планом не предусмотрен ($x_2^0 = 0$). Производственные мощности кузовного и моторного цехов загружены полностью ($x_6^0 = 0$, $x_7^0 = 0$), а сборочные и колесный цехи имеют резервную мощность ($x_4^0 = 4{,}231$ тыс. грузовых машин, $x_5^0 = 13{,}462$ тыс. легковых машин, $x_8^0 = 2{,}312$ тыс. машино-час.). Максимальное значение прибыли $Z^0 = 96{,}153$ тыс. рублей.

В первой строке симплексной таблицы помещен перечень всех переменных задачи — основных и дополнительных ($j = 1, \ldots, 8$), а во второй строке — соответствующие коэффициенты целевой функции c_j. Последующие пять строк содержат коэффициенты a_{ij}^0, которые для небазисных переменных ($j = 2, 6, 7$) суть коэффициенты разложения векторов, не вошедших в базис, по векторам базиса оптимального опорного плана. Две последние строки содержат расчетные показатели z_j^0 и $c_j - z_j^0$.

Рассмотрим экономический смысл показателей симплексной таблицы.

a_{ij}^0 — *коэффициент замещения*, характеризующий величину уменьшения ($a_{ij}^0 > 0$) или увеличения ($a_{ij}^0 < 0$) i-й базисной переменной при введении в базис j-й небазисной переменной с единичной интенсивностью.

Возьмем, к примеру, коэффициенты a_{ij}^0 при переменной x_2 (столбец $j = 2$ в табл. 3). При введении в базис единицы x_2 (выпуск 1 тыс. грузовых машин марки Б) потребуется, чтобы не нарушить ограничения задачи, уменьшить выпуск грузовых машин марки А ($a_{12}^0 = 1{,}077$) и легковых машин марки Б ($a_{32}^0 = 0{,}154$); при этом увеличится резервная мощность цехов сборки грузовых ($a_{42}^0 = -0{,}077$) и легковых ($a_{52}^0 = -0{,}154$) машин и колесного цеха ($a_{82}^0 = -0{,}22$).

c_j — *прямой эффект* введения в базис j-й переменной с единичной интенсивностью. Так как в рассматриваемой задаче в качестве критерия оптимального решения принята прибыль, то c_j можно определить как прямую прибыль. В зависимости от смысла той или иной переменной задачи величина c_j в целевой функции может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

z_j^0 — *косвенный эффект* * введения в базис j-й переменной, т. е. величина, на которую уменьшится целевая функция за счет сдвигов в значениях базисных переменных при введении в базис j-й небазисной переменной с единичной интенсивностью.

Косвенный эффект введения в базис j-й переменной определяется как сумма произведений коэффициентов замещения a_{ij}^0 на прямой эффект замены базисных переменных c_i: $z_j^0 = \sum\limits_{i \in M^0} a_{ij}^0 c_i$ для всех j, не входящих в базис ($j \notin M^0$). Для базисных переменных ($j \in M^0$) косвенный эффект равен прямому, т. е. $z_j^0 = c_j$.

В рассматриваемой задаче по смыслу целевой функции косвенный эффект — это косвенная прибыль. Например, при введении в базис переменной x_2 с единичной интенсивностью потребуется, исходя из коэффициентов замещения, пересчитать значения базисных переменных, что в свою очередь приведет к уменьшению прибыли на величину z_2^0:

$$z_2^0 = \sum_{i \in M^0} a_{i2}^0 c_i = 0 \cdot (-0{,}077) + 3 \cdot 0{,}154 + 2 \cdot 1{,}077 + 0 \cdot (-0{,}154) + 0 \cdot (-0{,}22) = 2{,}615 \text{ тыс. руб./машина.}$$

Косвенная прибыль z_j^0 для дополнительных переменных, образующих базис исходного опорного плана, не что иное как о.о. оценки ограниченных ресурсов (если оптимальное решение невырождено). Действительно, уменьшение (увеличение) на единицу величины какого-либо ресурса (свободный член в уравнении-ограничении) эквивалентно увеличению (уменьшению) на единицу значения соответствующей этому ресурсу дополнительной переменной, что приводит к уменьшению (увеличению) значения целевой функции на величину косвенного эффекта.

В рассматриваемом примере о.о. оценки дополнительных переменных, соответствующих ресурсам производственной мощности сборочных цехов грузовых (z_4^0) и легковых (z_5^0) автомашин и колесного цеха (z_8^0) равны нулю, так как производственная мощность этих цехов не загружена полностью. О.о. оценка (в данном случае прокатная оценка) использования одного машино-часа оборудования кузовного цеха $z_6^0 = 0{,}538$ руб., а моторного цеха $z_7^0 = 0{,}077$ руб.

$c_j - z_j^0$ — *чистый эффект* ** введения в базис j-й переменной с единичной интенсивностью; так как при этом целевая функция увеличивается на величину прямого и уменьшается на величину косвенного эффекта, то чистый эффект равен разности между прямым и косвенным эффектами. К примеру, в рассматриваемой задаче при введении в базис переменной x_2 чистый эффект на единицу равен $c_2 - z_2^0 = 2{,}5 - 2{,}615 = -0{,}115$ тыс. руб./машина.

---

* Эффект обратной связи по В. В. Новожилову.

** Величина $c_j - z_j^0$ в математической литературе по линейному программированию обычно именуется оценкой столбца j.

Для базисных переменных, где косвенный эффект равен прямому, чистая прибыль равна нулю.

Анализ решения задачи линейного программирования естественно начать с выяснения вопроса, является ли оптимальный план единственным решением задачи. Если величина чистого эффекта для всех небазисных переменных отрицательна ($c_j - z_j^0 < 0$), то задача имеет единственное решение, если же для одной или нескольких небазисных переменных $c_j - z_j^0 = 0$, то, вообще говоря, существует множество планов, соответствующих максимальному значению целевой функции.

В рассматриваемом нами примере все переменные, не вошедшие в базис оптимального плана ($j \notin M^0$, т. е. $j = 2, 6, 7$), характеризуются отрицательной величиной чистой прибыли ($c_j - z_j^0 < 0$), как это видно из нижней строки табл. 3. Следовательно, оптимальный план — единственный.

Предположим, что прибыль от реализации грузового автомобиля марки Б составит не 2 тыс. руб., а 2,615 тыс. руб. за машину. В этом случае величина чистой прибыли $c_2 - z_2^0 = 0$ и переменная $j = 2$ может быть введена в базис на место переменной $j = 1$ без уменьшения значения функционала. Пересчитанная симплексная таблица приводится ниже (табл. 4).

Таблица 4

		$\{j\}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{M}^0$ $\{i\}$	c_i	c_j / $\overline{x}_i^0$	2	2,615	3	0	0	0	0	0
4	0	6,431	0,071			1		0,286	0,358	
3	3	7,138	−0,143		1			0,429	−0,286	
2	2,615	28,569	0,928	1				−0,286	0,357	
5	0	17,852	0,143				1	−0,429	0,286	
8	0	8,597	0,204					−0,186	−0,067	1
z_j^0		96,153	2	2,615	3	0	0	0,538	0,077	0
		$c_j - z_j^0$	0	0	0	0	0	−0,538	−0,077	0

Сравнение симплексных таблиц (табл. 3 и 4) показывает, что максимальному значению целевой функции $Z^0 = 96{,}153$ тыс. руб. соответствуют два различных базиса (M^0 и $\overline{M}^0$) и два различных плана (столбцы x_i^0 и $\overline{x}_i^0$) или их выпуклая комбинация. Косвенная прибыль z_j^0 для дополнительных переменных (о.о. оценки ресурсов) при этом не изменяется.

В некоторых задачах может представить интерес набор планов — опорных (крайних) точек многогранника условий, лежащих вблизи оптимума. Соответствующим образом организованная симплексная процедура позволяет в принципе получить весь набор опорных планов, лежащих в области заданного отклонения от экстремального значения функционала. Однако таких опорных планов может быть очень много, поэтому целесообразно ввести дополнительный критерий, по которому отбиралось бы обозримое множество опорных планов — оптимальных и близких к оптимуму.

В том случае, когда задача линейного программирования имеет вырожденное решение (некоторые базисные переменные в оптимальном плане равны нулю), экстремуму целевой функции может соответствовать несколько базисов с одинаковыми планами, но разными значениями косвенного эффекта z_j^0 для дополнительных переменных, т. е. разными оценками ресурсов *.

О.о. оценка ресурса — это частная производная целевой функции по соответствующему ресурсу в экстремальной точке при условии невырожденности оптимального плана. Если оптимальное решение вырождено, то каждому ресурсу, вообще говоря, соответствуют две оценки — производная слева (при уменьшении величины ресурса) и производная справа (при увеличении величины ресурса). Такие оценки называются маргинальными. Они могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\frac{\partial Z^0}{\partial b_i^-} = \max_{k \in K} z_{jk}^0 = \underline{z}_j^0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Z^0}{\partial b_i^+} = \min_{k \in K} z_{jk}^0 = \bar{z}_j^0, \qquad (2)$$

где $\partial Z^0 / \partial b_i^-$ и $\partial Z^0 / \partial b_i^+$ — частные производные оптимального значения функционала по i-му ограниченному ресурсу слева и справа; z_{jk}^0 — кос-

Таблица 5

		$\{j\}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{M}^0\ \{j\}$	c_i	c_j / $\hat{z}_i^0$	2,0	2,5	3,0	0	0	0	0	0
4	0	4,231		−0,500		1		0,634		−2,634
3	3	11,538		0,500	1			0,580		−1,580
1	2	30,769	1	0,500				−0,634		2,634
5	0	13,462		−0,500			1	−0,580		1,580
7	0	0		1,500				0,846	1	−6,846
$\hat{z}_j^0$		96,153	2,0	2,5	3,0	0	0	0,474	0	0,526
		$c_j - \hat{z}_j^0$	0	0	0	0	0	−0,474	0	−0,526

венный эффект дополнительной переменной j (о.о. оценка соответствующего ресурса i) в k-м базисе вырожденного оптимального решения; $K (k \in K)$ — множество номеров базисов вырожденного оптимального плана, соответствующих экстремальному значению функционала; $\underline{z}_j^0$ и $\bar{z}_j^0$ — маргинальные оценки слева (при уменьшении величины ресурса) и справа (при увеличении величины ресурса).

Рассмотрим расчет маргинальных оценок на примере. Пусть ресурсы производственной мощности колесного цеха составляют не 50 тыс. машино-час., как в первоначальной задаче, а 47,688, т. е. меньше на величину резервной мощности колесного цеха $x_8^0 = 2{,}312$. Тогда оптимальному решению будет соответствовать симплексная таблица, аналогичная табл. 3, с той лишь разницей, что $x_8^0 = 0$, т. е. решение вырожденное.

От этого оптимального базиса путем замены $i = 8$ на $j = 7$ можно перейти к новому базису с сохранением значения целевой функции и оптимального плана, но с иной системой оценок на ресурсы (табл. 5).

Таким образом, вырожденное оптимальное решение видоизмененной задачи характеризуется двумя системами оценок на ограниченные ресурсы.

* Так как оптимальные оценки дополнительных переменных прямой задачи суть основные переменные двойственной задачи, вырожденному решению прямой задачи может соответствовать неединственное решение двойственной задачи.

Используя соотношения (1) и (2), можно легко рассчитать маргинальные оценки (табл. 6).

Как видно из таблицы, производственные мощности сборочных цехов не лимитируют выпуск автомобилей и соответствующие о.о. оценки равны нулю. Уменьшение производственной мощности кузовного цеха на 1 тыс. машино-час. сокращает прибыль на 538 руб., а расширение мощности на ту же величину обеспечивает дополнительную прибыль в размере 474 руб. Расширение производственной мощности моторного и колесного цехов не дает никакого эффекта, в то время как уменьшение мощности

Таблица 6

№ п.п.	Ограниченные ресурсы производственной мощности	Номер дополнительной переменной	Косвенный эффект дополнительных переменных		Маргинальные оценки	
		$\{j\}$	z_j^0 (табл. 3)	$\hat{z}_j^0$ (табл. 5)	$\underline{z}_j^0$	$\bar{z}_j^0$
1	Сборка грузовых машин	4	0	0	0	0
2	Сборка легковых машин	5	0	0	0	0
3	Кузовной цех	6	0,538	0,474	0,538	0,474
4	Моторный цех	7	0,077	0	0,077	0
5	Колесный цех	8	0	0,526	0,526	0

этих цехов на 1 тыс. машино-час. приносит убыток в размере 77 и 526 руб. соответственно.

Следующая стадия экономико-математического анализа оптимального решения — установление пределов устойчивости о.о. оценок ограниченных ресурсов. Мы рассмотрим лишь некоторые наиболее простые соотношения анализа устойчивости, которые не требуют громоздких вычислений и потому могут найти широкое применение на практике при анализе решения задач линейного программирования.

Ниже приводятся формулы, определяющие интервалы изменения исходных параметров модели при сохранении оптимального базиса и соответствующей ему системы о.о. оценок*. Следует иметь в виду, что в каждом случае изменяется только один параметр, а остальные зафиксированы на первоначальном уровне. Формулы выводятся на основе свойств симплексной процедуры и исходя из условий устойчивости оптимального базиса задачи $(c_j - z_j^0 \leqslant 0)$ и неотрицательности переменных $(x_j \geqslant 0)$.

Параметры, характеризующие модель линейного программирования, естественно разбить на группы: коэффициенты целевой функции c_j, коэффициенты a_{ij} при переменных в уравнениях-ограничениях, компоненты вектора свободных членов b. При анализе чувствительности существенно также различать коэффициенты при переменных, входящих в базис оптимального плана $(i \in M^0)$, и коэффициенты при переменных, не входящих в базис оптимального плана $(j \notin M^0)$.

Коэффициенты целевой функции c_j при небазисных переменных $(j \notin M^0)$

$$\infty \leqslant \Delta c_j \leqslant -(c_j - z_j^0). \tag{3}$$

Это соотношение легко интерпретируется. Величина прямого эффекта c_j для небазисной переменной может быть уменьшена вплоть до «минус бесконечности» — это не приведет к изменению базиса оптимального пла-

* Рассматривается случай, когда решение прямой задачи невырождено, следовательно, двойственная задача имеет единственное решение.

на. Пределом увеличения c_j является величина чистого эффекта $c_j - z_j^0$, взятая с обратным знаком, так как при этом чистый эффект введения в базис j-й небазисной переменной станет равным нулю и эта переменная превратится в «кандидата» для включения в базис.

Коэффициенты целевой функции c_i при базисных переменных ($i \in M^0$). При изменении величины коэффициента целевой функции (прямого эффекта) i-й базисной переменной на Δc_i изменятся значения косвенных эффектов всех небазисных переменных на величину $\Delta z_j^0 = a_{ij}^0 \Delta c_i$, что в свою очередь приведет к новым значениям чистых эффектов небазисных переменных $c_j - (z_j^0 + \Delta z_j^0)$.

Так как условием устойчивости оптимального базиса является неположительность чистых эффектов переменных, то необходимо обеспечить соблюдение неравенства $c_j - (z_j^0 + \Delta z_j^0) \leqslant 0$ для всех j.

Проведем некоторые преобразования:

$$c_j - (z_j^0 + \Delta z_j^0) \leqslant 0 \Rightarrow c_j - z_j^0 \leqslant \Delta z_j^0 \Rightarrow c_j - z_j^0 \leqslant a_{ij}^0 \Delta c_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{a_{ij}^0 > 0}{\frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0}} \leqslant \Delta c_i \quad \text{и} \quad \underset{a_{ij}^0 < 0}{\frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0}} \geqslant \Delta c_i$$

Тем самым мы пришли к соотношению (4), где в качестве нижней границы интервала варьирования c_i выбирается максимальное отношение чистого эффекта $c_j - z_j^0$ к коэффициенту замещения a_{ij}^0 по тем небазисным переменным, которые при введении в базис уменьшают значение i-й базисной переменной ($a_{ij}^0 > 0$), а в качестве верхней границы — минимальное отношение тех же показателей по всем небазисным переменным, которые при введении в базис увеличивают значение i-й базисной переменной ($a_{ij}^0 < 0$):

$$\max_{\substack{j \in M^0 \\ a_{ij}^0 > 0}} \frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} \leqslant \Delta c_i \leqslant \min_{\substack{j \notin M^0 \\ a_{ij}^0 < 0}} \frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0}. \tag{4}$$

Компоненты вектора свободных членов b_j ($j \in M$, где M — множество номеров дополнительных переменных, образующих базис исходного опорного плана). Изменение величины какой-либо компоненты вектора ограниченных ресурсов на Δb_j можно рассматривать как эквивалентное изменение значения соответствующей этому ресурсу единичной дополнительной переменной, входящей в базис исходного опорного плана ($j \in M$). Содержащиеся в последней симплексной таблице коэффициенты замещения a_{ij}^0 позволяют определять сдвиги в значениях базисных переменных оптимального плана при варьировании значений дополнительных переменных. Таким образом, можно проследить чувствительность оптимального решения к колебаниям величины заданных в модели ресурсов.

Пределы варьирования компонент вектора ресурсов определяются исходя из условия неотрицательности переменных в оптимальном плане $x_i^0 + \Delta x_i^0 \geqslant 0$. Отсюда $\Delta x_i^0 \geqslant -x_i^0$. При изменении величины ресурса, соответствующего j-й дополнительной переменной, на Δb_j значение i-й базисной переменной изменится на $\Delta x_i^0 = \Delta b_j a_{ij}^0$. Тогда условие устойчивости оптимального базиса при варьировании компонент вектора ресурсов запишется так:

$$\Delta b_j a_{ij}^0 \geqslant -x_i^0.$$

Или более развернуто

$$\max_{\substack{i \in M^0 \\ a_{ij}^0 > 0}} \frac{-x_i^0}{a_{ij}^0} \leqslant \Delta b_j \leqslant \min_{\substack{i \in M^0 \\ a_{ij}^0 < 0}} \frac{-x_i^0}{a_{ij}^0}. \tag{5}$$

Коэффициенты a_{ij} при переменных, не вошедших в базис оптимального плана ($j \notin M^0$).

Коэффициенты a_{ij} можно без ограничений уменьшать ($a_{ij} < 0$) или увеличивать ($a_{ij} > 0$) — это не приведет к изменению оптимального базиса задачи. Если мы будем увеличивать коэффициент выпуска ресурса i в j-м способе, не вошедшем в базис оптимального плана (или уменьшать затраты), то это может превратить j-ю переменную в «кандидата» для вступления в базис.

При увеличении коэффициента выпуска i-го ресурса на величину Δa_{ij} косвенный эффект введения в базис оптимального плана j-й небазисной переменной изменится на величину $\Delta z_j^0 = \Delta a_{ij} z_i^0$, где z_i^0 — это о.о оценка i-го ресурса в оптимальном плане. Тогда условие устойчивости оптимального базиса запишется так:

$$c_j - (z_j^0 + \Delta z_j^0) \leqslant 0 \Rightarrow c_j - z_j^0 \leqslant \Delta z_j^0 \Rightarrow c_j - z_j^0 \leqslant \Delta a_{ij} z_i^0.$$

Или

$$-\infty \leqslant \Delta a_{ij} \leqslant \frac{-(c_j - z_j^0)}{z_i^0}. \qquad (6)$$

При одновременном изменении значений нескольких или всех коэффициентов a_{ij} какого-либо вектора j, не входящего в базис оптимального плана ($j \notin M^0$), условие устойчивости оптимального базиса выражается следующим образом:

$$c_j - (z_j^0 + \Delta z_j^0) \leqslant 0 \Rightarrow c_j - z_j^0 \leqslant \Delta z_j^0 \Rightarrow c_j - z_j^0 \leqslant \sum_{i \in M^0} \Delta a_{ij} z_i^0. \qquad (7)$$

Аналогично проверяется устойчивость оптимального базиса при введении в модель нового технологического способа (дополнительного вектора-столбца r)

$$c_r - z_r \leqslant 0 \Rightarrow c_r - \sum_{i \in M^0} a_{ir} z_i^0 \leqslant 0 \Rightarrow c_r \leqslant \sum_{i \in M^0} a_{ir} z_i^0. \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) по существу выражают оценку целесообразности введения в базис нового столбца, т. е. связаны с обычной симплексной процедурой.

Используя соотношения (3) — (8), исследуем чувствительность оптимального решения к изменениям некоторых исходных параметров модели линейного программирования на рассмотренном ранее условном примере планирования деятельности автомобильного завода.

1°. Предположим, что техническое усовершенствование позволяет снизить затраты на производство одного грузового автомобиля марки Б и соответственно повысить прибыль от реализации на 100 руб., т. е. с 2,5 до 2,6 тыс. руб./машина. Согласно оптимальному плану предусматривается выпуск только грузовых машин марки А. Возникает вопрос, выгодно ли с учетом предполагаемого повышения прибыльности производства грузовых машин марки Б перейти на их выпуск, а если не выгодно, то каков должен быть эффект от рационализации, чтобы это стало выгодно?

Так как производство грузовых машин марки Б не вошло в оптимальный план (вектор-столбец $j = 2$ в табл. 3 не входит в базис, т. е. $j \notin M^0$), воспользуемся формулой (3) для определения границы изменения коэффициента целевой функции c_2, обеспечивающей устойчивость оптимального базиса. Очевидно, $\Delta c_2 \leqslant 0{,}115$ тыс. руб./машина. Поэтому повышение прибыли на 100 руб./машина недостаточно, чтобы оправдать выпуск грузовых машин марки Б. Это будет выгодно лишь при повышении прибыли от реализации не менее чем на 115 руб./машина.

2°. Какова чувствительность оптимального решения к колебаниям прибыли от реализации грузового автомобиля марки А? Выпуск грузового автомобиля марки А представлен в модели переменной x_1, прибыль от реализации $c_1 = 2$ тыс. руб./машина. В симплексной таблице, отвечающей оптимальному плану рассматриваемой задачи (табл. 3), выпуску грузового автомобиля марки А соответствует строка $i = 1$, т. е. переменная x_1 всшла в базис оптимального плана ($i \in M^0$).

В табл. 3 содержится вся необходимая информация для вычисления по формуле (4) интервала колебания прибыли от реализации грузового автомобиля марки А. В рамках этого интервала оптимальный базис и соответствующая ему система о.о. оценок не изменяются:

$$\min_{a^0_{ij}<0} \frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} = \min\left\{\frac{-0{,}538}{0{,}308}\right\} = 1{,}746,$$

$$\max_{a^0_{ij}<0} \frac{c_j - z_j^0}{a_{ij}^0} = \max\left\{\frac{-0{,}115}{1{,}077};\ \frac{-0{,}077}{0{,}385}\right\} =$$

$$= \max\{-0{,}107;\ -0{,}2\} = -0{,}107,$$

$$-0{,}107 \leqslant \Delta c_1 \leqslant 1{,}746 \text{ тыс.руб./машина},$$

$$1{,}893 \leqslant c_1 \leqslant 3{,}746 \text{ тыс.руб./машина}.$$

Уменьшение прибыли от реализации грузового автомобиля марки А ниже 1893 руб./машина вызовет изменение базиса оптимального плана: из базиса будет выведен вектор $i = 1$ и вместо него введен вектор $j = 2$, т. е. взамен грузовых автомобилей марки А будет выгодно производить грузовые автомобили марки Б. Повышение прибыли сверх 3746 руб./машина также приводит к новому базису: выводится вектор $i = 4$ и вводится вектор $j = 6$, т. е. целиком будет загружена производственная мощность цеха сборки грузовых автомашин и создается резервная производственная мощность в кузовном цехе.

3°. В каком интервале изменения производственной мощности кузовного цеха действует соответствующая оптимальному плану система о.о. оценок? Ответ на этот вопрос можно получить, применив формулу (5). Необходимая для расчетов информация содержится в табл. 3 ($j = 6$, $i \in M^0$):

$$\min_{a_{ij}^0<0} \frac{-x_i^0}{a_{ij}^0} = \min\left\{\frac{-30{,}769}{-0{,}308};\ \frac{-13{,}462}{-0{,}385};\ \frac{-2{,}312}{-0{,}123}\right\} =$$

$$= \min\{99{,}9;\ 34{,}96;\ 18{,}769\} = 18{,}769,$$

$$\max_{a_{ij}^0>0} \frac{-x_i^0}{a_{ij}^0} = \max\left\{\frac{-4{,}231}{0{,}308};\ \frac{-11{,}538}{0{,}385}\right\} =$$

$$= \max\{-13{,}737;\ -29{,}96\} = -13{,}737,$$

$$-13{,}737 \leqslant \Delta b_6 \leqslant 18{,}796 \text{ тыс.машино-час.},$$

$$136{,}263 \leqslant b_6 \leqslant 168{,}796 \text{ тыс. машино-час.}$$

Аналогично для всех остальных ограниченных ресурсов задачи вычисляются нижний и верхний пределы колебаний, в рамках которых сохра-

Таблица 7

№ пп	Ресурсы производственной мощности	Номер дополнительной переменной	Интервалы изменения ресурсов	О.о. оценки
1	Сборка грузовых машин	4	30,769—∞ тыс. машин	0
2	Сборка легковых машин	5	11,538—∞ »	0
3	Кузовной цех	6	136,3—168,8 тыс. машино-час.	538 руб./машино-час.
4	Моторный »	7	141,7—211 »	77 »
5	Колесный »	8	47,688—∞ »	0

няется устойчивость оптимального базиса и связанной с ним системы оценок. В табл. 7 приводятся допустимые интервалы изменения ресурсов (свободных членов в уравнениях-ограничениях модели) и соответствующая им система о.о. оценок.

Следует иметь в виду, что предполагается не одновременное изменение значений нескольких или всех ресурсов, а лишь величины одного какого-либо ограничивающего ресурса, при этом остальные параметры задачи зафиксированы на исходном уровне.

4°. Допустим, что рационализаторское предложение позволяет снизить затраты машинного времени на изготовление мотора грузового автомобиля марки Б с 6 до 5 машино-час. Есть ли необходимость пересматривать план производства автомобилей и вместо грузовиков марки А выпускать машины марки Б?

Так как речь идет о коэффициенте a_{ij} в векторе $j = 2$, не вошедшем в базис оптимального плана, применим формулу (6). Данные для расчета берем в табл. 3: чистый эффект введения в базис производства грузовых машин марки Б $c_2 - z_2^0 = -0,115$ тыс. руб./машина; о.о. оценка производственной мощности моторного цеха $z_7^0 = 0,077$ тыс. руб./машино-час.:

$$\Delta a_{ij} = \frac{-(c_j - z_j^0)}{z_i^0} = \frac{0,115}{0,077} = 1,497 \text{ машино-час./машина.}$$

Следовательно, сокращение на 1 машино-час затрат на изготовление мотора грузового автомобиля марки Б не делает эту машину рентабельной. Выпуск грузового автомобиля марки Б становится выгодным лишь при сокращении затрат машинного времени на изготовление мотора более чем на 1,497 машино-час.

5°. Как отразится на оптимальном решении возможность выпуска нового легкового автомобиля марки В, характеризующегося следующими показателями затрат на производство одной машины: кузовной цех — 6 машино-час., моторный цех — 5 машино-час., колесный цех — 1,5 машино-час. Предполагаемая прибыль от реализации 3,5 тыс.руб./машина.

Для оценки целесообразности введения в оптимальный базис нового столбца воспользуемся формулой (8):

$$z_r = \sum_{i \in M} a_{ir} z_i^0 = 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0,538 + 5 \cdot 0,077 + 1,5 \cdot 0 = 3,613 \text{ тыс. руб./машина,}$$

$$c_r = 3,5 \text{ тыс.руб./машина,}$$

$$c_r - z_r = 3,613 - 3,5 = -0,113 \text{ тыс.руб./машина.}$$

Так как соблюдается условие $c_r - z_r \leqslant 0$, т. е. величина чистой прибыли отрицательна и составляет 0,113 тыс. руб./машина, то производство легкового автомобиля марки В невыгодно и нет необходимости корректировать оптимальный план.

В заключение следует отметить, что анализ устойчивости оптимального решения реальных экономических задач ввиду большой размерности моделей требует разработки соответствующих программ на ЭВМ. Стандартные машинные программы для решения задач оптимизации должны обязательно включать подпрограммы анализа устойчивости.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Оптимальное планирование размещения производства. Научн. тр. Новосибирск. гос. ун-та. Сер. эконом. 1965, вып. 7.
2. Дж. Данциг. Линейное программирование, его применение и обобщение, М., «Прогресс», 1966.
3. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании, М., «Советское радио», 1966.
4. C. M. Shetty. On Analysis of the Solution to a Linear Programming Problem. Oper. Res. Quart., v. 12, № 2.

Поступила в редакцию
22 IX 1966