КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И. Ф. КЛЕБАНОВ

(Минск)

Рассматривается следующая задача. Найти вектор $(x_{11}^0, x_{12}^0, \ldots, x_{nm}^0, X_1^0, X_2^0, \ldots$ $\ldots, X_n^0)$, минимизирующий функционал $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = X_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{2}$$

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in M; \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Здесь $b_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$; M — множество перестановок набора неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Очевидно, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи является выполнение равенства $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$. В дальнейшем это равенство предполагается выполненным. Сформулированную задачу будем называть задачей R.

К этой задаче при соответствующих обозначениях (X_i — мощность предприятия, размещаемого в i-м пункте; x_{ij} — объем продукции, перевозимой из i-го пункта i-му потребителю) легко сводится следующая задача размещения предприятий по транспортному критерию.

Имеется s предприятий с мощностями $a_1, a_2, \ldots, a_s$ и m потребителей производимого на этих предприятиях продукта с объемами потребления $b_1, b_2, \ldots, b_m$, причем $\sum_{h=1}^{s} a_h = \sum_{j=1}^{m} b_j$. Заданы n $(n \geqslant s)$ пунктов возможного размещения предприятий. Транспортные издержки на перевозку единицы продукции из i-го $(i = 1, 2, \ldots, n)$ пункта к j-му $(j = 1, 2, \ldots, m)$ потребителю равны c_{ij}. Требуется так разместить предприятия, чтобы транспортные расходы на перевозку всего производимого продукта на этих предприятиях к потребителям были минимальными.

Условимся всякий вектор $(X_1^\sigma, X_2^\sigma, \ldots, X_n^\sigma)$, удовлетворяющий ограничению (3), называть вариантом размещения. В принципе задачу R можно было бы решать полным перебором вариантов, однако практически этот метод даже в случае задач сравнительно небольшого объема наталкивается на серьезные трудности вычислительного характера. Излагаемый ниже алгоритм существенно сокращает процедуру поиска оптимального варианта по сравнению с полным перебором.

Под проблемой выбора для квадратной матрицы $\| q_{ki}^{(\lambda)} \|_n$ будем понимать следующую задачу: из квадратной матрицы $\| q_{ki}^{(\lambda)} \|_n$ выбрать такую последовательность элементов $\{\overset{(\lambda)}{q}_{1i_1}, \overset{(\lambda)}{q}_{2i_2}, \ldots, \overset{(\lambda)}{q}_{ni_n}\}$, чтобы $i_\mu \neq i_\nu$ при $\mu \neq \nu$ и при этом величина

$\sum_{k=1}^{n} \overset{(\lambda)}{q}_{ki_k}$ достигала своего минимального значения.

Пусть дано множество квадратных матриц $\|\overset{(1)}{q}_{ki}\|_n, \ldots, \|\overset{(N)}{q}_{ki}\|_n$, и пусть $\{\overset{(1)}{q}_{1i_1^{(1)}}, \ldots$ $\ldots, \overset{(1)}{q}_{ni_n^{(1)}}\}, \ldots, \{\overset{(N)}{q}_{1i_1^{(N)}}, \ldots, \overset{(N)}{q}_{ni_n^{(N)}}\}$ — решения проблемы выбора для этих матриц.

Матрицу $\|q_{ki}^{(\lambda_0)}\|_n$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ki_k}^{(\lambda_0)}(\lambda_0) = \min_{\lambda=1,2,\ldots,N} \left(\sum_{k=1}^{n} q_{ki_k}^{(\lambda)}(\lambda) \right),$$

будем называть выделенной матрицей этого множества.

В процессе работы алгоритма некоторые элементы матриц будут отмечаться звездочкой. Условимся такие элементы называть отмеченными. Впредь будем предполагать, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$.

На первом шаге строим квадратную матрицу $\| q_{ki} \|_n$, в которой

$$q_{ki} = \min \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_k; \qquad x_{ij} \leqslant b_j, \ j = 1, 2, \ldots, m; \ x_{ij} \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

r-й шаг ($r = 2, 3, \ldots$) состоит в том, что среди матриц, построенных к началу r-го шага (число их не превосходит $r-1$), находим выделенную * $\| q_{ki}^{(\lambda_0)} \|_n$ и для этой матрицы проверяем, какое из следующих условий выполняется: $l < s$ или $l = s$ **, где l — число отмеченных элементов в матрице, а s — число положительных элементов (мощностей) в наборе $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

В случае $l < s$ вместо выделенной матрицы при помощи процедуры, описанной ниже, строим две другие и переходим к $(r+1)$-му шагу.

Первую из этих матриц $\| q_{ki}^{(\lambda')} \|_n$ получаем из выделенной $\| q_{ki}^{(\lambda_\cdot)} \|_n$ следующим образом. На места, где расположены отмеченные элементы $q_{1i_1}^{(\lambda_\cdot)*}, q_{2i_2}^{(\lambda_\cdot)*}, \ldots, q_{li_l}^{(\lambda_\cdot)*}$ и один не отмеченный $q_{l+1 i_{l+1}}^{(\lambda_\cdot)}$, но входящий в решение проблемы выбора, ставим соответственно числа

$$\sum_{j=1}^{m} c_{i_1 j} x_{i_1 j}, \quad \sum_{j=1}^{m} c_{i_2 j} x_{i_2 j}, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{m} c_{i_{l+1} j} x_{i_{l+1} j},$$

где $x_{i_k j}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, l+1$) определяются из следующей задачи: найти $x_{i_k j}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, l+1$), минимизирующие функционал

$$\sum_{k=1}^{l+1} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x_{i_k j}$$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i_k j} = a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, l+1;$$

$$\sum_{k=1}^{l+1} x_{i_k j} \leqslant b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, m;$$

$$x_{i_k j} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, l+1.$$

* При отыскании выделенной матрицы проблему выбора остается решить только для одной из двух матриц, построенных на $r-1$-м шаге, так как для остальных она была решена на предыдущих шагах. Если же для этой матрицы проблема выбора не имеет решения, то она зачеркивается и из дальнейшего рассмотрения исключается.

** Случай $l > s$ невозможен.

Далее полагаем $q_{l+1i}^{(\lambda')} = \infty$ для $i \neq i_{l+1}$, $q_{ki_{l+1}}^{(\lambda')} = \infty$ для $k \neq l+1$, а остальные элементы вычисляем по формуле $q_{ki}^{(\lambda')} = q_{ki}^{(\lambda_1)}$. Наконец, элементы $q_{1i_1}^{(\lambda')}, q_{2i_2}^{(\lambda')}, \ldots, q_{li_l}^{(\lambda')}$, $q_{l+1i_{l+1}}^{(\lambda')}$ отмечаем звездочкой.

Вторую матрицу $\| q_{ki}^{(\lambda'')} \|_n$ получаем из выделенной, полагая $q_{ki_{l+1}}^{(\lambda'')} = \infty$ для $k = l+1, g_1, g_2, \ldots, g_t$, $q_{ki}^{(\lambda'')} = q_{ki}^{(\lambda_1)}$ для остальных элементов матрицы, где $g_1, g_2, \ldots, g_t$ — все индексы, для которых $a_{g_i} = a_{l+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Кроме того, элементы $q_{1i_1}^{(\lambda'')}, q_{2i_2}^{(\lambda'')}, \ldots, q_{li_l}^{(\lambda'')}$ отмечаем звездочкой.

В случае $l = s$ следующим построением оптимального вектора алгоритм заканчивает работу. Пусть $\{q_{1i_1}^{(\lambda_1)}, q_{2i_2}^{(\lambda_1)}, \ldots, q_{ni_n}^{(\lambda_1)}\}$ решение проблемы выбора для выделенной матрицы. Тогда полагаем $X_{i_k}^0 = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $x_{i_k j}^0 = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m;$ $k = s+1, s+2, \ldots, n)$; а $x_{i_k j}^0$ $(j = 1, 2, \ldots, m;$ $k = 1, 2, \ldots, s)$ — числа, минимизирующие функционал $\sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x_{i_k j}$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i_k j} = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s;$$

$$\sum_{k=1}^{s} x_{i_k j} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m;$$

$$x_{i_k j} \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Очевидно, что выдаваемый алгоритмом вектор $(x_{11}^0, x_{12}^0, \ldots, x_{nm}^0, X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0)$ удовлетворяет ограничениям (1) — (4). Ниже будет доказано, что он оптимальный.

Пусть $\| q_{ki}^{(\lambda)} \|_n$ — матрица, построенная к началу r-го $(r \in \{2, 3, \ldots\})$ шага, и $\{q_{1i_1}^{(\lambda)}, \ldots, q_{ni_n}^{(\lambda)}\}$ — такая последовательность конечных элементов этой матрицы, в которой $i_\mu \neq i_\nu$ при $\mu \neq \nu$. Всякую такую последовательность будем называть допустимой. Каждой допустимой последовательности соответствует единственный, определяемый ею вариант размещения.

Докажем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ki_k}^{(\lambda)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x'_{i_k j}, \tag{5}$$

где $q_{ki_k}^{(\lambda)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — элементы допустимой последовательности, а $x'_{i_k j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m;$ $k = 1, 2, \ldots, n)$ — оптимальный план перевозок соответствующего ей варианта размещения.

Пусть, как и прежде, l — число отмеченных элементов матрицы. Правила построения матриц на каждом шаге работы алгоритма таковы, что

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ki_k}^{(\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x''_{i_k j},$$

где $x''_{i_k j}$ $(k = 1, 2, \ldots, l;$ $j = 1, 2, \ldots, m)$ — числа, минимизирующие $\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x_{i_k j}$ при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i_k j} = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, l;$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{i_k j} \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{6}$$

$$x_{i_k j} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, l;$$

а для каждого $k \in \{l+1, l+2, \ldots, n\}$ $x''_{i_k j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — числа, минимизирующие $\sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x_{i_k j}$, при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{i_k j} = a_k;$$

$$x_{i_k j} \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{7}$$

$$x_{i_k j} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x''_{i_k j} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i_k j} x'_{i_k j},$$

так как $x'_{i_k j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют ограничениям (6), (7). Неравенство (5) доказано.

Заметим, что каждой матрице, построенной к началу r-го $(r \in \{2, 3, \ldots\})$ шага, соответствует вполне определенное множество допустимых последовательностей и, следовательно, вполне определенное множество вариантов размещения. Легко показать, что множеству матриц, построенных к началу каждого шага, соответствует множество всех возможных вариантов размещения.

Докажем теперь, что вектор $(x_{11}{}^0, x_{12}{}^0, \ldots, x_{nm}{}^0, X_1{}^0, X_2{}^0, \ldots, X_n{}^0)$ — оптимальный. Действительно, из последнего замечания неравенства (5) и определения выделенной матрицы следует, что если $\{q^{(\lambda_0)}_{1i_1}, \ldots, q^{(\lambda_0)}_{ni_n}\}$ — решение проблемы выбора для матрицы, выделенной на r-м шаге, то

$$\sum_{k=1}^{n} q^{(\lambda_0)}_{ki_k} \leqslant \min_{(X_1^\sigma, \ldots, X_n^\sigma) \in H} \psi(X_1^\sigma, \ldots, X_n^\sigma),$$

где H — множество вариантов размещения, а $\psi(X_1{}^\sigma, \ldots, X_n{}^\sigma)$ — минимальное значение функционала $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях (1), (2), (4) и $(X_1, \ldots, X_n) = (X_1{}^\sigma, \ldots, X_n{}^\sigma)$. Кроме, того из описания r-го шага следует, что если $\{q^{(\lambda_0)}_{1i_1}, \ldots, q^{(\lambda_0)}_{ni_n}\}$ — решение проблемы выбора для матрицы, выделенной на последнем шаге, то справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} q^{(\lambda_0)}_{ki_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}{}^0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем, что вектор $(x_{11}{}^0, x_{12}{}^0, \ldots, x^0_{nm}, X_1{}^0, X_2{}^0, \ldots, X_n{}^0)$ оптимальный.

Замечание. Изложенный алгоритм позволяет на каждом шаге оценивать верхнюю границу «удаления» по затратам любого варианта размещения от оптимального. Действительно, пусть $q^{(\lambda_0)}_{1i_1}, q^{(\lambda_0)}_{2i_2}, \ldots, q^{(\lambda_0)}_{ni_n}$ — элементы решения проблемы выбора для матрицы, выделенной на данном шаге. Тогда

$$\psi(X_1{}^\sigma \ldots, X_n{}^\sigma) - \sum_{k=1}^{n} q^{(\lambda)}_{ki_k}$$

и дает указанную границу.

Поступила в редакцию
24 II 1967