

АГРЕГАЦИЯ, ОПТИМИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ БОЛЬШИХ СИСТЕМ

Р. КУЛИКОВСКИЙ

(Польша)

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы комплексной автоматизации, оптимизации производственных процессов, исследования операций и т. п. выдвигают новые теоретические проблемы, которые в последнее время все чаще называют теорией больших (или сложных) систем. В этой теории, как и в классической теории систем, можно различать два основных направления. Первое, которое можно назвать аналитическим, стремится разложить начальную сложную проблему на ряд меньших, или более простых, подпроблем, допускающих эффективное решение при помощи имеющихся вычислительных и технологических средств. Типичным примером этого направления являются методы блочного программирования или декомпозиции в теории линейного и нелинейного программирования (см., например, работы [1—3]). В последнее время методы этого типа применяются также для оптимизации сложных динамических задач (например, работы [4, 5]).

Второе направление теории больших систем имеет синтетический характер. Оно стремится получить сложную систему с желаемыми свойствами, используя простые подсистемы с известными свойствами.

Достигается это агрегацией, которую можно рассматривать как процесс, противоположный процессу декомпозиции. Типичным примером этого направления являются задачи типа PERT, где заданный проект реализуется путем синтеза отдельных операций. Как показано в работах [6—8], метод агрегации может быть распространен на более широкий класс динамических нелинейных задач управления, которые, в частности, встречаются при комплексной автоматизации производственных процессов. В этих работах показано также, что в иерархических системах, в которых имеется некоторое количество управляемых процессов и систем связи или транспорта, соединяющих отдельные процессы, существует оптимальная организационная структура. Эта структура должна быть реорганизована, как только параметры процессов изменят свои значения. Таким образом мы получаем новый класс оптимальных систем с управляемой организационной структурой.

Следует заметить, что теория организации систем пока слабо разработана, хотя на практике существует много систем, которые время от времени изменяют свою структуру для повышения эффективности или уменьшения затрат.

Настоящая работа имеет своей целью дальнейшее развитие и обобщение результатов работ [6—9]. В частности, кроме организационных систем иерархического типа мы рассмотрим кооперационные системы, а также системы смешанного типа (кооперационно-иерархические).

Простейшими примерами кооперационных систем являются экономические системы товарообмена между отраслями (например, линейная замкнутая система Леонтьева). Если учесть иерархическую организацию отдельных отраслей, кооперационная система превращается в систему кооперационно-иерархического типа.

Следует заметить, что принятие кооперационно-иерархической модели в экономических исследованиях (вместо модели кооперационного типа, характерной для классических экономических теорий дескриптивного характера) имеет ряд преимуществ.

Прежде всего, можно устранить в некоторой степени противоречие между макро- и микромоделями. Противоречие это, как известно, состоит в том, что простая макро модель, хотя и не дает качественного объяснения сложного процесса, не в состоянии точно отобразить количественные соотношения в отдельных микропроцессах действительного мира. В то же время простая микро модель, хотя и достаточно точно описывает частные подпроцессы (в идеализированных условиях, когда все внешние связи фиксированы или устранены), не в состоянии дать точные ответы на вопросы интегрального характера, касающиеся поведения совокупности микропроцессов.

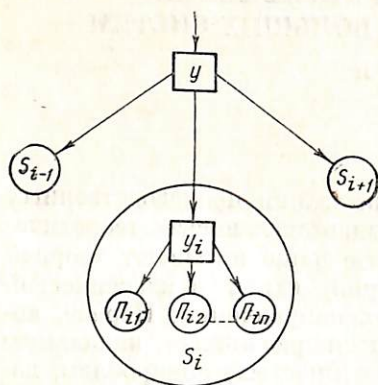


Рис. 1

Это противоречие нелегко преодолеть, так как стремление к повышению точности отображения действительно в макро- и микромоделях связано с быстрым увеличением количества уравнений, описывающих рассматриваемый процесс, а также объема информации о параметрах процессов. С другой стороны, объем памяти и скорость преобразования информации, присущие человеческому мозгу или вычислительной машине, ограничены, и практическое значение имеют лишь такие модели действительности, которые достаточно просты.

Известно, что в некоторой степени указанные противоречия можно преодолеть путем конструирования децентрализованных систем. Это особенно наглядно в иерархических системах, где каждое управляющее устройство y_i , $i = 1, 2, \dots$ управляет заданными процессами Π_{ij} , $j = 1, 2, \dots, n$ и является одновременно объектом управления устройства высшего уровня Y (см. рис. 1).

Как показано в работах [6—8], а также как будет следовать из дальнейшего изложения, каждый оптимизированный процесс Π_{ij} можно описать при помощи m параметров $k_{ij}^{(v)}$, $v = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, совокупность процессов $\Pi_{i1}, \dots, \Pi_{in}$ можно описать mn параметрами. Затем, применяя процесс агрегации и оптимизации, получаем агрегированную систему s_i , которая может быть описана при помощи m параметров $k_i^{(v)}$, $v = 1, 2, \dots, m$, значения которых можно просто определить на основе известных значений $k_{ij}^{(v)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Процесс агрегации может быть распространен на высшие уровни управления, причем получаемая таким образом агрегированная система может быть описана небольшим количеством параметров.

Иначе говоря, в иерархических системах описываемого типа количество информации, с которым имеют дело отдельные управляющие устройства и которое измеряется количеством параметров агрегированных процессов, не превосходит заданных значений. Кроме того, в системах такого типа нет опасности, что объем памяти и скорость преобразования информации в управляющем устройстве будут недостаточны для удовлетворительной работы системы.

Следует также отметить, что в рассматриваемых здесь моделях коопе-

рационально-иерархического типа кроме ряда технических показателей, таких как качество управления, время оптимизации, интегральные показатели и ошибки, можно легко учесть объем и цены ресурсов, влияние инвестиций и технического прогресса на валовую продукцию системы. Это связано с тем, что в рассматриваемых структурах каждый технологический процесс имеет свое точно определенное место и легко вычислить влияние изменений параметров этого процесса на общий выходной эффект. Можно также сравнительно легко определить влияние мероприятий организационного характера на качество и объем продукции системы.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ХАРАКТЕРИСТИКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ввиду того, что рассматриваемые нами большие системы состоят из ряда динамических управляемых процессов, прежде чем приступить к исследованию интересующих нас проблем, мы должны коротко остановиться на некоторых понятиях, связанных с динамической оптимизацией.

Предположим, что оптимизируемый процесс описан при помощи некоторого нелинейного оператора A , который преобразует каждое управляющее входное воздействие $x(t)$ в выход $y(t)$, т. е. $y(t) = A[x(t)]$. Воздействия x , y можно считать элементами некоторых банаховых пространств.

Мы предполагаем также, что заданы два неотрицательных функционала: $F(x)$, $\Phi_0[x, A(x)] = \Phi(x)$, которые мы назовем мерой управления и мерой выходного эффекта (или выхода) соответственно.

Далее, предположим, что для любого неотрицательного числа λ существует единственное управление $x = \bar{x}$, для которого $F(x)$ достигает своего минимума при условии $\Phi(\bar{x}) = \varphi$. Это предположение требует, чтобы были выполнены некоторые условия условного минимума.

Следуя вариационному методу, введем функционал $\psi(x) = F(x) + \lambda \Phi(x)$, где λ — множитель Лагранжа. Считая $F(x)$, $\Phi(x)$ сильно дифференцируемыми и предполагая, что $\|\text{grad } \Phi(x)\| > 0^*$ на основании известной теоремы Люстерника (см., например, [10]), находим необходимое условие условного минимума: $\text{grad } F(\bar{x}) + \lambda \text{grad } \Phi(\bar{x}) = 0$.

Согласно нашему предположению, существует единственное решение $\bar{x}$ этого уравнения. Это решение является функцией λ , т. е. $\bar{x}(\lambda)$. Подставляя это решение в выражение для функционалов $F(\bar{x})$, $\Phi(\bar{x})$, получаем функции от λ :

$$f = F[\bar{x}(\lambda)], \quad \varphi = \Phi[\bar{x}(\lambda)]. \quad (1)$$

В некоторых случаях можно исключить λ из уравнений (1) и получить одну функцию $f(\varphi)$ или $\varphi(f)$, которую будем называть характеристикой оптимального управления XOY . Уравнение (1) можно рассматривать как параметрическое представление XOY .

Эти характеристики легко обобщаются на случай задач, в которых имеется несколько добавочных условий. В этом случае XOY являются функциями многих переменных. Понятие XOY обобщается также на случаи добавочных условий, включающих неравенства типа $\Phi(x) \leq \varphi$. Эффективное вычисление оптимальных управлений, а затем XOY оказывается, однако, в этих случаях более сложным. Как показано в работе [11],

* Функционал $F(x)$ называется сильно дифференцируемым в точке $x \in X$, если $F(x+h) - F(x) = dF(x, h) + \Omega(x, h)$, где $dF(x, h)$ — линейный функционал вариации $h \in X$ и $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \Omega(x, h) / \|h\| = 0$. Дифференциал $dF(x, h)$ можно записать в виде: $dF(x, h) = (F'(x), h)$, где производная функционала $F'(x)$ называется градиентом $F'(x) = \text{grad } F(x)$.

для решения таких задач удобно пользоваться обобщенными (на случай банаховых пространств) условиями Куна-Такера.

Следует заметить, что на практике существуют также управляемые процессы, стратегии которых x оказываются «субоптимальными» в смысле определенных функционалов качеств, т. е. $x \approx \bar{x}$. Тогда мы не в праве, вообще говоря, считать характеристики управления $F(x)$, $\Phi(x)$ оптимальными. Это обстоятельство не имеет, однако, существенного значения для излагаемой теории. Характеристики $F(x)$, $\Phi(x)$ могут быть даже определены на основе экспериментов.

Для большей наглядности рассмотрим простой пример.

Во многих транспортных задачах на шахтах, металлургических заводах и т. п. для перемещения некоторого груза Γ применяются управляемые двигатели постоянного тока. Управляющий ток x и перемещение y инерционного груза Γ связаны дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = ax(t), \quad (2)$$

где a — коэффициент, обратно пропорциональный массе Γ .

Из уравнения (2) получаем

$$y(t) = y(0) + a \int_0^t (t - \tau) x(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $y(0)$ — начальное положение Γ .

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: в заданное время $t = T$ нужно переместить Γ на заданную высоту $y(T) - y(0) = Y$, т. е.

$$a \int_0^T (T - \tau) x(\tau) d\tau = Y \quad (4)$$

таким образом, чтобы количество затраченной энергии, которая пропорциональна

$$E = \int_0^T [x(\tau)]^2 d\tau, \quad (5)$$

было минимальным и чтобы в точке $t = T$ двигатель остановился, т. е.:

$$y'(T) = \int_0^T x(\tau) d\tau = 0. \quad (6)$$

Для решения этой задачи построим функционал

$$\psi(x) = \int_0^T [x(\tau)]^2 d\tau + \lambda_1 a \int_0^T (T - \tau) x(\tau) d\tau + \lambda_2 \int_0^T x(\tau) d\tau.$$

Приравнявая градиент этого функционала к нулю, получаем уравнение: $2x(t) + \lambda_1 a(T - \tau) + \lambda_2 = 0$. Исключая множители λ_1 , λ_2 на основе условий (4), (6), получаем $\bar{x}(t) = (3Y/aT^3)(1/2T - t)$.

Легко показать, что это решение оптимально. Подставляя это решение в (5), получаем

$$E = \frac{3}{4} \frac{Y^2}{a^2 T^3}. \quad (7)$$

Последнее уравнение представляет XOY для интересующей нас задачи. Как видно из (7), энергия управления является монотонной функцией отклонений Y и времени управления T . Далее, на основании (7) можно также определить параметры T , Y в родственных оптимизационных задачах. Если, например, нужно найти минимальное время, за которое груз G будет поднят на высоту $y \geq Y$ при использовании энергии не больше E , то из (7) получаем

$$T = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{Y^2}{a^2 E}}. \quad (8)$$

Подобным образом максимальное отклонение Y , которое может быть достигнуто за время не больше T при использовании энергии не больше E , равно: $Y = 2a\sqrt{T^3 E / 3}$.

В работах [6—9] вычислены XOY для различных динамических управляемых процессов. Оказывается, что во многих задачах эти характеристики являются дифференцируемыми монотонными функциями, которые удобно записывать в неявном виде *

$$F(A, B, \dots, Y, Z) = 0, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0, \dots, \quad Z \geq 0. \quad (9)$$

Будем считать, что $A, B, \dots$ представляют минимизируемые величины (время управления, некоторые интегральные показатели качества управления, энергия, количество топлива и т. п.).

$Z, Y, \dots$ — максимизируемые величины (выходное отклонение, выпуск продукции и т. п.). Эти переменные будем называть ресурсами.

Типичным примером XOY типа (9) является (ср. (7)):

$$A^\alpha B^\beta, \dots, Y^\psi Z^\omega = k^q, \quad q = \alpha + \beta + \dots + \omega, \quad (10)$$

где $\alpha, \beta, \dots, \omega$ — заданные действительные числа, причем знаки $\alpha, \beta, \dots$ противоположны знакам $\omega, \psi, \dots$; k — положительный коэффициент, который можно назвать показателем качества системы (чем k меньше, тем лучше динамические свойства оптимизируемой системы); или

$$(A - \bar{A})^\alpha (B - \bar{B})^\beta \dots (Z - \bar{Z})^\omega = k^q, \quad (11)$$

где $\bar{A}, \bar{B}, \dots, \bar{Z}$ — неотрицательные числа.

Покажем, что XOY типа (9) можно в окрестности точки $p = (A, B, \dots, Z) \equiv (k + \bar{A}, k + \bar{B}, \dots, k + \bar{Z})$ аппроксимировать характеристикой (11).

Для этого введем новые переменные: $a = \ln k^{-1}(A - \bar{A})$, $b = \ln k^{-1}(B - \bar{B})$, $\dots$, $z = \ln k^{-1}(Z - \bar{Z})$. Тогда (9) можно записать

$$F(A, B, \dots, Z) = F(ke^a + \bar{A}, ke^b + \bar{B}, \dots, ke^z + \bar{Z}) = F^*(a, b, \dots, z) = 0.$$

Функция F^* описывает непрерывную гиперповерхность в пространстве параметров $a, b, \dots, z$. Построим касательную гиперплоскость к F^* в точке $a = b = \dots = z = 0$ (что соответствует касательной гиперповерхности к F в точке p):

$$\frac{\partial F^*}{\partial a} a + \frac{\partial F^*}{\partial b} b + \dots + \frac{\partial F^*}{\partial z} z = 0$$

Обозначая частные производные F^* по $a, b, \dots, z$ (в точке $a = b = \dots = z = 0$) через $\alpha, \beta, \dots, \omega$ соответственно, из последнего уравнения получаем: $\alpha a + \beta b + \dots + \omega z = \alpha \ln k^{-1}(A - \bar{A}) +$

* Частным примером XOY такого типа является производственная функция в модели Кобба — Дугласа [14].

$$+\beta \ln k^{-1}(B-\bar{B})+\dots+\omega \ln k^{-1}(Z-\bar{Z})=0. \quad \text{Отсюда} \quad (A-\bar{A})^\alpha \cdot (B-\bar{B})^\beta \dots (Z-\bar{Z})^\omega = k^{\alpha+\beta+\dots+\omega} = k^q.$$

Заметим, что $ХОУ$ (11) вообще не является монотонной. Однако мы часто можем ограничиться монотонными ветвями этой характеристики. Если, например, $Z = k(A - \bar{A})^{2\alpha} + \bar{Z}$, $0 \leq A \leq Z\bar{A}$, $\alpha > 0$, достаточно ввести ограничение $0 \leq A \leq \bar{A}$, так как нельзя получить большего выхода Z для $\bar{A} < A \leq 2\bar{A}$.

3. ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ПРОЦЕСС АГРЕГАЦИИ

Рассмотрим иерархическую организационную структуру, указанную на рис. 2. Она состоит из динамических управляемых процессов $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ и управляющего устройства Y . Управляющее устройство полу-

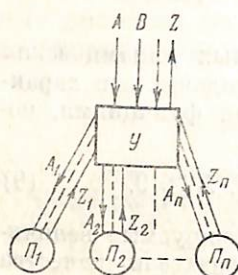


Рис. 2

чает некоторое количество ресурсов (энергии, горючего и т. п.) $A, B, \dots$ от системы высшего уровня. Полученные ресурсы устройство Y распределяет оптимальным образом между процессами $\Pi_1, \dots, \Pi_n$. Выходные эффекты, или продукты отдельных процессов Z_i , поступают на Y , и в агрегированном виде Z_i определяют валовую продукцию системы.

Предположим, что известны $ХОУ$ процессов в виде:

$$A_i^\alpha B_i^\beta \dots Z_i^\omega = k_i^q, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Тогда мы можем исключить из рассмотрения процессы динамической оптимизации, которые осуществляет устройство Y или локальные динамические опти-

мизаторы процессов $\Pi_1, \dots, \Pi_n$. Остается, однако, вопрос статической нелинейной оптимизации, который состоит в определении таких значений $A_i^0, B_i^0, \dots, Z_i^0$ переменных $A_i, B_i, \dots, Z_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые максимизируют суммарный выход

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i = \sum_{i=1}^n [k_i^q A_i^{-\alpha} B_i^{-\beta} \dots]^{1/\omega} \quad (13)$$

при соблюдении условий $\sum_{i=1}^n A_i = A$; $\sum_{i=1}^n B_i = B, \dots$; $A_i \geq 0$; $B_i \geq 0$; $\dots$

Можно показать [6, 7], что оптимальные значения $A_i^0, B_i^0, \dots$ определяются из линейных уравнений:

$$A_i^0/A = B_i^0/B = \dots = Z_i^0/Z = k_i/k, \quad (14)$$

где

$$k = \sum_{i=1}^n k_i. \quad (15)$$

Если подставить значения $A_i^0, B_i^0, \dots$ в выражение (13), получаем [6, 7] $A^\alpha B^\beta \dots Z^\omega = k^q$, $q = \alpha + \beta + \dots + \omega$.

Как видно, $ХОУ$ для агрегированной системы имеет такой же аналитический вид, как и $ХОУ$ подсистем, описанных формулой (12). Так как каждая подсистема полностью определена значением коэффициента k_i , можно сказать, что процесс агрегации сопровождается n -кратным сжатием количества информации, содержащейся в $ХОУ$ агрегированных подсистем. Аналогичным свойством обладают также другие системы $ХОУ$.

Например, система

$$A_i = F_i(B_i) = \beta_i f[B_i/\beta_i + b_i] + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

где a_i, β_i, b_i — заданные числа, a_i — действительные, β_i — положительные, f — функция дифференцируемая, обладающая единственной обратимо-

стью $[f']^{-1}$, причем $f'[B] < 0, B > 0$; обладает [8] свойством

$$A = F(B) = \min_{\sum_{i=1}^n B_i \leq B} \left\{ \sum_{i=1}^n F_i(B_i) \right\} = \beta f \left[\frac{B}{\beta} + b \right] + a, \quad (17)$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad b = \beta^{-1} \sum_{i=1}^n \beta_i b_i, \quad a = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Кроме того, оптимальные значения B_i^0 переменных B_i можно определить из линейных уравнений [8]:

$$B_k^0 \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i - \beta_k \sum_{i=1}^{k-1} B_i^0 = \beta_k \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i (b_i - b_k), \quad \sum_{i=1}^n B_i^0 = B, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Из этих уравнений можно получить неотрицательные значения для B_i^0 , если

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (b_i - b_n) \leq B.$$

Как видно в настоящем примере, каждая ХОУ описана тремя параметрами a_i, β_i, b_i , а процесс агрегации сопровождается n -кратным сжатием информации, причем агрегированная характеристика имеет аналогичный вид, как и ХОУ подсистем. Как показано в работе [9], аналогичными свойствами обладают также некоторые функции многих переменных.

Существует, конечно, много ХОУ, которые не выражаются уравнениями типа (12), (17). Тогда вопрос агрегации и оптимизации превращается в нелегкую задачу из области нелинейного программирования. Чтобы избежать решения этой задачи, мы предпочитаем провести аппроксимацию заданных (например, графически) ХОУ при помощи характеристик типа (17). Удобно при этом воспользоваться графиками производных ХОУ: $F_i'(B_i)$ в логарифмическом масштабе, как это указано на рис. 3 (для случая $n = 2$).

Область значений разделена здесь на l сегментов $(\underline{A}^{(k)}, \bar{A}^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, l$, и в каждом сегменте функции $\ln F_i'(B_i)$ аппроксимированы отрезками прямых $\ln F_i(B_i) = (1/\beta_i^{(k)}) B_i + b_i^{(k)}$, $i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, l$.

Затем

$$\tilde{F}_i(B_i) = \begin{cases} \beta_i^{(k)} \exp \left[\frac{B_i}{\beta_i^{(k)}} + b_i^{(k)} \right] + a_i^{(k)} & \text{для } B_i \in [\underline{B}_i^{(k)}, \bar{B}_i^{(k)}], \\ 0 & \text{для } B_i \notin [\underline{B}_i^{(k)}, \bar{B}_i^{(k)}], \end{cases}$$

где $a_i^{(k)}$ выбраны таким образом, чтобы $\tilde{F}_i$ были непрерывны в точках $[\underline{B}_i^{(k)}, \bar{B}_i^{(k)}]$. Следует заметить, что, поскольку условия оптимальности требуют $F_i'(B_i^0) = \lambda = \text{const}^*$, переменные B_i^0 проходят через граничные

* Действительно, рассмотрим функцию Лагранжа $\psi = \sum_{i=1}^n F_i(B_i) + \lambda [B - \sum_{i=1}^n B_i]$. Необходимые условия оптимальности требуют, чтобы $\partial \psi / \partial B_i = F_i'(B_i^0) - \lambda = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, где λ определяется из условия $\sum_{i=1}^n B_i = B$.

точки сегментов $[B_i^{(h)}, \bar{B}_i^{(h)}]$ (для разных i) одновременно.

Интересно заметить, что после агрегации XOY получаем

$$\tilde{F}(B) = \begin{cases} \beta^{(h)} \exp [(B/\beta^{(h)}) + b^{(h)}] + a^{(k)} & \text{для } B \in [B_i^{(h)}, \bar{B}_i^{(h)}], \\ 0 & \text{для } B \notin [B_i^{(h)}, \bar{B}_i^{(h)}], \end{cases}$$

где

$$\underline{B}^{(h)} = \sum_{i=1}^n \underline{B}_i^{(h)}, \bar{B}^{(h)} = \sum_{i=1}^n \bar{B}_i^{(h)}.$$

Следовательно, процесс агрегации сопровождается здесь n -кратным сжатием количества информации, которое содержится в $3l$ параметрах

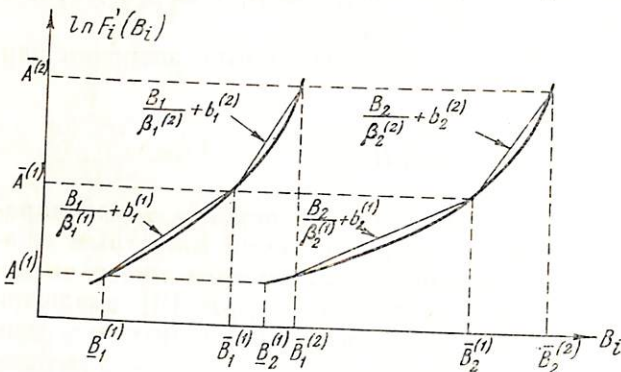


Рис. 3

XOY подсистем. Процесс аппроксимации можно также применить в случае XOY многих переменных $F_i(A_i, B_i, \dots, Z_i) = 0$. Как мы уже отметили в разделе 2, можно применить аппроксимацию при помощи

$$(A_i - \bar{A}_i)^\alpha (B_i - \bar{B}_i)^\beta \dots \dots (Z_i - \bar{Z}_i)^\omega = k_i^q, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

где $\bar{A}_i, \bar{B}_i, \dots, \bar{Z}_i, k_i$ — заданные неотрицательные числа ($k_i > 0$). Показате-

ли $\alpha, \beta, \dots, \omega$, имеющие смысл частных производных в точке аппроксимации, должны быть равны, что связано с замечанием в сноске на стр. 71—72.

Процесс агрегации можно повторять и распространять на многоэтажную иерархическую структуру типа, указанного на рис. 1. На каждом уровне этой структуры мы имеем дело с точно определенным количеством информации.

Описанный здесь процесс агрегации и оптимизации может быть распространен на несколько случаев.

Во-первых, можно осуществить процесс агрегации, когда условия

$$\text{типа } \sum_{i=1}^n A_i = A, \sum_{i=1}^n B_i = B, \dots \text{ замещаются на } \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i = A, \sum_{i=1}^n \beta_i B_i =$$

$= B, \dots$, где заданные положительные коэффициенты α_i, β_i определяют затраты ресурсов и продуктов. Формулы (14), (15) превращаются тогда в

$$\alpha_i A_i^0 / A = \beta_i B_i^0 / B = \dots = \omega_i Z_i^0 / Z = k_i \lambda_i / k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

где

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i, \quad \lambda_i = [\alpha_i^\alpha \beta_i^\beta \dots \omega_i^\omega]^{(\alpha+\beta+\dots+\omega)^{-1}}. \quad (20)$$

Во-вторых, когда эти условия дополнены требованиями

$$\sum_{i=1}^n a_i A_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i B_i = 0, \dots,$$

возникающими в случае, когда требуется, чтобы отдельные процессы или операции были выполнены с одинаковым потреблением ресурсов или за одно и то же время (мы можем, например, потребовать, чтобы все двигатели, поднимающие заданный груз с минимальным использованием энергии, закончили работу в одно и то же время). Требования последнего типа особенно характерны для задач типа PERT. Примеры задач таких типов решены в работах [4, 7, 8]. Добавочные условия могут также принимать вид $A_i \leq \bar{A}_i$, $B_i \leq \bar{B}_i$, ..., $Z_i \geq \bar{Z}_i$, где $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, ..., $\bar{Z}_i$ — заданные положительные числа.

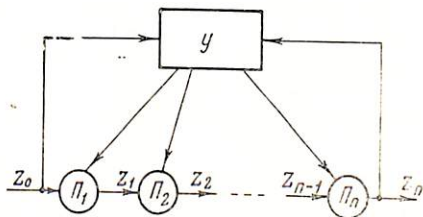


Рис. 4

В-третьих, можно распространить описанные выше методы на многоэтапные или взаимосвязанные процессы типа показанного на рис. 4. Каждый процесс описан значением концентрации полезных составляющих продуктов z_{i-1} , z_i на входе и выходе процесса Π_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Управляющее устройство должно установить значение концентрации z_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ на основе информации о заданных граничных значениях z_0 ,

z_n , так, чтобы суммарная стоимость продукции $\sum_{i=1}^n f_i(z_{i-1}, z_i)$, где f_i —

заданные функции, достигла минимума.

Конкретным примером системы такого типа является цепочка химических реакторов непрерывного действия с мешалками. Если z_i — концентрация на входе реактора i , а T_i обозначает время пребывания продукта в этом реакторе, то материальный баланс приводит к зависимости $z_i = z_{i-1} + T_i r(z_i)$, где $r(z_i) = dz_i / dt$ — скорость реакции. Полное время выпуска продукции

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{z_i - z_{i-1}}{r(z_i)}, \quad (21)$$

которое имеет здесь смысл стоимости, должно быть минимальным, что достигается путем оптимального выбора концентрации z_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Похожие на (21) зависимости стоимости продукции получаются также для многих других технологических процессов, таких, как многоэтапные процессы обмена тепла, охлаждения, сушения, очистки и т. п.

Следует заметить, что типичная функция $f_i(z_{i-1}, z_i)$, указанная на рис. 5, может быть в небольших пределах $[\underline{Z}_{i-1}, \bar{Z}_{i-1}][\underline{Z}_i, \bar{Z}_i]$, $i = 1, \dots, m$ аппроксимирована так:

$$\tilde{f}_i(\lambda_i z_i - \lambda_{i-1} z_{i-1} + c_i) = (\lambda_i z_i - \lambda_{i-1} z_{i-1} + c_i)^2,$$

где λ_i , c_i , $\underline{Z}_i$, $\bar{Z}_i$ — заданные числа.

Затем, полагая $\lambda_i z_i - \lambda_{i-1} z_{i-1} + c_i = B_i$, мы получаем известную уже

задачу распределения «ресурса» $B = \sum_{i=1}^n B_i = \lambda_n z_n - \lambda_0 z_0 + \sum_{i=1}^n c_i$. Иначе

говоря, мы сводим задачу оптимального распределения концентрации к задаче распределения приращений концентраций в отдельных подсистемах, аппроксимирующих реальный многоэтапный процесс. Эта операция может быть, очевидно, применима только в том случае, когда количество

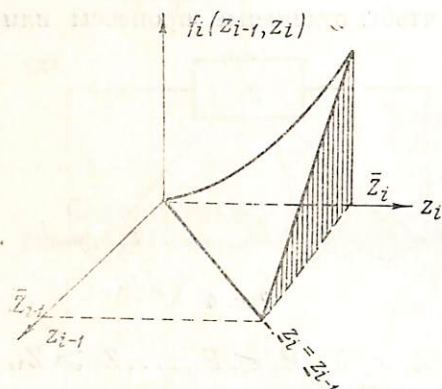


Рис. 5

этапов n велико, так, что приращения концентрации в отдельных подсистемах невелики. Методы подобного рода можно также применять, когда в многоэтапном процессе имеются динамические связи, что характерно, например, для задач с хранением ресурсов и продуктов. Следует заметить, что в рассмотренном случае агрегация связана со степенью завершения некоторого процесса, которая выражается концентрацией. В динамическом случае мы имеем дело с агрегацией по времени данного процесса или проекта.

Идя по пути дальнейшего распространения основной задачи, следует остановиться на случае, в котором XOY заданы в параметрическом виде (1). Как следует из определения этих характеристик и известного свойства (см., например, работу [12]) множителей Лагранжа, для каждой подсистемы можем написать:

$$df_i / d\varphi_i = dF_i[\bar{x}(\lambda_i)] / d\Phi_i[\bar{x}(\lambda_i)] = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

В этом соотношении множители Лагранжа имеют простую экономическую интерпретацию: λ_i^{-1} равно приращению выходной продукции φ_i за счет единичного приращения входного ресурса f_i в оптимальном режиме работы данной системы.

Наша основная задача состоит в нахождении таких значений λ_i ,

которые минимизируют $f = \sum_{i=1}^n F_i[\bar{x}(\lambda_i)]$ при условии $\sum_{i=1}^n \Phi_i[\bar{x}(\lambda_i)] = \varphi$, где φ — заданное число.

Необходимым условием оптимальности является (см. сноску на стр. 71—72):

$$\frac{df_i}{d\varphi_i} = \frac{dF_i[\bar{x}(\lambda_i)]}{d\lambda_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{d\Phi_i[\bar{x}(\lambda_i)]} = \mu = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сравнивая эти соотношения с (22), мы приходим к выводу, что значения λ_i в агрегированных подсистемах должны быть равны. Это свойство не только облегчает определение XOY для агрегированной системы, которая получается сложением графиков XOY подсистем, т. е.

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^n F_i(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\lambda),$$

но также облегчает реализацию управляющей системы. Общее значение коэффициента λ в этом случае определяется из условия:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(\lambda) = \varphi. \quad (23)$$

Аналогичными зависимостями пользуются часто в так называемых децентрализованных экономических системах, где управляющее устройство высшего уровня определяет цену (т. е. в наших обозначениях λ) из уравнения типа (23) для всех подсистем, которые затем стараются минимизировать свои локальные расходы или ресурсы [13].

Имеется также простая техническая интерпретация полученного результата. Как показано в работе [8], для линейных динамических процессов с обратной связью и квадратическим критерием качества коэффициент λ просто связан с усилением в цепи обратной связи. Управляющее устройство высшего уровня определяет из (23) значение λ и изменяет соответственно общий коэффициент усиления в оптимальных регуляторах всех подсистем.

В рассматриваемых до сих пор случаях агрегации мы предполагали, что меры выходных эффектов Z_i содействуют аддитивным образом дости-

жению общей цели Z , т. е. $Z = \sum_{i=1}^n \xi_i Z_i$, где $\xi_i > 0$. Однако во многих про-

изводственных системах имеется ряд мер, показателей и критериев качества, которые лишь в совокупности определяют качество процесса. При этом следует установить между ними некоторый компромисс (например, между количественными и качественными показателями нескольких сортов бензина, которые продаются в смешанном виде).

Ситуация здесь во многом аналогична известной ситуации покупателя, который должен отдать определенное предпочтение различным товарам на рынке. Поэтому в этом случае оказывается полезным ввести некоторые понятия, известные в теории потребительского выбора и основанные на понятии оптимума в смысле Парето (см., например, [14, стр. 312]). Для этого предположим, что имеется m мер выходов подсистем: $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ представляемых вектором Z . Предполагается также, что существуют так называемые индексы полезности $U_i(Z_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, которые являются монотонными функциями. Говорят, что система $\{Z_i\} \in \bar{Z}_i$ (где $\bar{Z}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ — множество допустимых показателей) образует оптимум Парето, если не существует другой системы $\{Z_i'\} \in \bar{Z}_i$, для которой $U_i(Z_i') \geq U_i(Z_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Конечно, для выделения конкретной оптимальной системы мер выходов Z_i^0 , $i = 1, 2, \dots, n$ следует наложить дальнейшие условия, которые должны свести задачу к определению некоторой агрегированной цели или выходного эффекта Z в виде заданной функции Z_i . Если, например, эта функция принимает вид $Z = Z_1^{\xi_1}, Z_2^{\xi_2}, \dots, Z_n^{\xi_n}$, где $\xi_i > 0$, можно путем введения новых переменных $Y_i = \log Z_i$ свести задачу к рассмотренной уже аддитивной задаче с новыми ресурсами Y_i , причем $Y = \sum_{i=1}^n \xi_i Y_i$.

4. СИНТЕЗ И УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СТРУКТУРОЙ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Как уже отмечено, одна из наших главных задач заключается в синтезе и оптимальном управлении организационной структурой (или просто организацией) больших систем. Под организациями понимаем, вообще говоря, систему, составленную из динамических управляемых процессов и управляющих устройств, которые сотрудничают, используя линии связи и транспорта, для достижения общей цели с минимальной затратой ресурсов или, если ресурсы ограничены, для достижения максимального выходного эффекта.

Поскольку реализация процессов управления (включая связь и транспорт) поглощает ресурсы, хорошая организация должна обеспечить необходимое согласование управляющих устройств и средств связи с производственными процессами. Нашей первой задачей будет поэтому найти аналитические зависимости между показателями качества процессов и затрат, вводимых системой связи, и результирующим качеством организационной системы. При этом мы будем следовать эвристическому подходу,

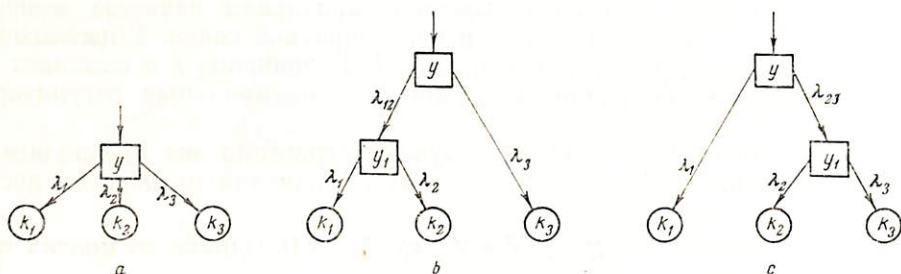


Рис. 6

начиная с простых систем, для которых XOY выражаются функциями типа (12). Иначе говоря, предполагаем, что каждый динамический оптимально управляемый процесс P_i вполне описан при помощи показателя качества k_i . Чем меньше k_i , тем лучше динамические свойства процесса. (Если, например, XOY задана в виде (7), т. е. $ET^3Y^{-2} = 3/4a = k^2$, то чем меньше k , тем меньше будет E , (T) при заданном T , Y , (E , Y) и тем больше будет Y при заданных E и T .) Как уже отмечено, кроме производственных затрат в рассматриваемых процессах, следует учитывать затраты ресурсов на связь и транспорт, и в том числе затраты энергии в электрической сети, временные затраты между отдельными операциями, расходы, связанные с работой управляющих устройств, и т. п. Результатом этих затрат, согласно формуле (20), является умножение показателей k_i на коэффициенты затрат $\lambda_i \geq 1$. Используя формулу (20), можно вычислить показатель качества для сложной иерархической структуры с заданными показателями λ_i , k_i , $i = 1, 2, \dots, n$. В качестве примера вычислим результирующие показатели качества k_a , k_b , k_c для трех различных иерархических организаций, представленных на рис. 6 (a, b, c), где кружками обозначены процессы, а прямоугольниками — управляющие устройства.

Используя обозначения затрат, указанные на рис. 6, мы получаем соответственно:

$$k_a = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3, \quad (24)$$

$$k_b = (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \lambda_{12} + \lambda_3 k_3, \quad (25)$$

$$k_c = \lambda_1 k_1 + (\lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3) \lambda_{23}. \quad (26)$$

Будем предполагать далее, что управляющее устройство высшего уровня может путем так называемой реорганизации изменять организационную структуру (например, взаимное соединение процессов и средств транспорта) подчиненных ему подсистем и процессов. Тогда, сравнивая различные показатели качества, соответствующие полученным структурам, оно может определить наиболее выгодную структуру, которая обладает минимальным результирующим показателем качества.

Организацию будем называть оптимальной, если нет допустимой реорганизации, которая уменьшает соответствующий этой организации пока-

затель качества. Конечно, метод исследования различных структур может оказаться слишком трудоемким в сложных системах. Поэтому мы заинтересованы в общих критериях, позволяющих сократить количество различных вариантов структур. Один из таких критериев касается случая оптимального назначения затрат (т. е. индексов во множестве $\{l_i\}_1^n$) к заданному упорядоченному множеству $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ таким обра-

зом, чтобы результирующий показатель $k = \sum_{i=1}^n l_i k_i$ достиг своего мини-

мума. Этот критерий сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Процесс оптимального назначения в организации, составленной из процессов $\{k_i\}_1^n$ и затрат $\{l_i\}_1^n$, будет оптимальным, если*

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n, \quad (27)$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n. \quad (28)$$

Эти условия будут также необходимы, когда имеются строгие неравенства в (27) и (28).

Доказательство. Справедливость теоремы для $n = 2$ очевидна. Для доказательства воспользуемся индукцией. Предположим, что теорема справедлива для $n = m$ и докажем ее для $m + 1$.

Рассмотрим два множества:

$$k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_v \leq \dots \leq k_m \leq k_{m+1},$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_v \geq \dots \geq l_m \geq l_{m+1}$$

и разность следующих выражений:

$$k_1 l_1 + \dots + k_{v-1} l_{v-1} + k_v l_v + k_{v+1} l_{v+1} + \dots + k_{m+1} l_{m+1}, \quad (29)$$

$$k_1 l_1 + \dots + k_{v-1} l_{v-1} + k_v l_{m+1} + k_{v+1} l_{v+1} + \dots + k_{m+1} l_v, \quad (30)$$

которая равна:

$$k_v (l_v - l_{m+1}) + k_{m+1} (l_{m+1} - l_v) = (k_v - k_{m+1}) (l_v - l_{m+1}) \leq 0, \\ v = 1, \dots, m + 1.$$

Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{m+1} k_i l_i$ не больше, чем произвольное значение

$$\sum_{i,j} k_i l_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство необходимости в случае строгих неравенств вытекает немедленно, когда допустим, что (29) меньше (30). Тогда $(k_v - k_{m+1}) \cdot (l_v - l_{m+1}) < 0$ и $l_v > l_{m+1}$, $v = 1, 2, \dots, m$.

Пример 1. Рассмотрим системы b, c из рис. 6 и предположим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda > 1$. Тогда на основании (25), (26) имеем: $l_1 = \lambda^2$, $l_2 = \lambda^2$, $l_3 = \lambda$ в случае системы b , $l_1 = \lambda$, $l_2 = \lambda^2$, $l_3 = \lambda^2$ в случае системы c .

Поскольку в случае организации b $l_1 = l_2 > l_3$, эта организация будет оптимальной, если $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Ясно также, что организация c (рис. 6, c) будет оптимальной, если $k_1 \geq k_2 \geq k_3$. Когда $\lambda = 1$, обе организации эквивалентны.

Остается еще выяснить, когда системы типа b, c лучше системы (рис. 6, a), использующей одно управляющее устройство. Для этого предположим, что коэффициенты затрат l_i являются растущей функцией количества (n_i) оптимизируемых процессов, т. е. $l_i(n_i)$, при условии, что общее количество процессов $\sum_i n_i = n^2$ задано. Это предположение обос-

новывается известным фактом, что увеличение количества управляемых процессов при ограниченных вычислительных способностях управляющего устройства ведет к ухудшению процесса управления и в конечном счете — к увеличению затрат.

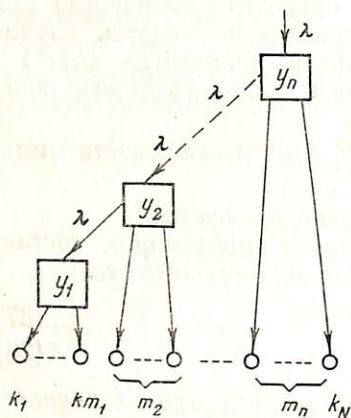


Рис. 7

Предположим, для упрощения задачи, что все показатели качества процессов $k_i = k$, $i = 1, 2, \dots, n^2$. Тогда для одноуровневой организации результирующие затраты будут $l_I = n^2 l(n^2)$. Для двухуровневой организации получаем соответственно $l_{II} = n^2 [l(n)]^2$. Нетрудно теперь показать, что если $l(n)$ растет с увеличением n , существует такое $n = n_0$, что $l_{II} < l_I$. В качестве примера возьмем $l(n) = 1 + \delta n$. Тогда $l_I(n) = n^2(1 + \delta n^2) > l_{II}(n) = n^2[1 + \delta n]^2$, когда $n > 2 / (1 - \delta)$.

Вопрос определения оптимального количества уровней для заданных функций затрат и показателей качества в общем случае является довольно сложным. Если, однако, на управляющие устройства наложены ограничения, касающиеся количества процессов, которыми они могут управлять, а также заданы множества $\{\lambda_i\}$, $\{k_i\}$, вопрос синтеза многоуровневой иерархической структуры решается сравнительно просто.

Пример 2. Предположим, что имеется n управляющих устройств y_i и N процессов с заданными $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_N$. Все коэффициенты затрат равны $\lambda > 1$. Максимальные количества процессов, которыми могут управ-

лять y_i , пусть будут $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$, $\sum_{i=1}^n m_i = N$. Кроме того, предположим, что y_i могут управлять одной подсистемой. Приступая к реше-

нию задачи, заметим прежде всего, что числа $k_i = \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} k_j$ удовлетворяют условию $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ и что все возможные затраты в различных организациях принимают вид $\lambda_0^h k = 1, 2, \dots, n$. Оптимальной, согласно теореме I, является иерархическая организация, представленная на рис. 7. Действительно, заметим, что

$$k = \sum_{i=1}^n k_i l_i, \quad l_i = \lambda^{n-i+1}, \quad l_1 > l_2, \dots, > l_n > 1.$$

В работе [9] рассмотрен ряд других примеров синтеза организации и некоторые обобщения. Следует заметить, что для получения оптимальных результатов структура системы должна перестраиваться, когда изменяются значения параметров k_i , l_i .

Значения этих параметров могут изменяться за счет изменений процессов и затрат, а также в случае, когда ХОУ изменяют свои параметры и при переходе в новую область аппроксимации. В этом последнем случае организационная структура зависит от объема ресурсов.

Рассматриваемые методы синтеза можно применять также к ХОУ типа (16), (18), хотя в этих случаях они более сложны [9].

5. СИСТЕМЫ КООПЕРАЦИОННОГО ТИПА И УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

Кроме систем с иерархической структурой, которые мы изучали до сих пор, известны системы, называемые здесь кооперационными, в которых выход, получаемый в одной из подсистем, используется в качестве входа в других подсистемах. Рассмотрим некоторые структуры кооперационного типа.

Один из распространенных классов таких систем характеризуется тем, что имеется n процессов Π_i , в которых управляемые ресурсы $B_i, C_i, \dots, Z_i$ и выходы A_i связаны соотношением $A_i = F_i(B_i, C_i, \dots, Z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Кроме того, каждый процесс Π_i использует часть выхода A_j , $j = 1, 2, \dots, n$, выражаемую суммой заданных функций от $B_i, C_i, \dots, Z_i$:

$$\sum_{i=1}^n f_{ij}(B_i, C_i, \dots, Z_i).$$

Результирующий выход системы j получается равным

$$A_j' = A_j - \sum_{i=1}^n f_{ij}(B_i, C_i, \dots, Z_i).$$

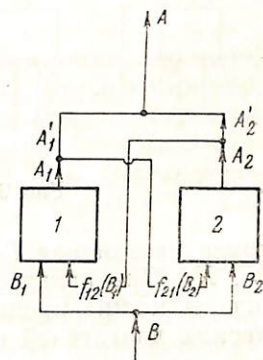


Рис. 8

Пример такой системы для $n = 2$ и одного управляемого ресурса B показан на рис. 8.

Выход A агрегированной системы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^n A_j' = \sum_{i=1}^n \left[F_i(B_i, C_i, \dots, Z_i) - \sum_{j=1}^n f_{ij}(B_i, C_i, \dots, Z_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n F_i^*(B_i, C_i, \dots, Z_i). \end{aligned}$$

Предполагая, что F_i^* удовлетворяют всем требованиям, накладываемым на XOY , нетрудно заметить, что вопрос агрегации и оптимизации в рассматриваемом случае сводится к известному уже случаю, но с XOY вида:

$$F_i^*(B_i, C_i, \dots, Z_i) = F_i(B_i, C_i, \dots, Z_i) - \sum_{j=1}^n f_{ij}(B_i, C_i, \dots, Z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Другой широкий класс кооперационных систем характеризуется тем, что некоторые из подсистем (Π_i) производят определенные части ресурсов для других подсистем (Π_j , $j \neq i$). При этом Π_j потребляют продукцию систем Π_i . Простым примером кооперации такого типа является работа системы, составленной из гидроэлектростанций и насосных станций с резервуарами воды. В этой системе во время малого внешнего потребления электроэнергии ГЭС поставляют энергию к насосным станциям, которые перекачивают воду к расположенным выше резервуарам. Затем, во время, когда потребление энергии во внешней сети возрастает, вода из резервуаров используется для производства энергии в ГЭС. В системе такого типа существенно определение условий, гарантирующих отдачу энергии во внешнюю сеть при заданных притоках воды к резервуарам.

В качестве второго примера рассмотрим идеализированную систему, в которой кооперируют три отрасли: угольные шахты, электростанции и источник труда. Каждая из этих отраслей может иметь сложную иерархиче-

скую структуру, в агрегированном виде представленную на рис. 9. Угольные шахты производят X_1 (m) угля, потребляя при этом E_1 ($квч$) электроэнергии и T_1 (человекочасов) труда. Электростанции производят E_2 ($квч$) энергии, потребляя X_2 (m) угля и T_2 (человекочасов) труда. Источник

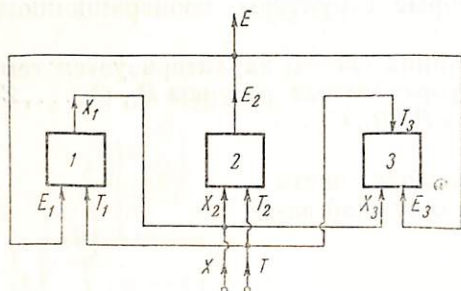


Рис. 9

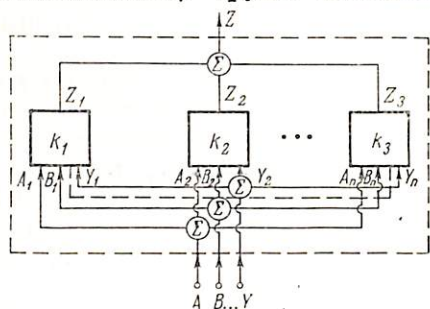


Рис. 10

труда предоставляет T_3 (человекочасов) труда за счет полученных ресурсов E_3 , X_3 . Предполагаем, что XOY для этих систем заданы. Для угольной шахты можно предположить, что уголь добывается при помощи электрических двигателей с XOY типа (8), и, следовательно, XOY агрегированной системы (ввиду известных свойств агрегации) равна $X_1 = k_1 E_1^{1/2} T_1^{3/2}$, k_1 — заданный коэффициент.

Характеристики $E_2 = F_2[X_2, T_2]$, $T_3 = F_3[X_3, E_3]$ для электростанции и источника труда предполагаются известными монотонными растущими функциями соответствующих аргументов.

Одной из интересных задач является определение условий, при которых один (или несколько) из агрегированных ресурсов (например, X) производится за счет потребления остальных ресурсов (т. е. E , T) с заданными коэффициентами внутреннего распределения $l_i = E_i / E$, $t_i = T_i / T$, $i = 1, 2$. Рассмотрим эту задачу для общего, многомерного случая с ресурсами $A, B, \dots, Z$ типа (12). Система такого типа представлена на рис. 10.

В качестве агрегированного выхода системы здесь принято

$$Z = \sum_{i=1}^n \delta_i Z_i = \sum_{i=1}^n \delta_i (k_i^q A_i^{-\alpha} B_i^{-\beta} \dots Y_i^{-\psi})^{1/\omega} =$$

$$= (A^{-\alpha} B^{-\beta} \dots Y^{-\psi})^{1/\omega} \sum_{i=1}^n \delta_i (k_i^q a_i^{-\alpha} b_i^{-\beta} \dots y_i^{-\psi})^{1/\omega}, \quad (31)$$

где $\delta_i = +1$, когда Z_i производится в подсистеме i , $\delta_i = -1$, когда Z_i потребляется в подсистеме i ,

$$a_i = \frac{A_i}{A}, \quad b_i = \frac{B_i}{B}, \quad \dots \quad y_i = \frac{Y_i}{Y}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для XOY агрегированной системы получаем из (31)

$$A^\alpha B^\beta \dots Z^\omega = k^q,$$

где

$$k^q = \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_i (k_i^q a_i^{-\alpha} b_i^{-\beta} \dots y_i^{-\psi})^{1/\omega} \right\}^\omega. \quad (32)$$

Условие производства (положительности Z) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^n \delta_i (k_i^q a_i^{-\alpha} b_i^{-\beta} \dots y_i^{-\psi})^{1/\omega} > 0.$$

Заметим, что условия материального баланса для материальных ресурсов требуют, чтобы

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n b_i = 1, \dots, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 1, \quad (33)$$

причем для ресурсов, которые втекают в узел суммирования, придаем знак минус, а для ресурсов, истекающих из узла, — плюс. Если, например, $n = 2$ и подсистема 1 производит ресурс Z_1 , который частично потребляется в подсистеме 2, причем система 2 производит ресурс A_2 , который совместно с A потребляется в системе 1, получаем: $a_1 = 1 + a_2$. Затем условие производства ($Z > 0$) сводится к $(a_1^{-\alpha} k_1)^{1/\omega} > (a_2^{-\alpha} k_2)^{1/\omega}$ или $k_1 / k_2 > (a_1 / a_2)^\omega$.

Аналогично можно вывести условие производства для остальных ресурсов. Заметим, что за счет кооперации можно изменять общее количество ресурсов $A, B, \dots, Z$ на определенном уровне иерархической системы, а также уменьшать значение показателя k , который в чисто иерархических системах может лишь возрастать после каждой агрегации. Если время играет роль ресурсов, то некоторые операции могут быть выполнены за одно и то же время T_i . Если $T_i = T$, то в (32) следует положить $t_i = T_i / T = 1$.

Заметим также, что формулы легко обобщаются на случай характеристик типа (18).

Остается еще выяснить вопрос условий равновесия в замкнутой системе, в которой значения агрегированных внешних ресурсов (таких, как $A, B, \dots, Z$ в системе рис. 10) равны нулю. Предположим, что имеется n подсистем, каждая из которых производит один из n ресурсов $A, B, \dots, Z$ и распределяет их в заданных пропорциях между остальными подсистемами. Считая $ХОУ$ подсистем заданными, следует определить условия существования равновесного решения, а также найти это решение. Ответ на поставленный вопрос в случае $ХОУ$ типа (10) дает следующая теорема.

Теорема II. Пусть заданы n подсистем с n видами ресурсов $A, B, \dots, Z$, которые описываются $ХОУ$ в виде:

$$A_i^{\alpha_i} B_i^{\beta_i} \dots Z_i^{\omega_i} = k_i^q, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

причем:

$$1) \quad A_i / A_1 = a_i, \quad B_i / B_1 = b_i, \dots, Z_i / Z_1 = z_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (35)$$

— положительные заданные числа

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, \dots, \omega_1 \\ \alpha_2, \beta_2, \dots, \omega_2 \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_n, \beta_n, \dots, \omega_n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (36)$$

Тогда существует единственное, равновесное решение

$$A_1 = e^a, \quad B_1 = e^b, \dots, Z_1 = e^z,$$

где $a, b, \dots, z$ являются решением системы линейных уравнений с n неизвестными:

$$\alpha_i a + \beta_i b + \dots + \omega_i z = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_1 = b_1 = \dots = z_1 = 1, \quad k_i = \ln k_i^q a_i^{-\alpha_i} b_i^{-\beta_i} \dots z_i^{-\omega_i}.$$

Доказательство. Используя соотношения (35), уравнения (34) можно переписать в виде

$$A_1^{\alpha_i} B_1^{\beta_i} \dots Z_1^{\omega_i} = k_i^{\alpha_i} a_i^{-\alpha_i} b_i^{-\beta_i} z_i^{-\omega_i}. \quad (37)$$

Вводя обозначения $a = \ln A_1$, $b = \ln B_1, \dots, z = \ln Z_1$ и логарифмируя уравнение (37), получаем систему уравнений

$$\alpha_i a + \beta_i b + \dots + \omega_i z = \ln k_i^{\alpha_i} a_i^{-\alpha_i} b_i^{-\beta_i} \dots z_i^{-\omega_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

На основании (36) можно сделать заключение, что имеется единственное решение этой системы относительно $a, b, \dots, z$. Переменные $A_1, B_1, \dots, Z_1$, а также $A_i, B_i, \dots, Z_i$, определяемые из условий (35), положительны.

Заметим, что доказанную теорему можно обобщить на случай $ХОУ$ типа (18). Заметим также, что существование равновесного состояния можно доказать для более общего класса $ХОУ$, хотя эффективное определение распределений ресурсов в равновесном состоянии может быть достаточно трудной задачей. Укажем здесь только на один результат, в котором используется параметрическое выражение (1) для $ХОУ$ заданных подсистем с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Как уже отмечено, параметры λ_i можно интерпретировать как цены ресурсов, которые производятся или потребляются в подсистемах.

Значение соответствующих функционалов (1) можно тогда истолковать как спрос и предложение ресурсов, потребляемых и производимых в подсистемах. Поэтому в рассматриваемой нами системе, составленной из подсистем, будем предполагать существование функций предложения $\Phi_{ij}(\lambda)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ ($\Phi_{ij}(\lambda)$ представляет собой количество ресурсов, предлагаемых подсистемой i подсистеме j при ценах, определенных вектором $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$) и функции спроса $F_{ij}(\lambda)$ (представляющей количество ресурсов j , на которое предъявляет спрос подсистема i). Предположим также, что каждая подсистема затрачивает весь свой доход на покупку ресурсов из других подсистем, что означает:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_i \Phi_{ij}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F_{ij}(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (38)$$

($\Phi_{ii}(\lambda), F_{ii}(\lambda)$ предполагаются равными нулю).

Равновесие между спросом и предложением состоит в том, чтобы

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{ij}(\lambda) \geq \sum_{i=1}^n F_{ij}(\lambda). \quad (39)$$

Можно показать (см., например, [14, стр. 324]), что если $\Phi_{ij}(\lambda), F_{ij}(\lambda)$ — неотрицательные непрерывные функции, такие, что (38) выпол-

няется для всех λ и $\sum_{i=1}^n \Phi_{ij}(\lambda) > 0$ для всех j , то существует такой неотрицательный вектор $\lambda^* \equiv (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$, что (39) удовлетворяется и, кроме того,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \sum_{i=1}^n [\Phi_{ij}(\lambda^*) - F_{ij}(\lambda^*)] = 0.$$

Последнее равенство обозначает, что если для некоторого j

$$\sum_{i=1}^n [\Phi_{ij}(\lambda^*) - F_{ij}(\lambda^*)] > 0, \text{ то } \lambda_j^* = 0.$$

6. АДАПТИВНЫЕ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор мы предполагали, что исследуемые нами модели больших систем детерминированы и стационарны во времени. Однако эти предположения не всегда бывают оправданы. Прежде всего, параметры $ХОУ$ динамических процессов могут изменяться непредвиденным образом (например, в случае $ХОУ$ вида (7) может изменяться нагрузка двигателя, т. е. параметр a , когда он работает в угольной шахте). Кроме того, коэффициенты затрат будут, вообще говоря, стохастически изменяться во времени за счет изменений средств и условий работы транспорта и т. п.

Оптимальное управление в системе такого типа усложняется. Во-первых, следует значения всех функционалов, связанных с динамической оптимизацией подсистем, а также параметры $ХОУ$ понимать в смысле математических ожиданий. Нужно также проводить наблюдения за поведением системы в прошлом, чтобы накопить информацию о неизвестных параметрах $ХОУ$ и использовать эту информацию в качестве априорной информации при оптимизации в будущем. Поскольку процесс накопления информации проводится во время управления, системы такого типа называют адаптивными. Процесс наблюдений или так называемой идентификации не должен, однако, длиться долгое время, так как в процессе идентификации нельзя управлять системой оптимальным образом. С другой стороны, качество управления зависит от количества информации о параметрах процесса, которое увеличивается вместе с периодом идентификации. Отсюда видно, что для определения оптимальной стратегии управления следует установить рациональный компромисс между продолжительностью процесса идентификации и процесса управления системой. Ответ на этот вопрос дает теория решающих функций и основанная на ней теория дуального управления, разработанная применительно к простым системам управления [15]. Метод дуального управления применим и для оптимизации больших систем. Применительно к иерархической структуре, показанной на рис. 2, с $ХОУ$ типа (12) процесс адаптивной оптимизации происходит следующим образом. Управляющее устройство y обладает некоторыми ресурсами $A_t, B_t, \dots$ и разделяет их в очередные интервалы времени $t = 1, 2, \dots$ (на основе имеющихся оценок показателей k_i, t) на части $A_{i,t}, B_{i,t}, \dots, i = 1, 2, \dots, n$ таким образом, чтобы ожидаемое значение выхода

$$M\{Z_t\} = \sum_{i=1}^n M\{Z_{it}\}$$

было максимальным. Допустим, что после каждого интервала t измеряются действительно произведенные количества $Z_{i,t}$, а затем определяются соответствующие значения $k_{i,t} = [A_{i,t}^\alpha B_{i,t}^\beta, \dots, Z_{i,t}^\omega]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Выведенные значения $k_{i,t}$ для очередных значений t представляют собой значения случайной величины k_i и могут быть использованы для определения следующих оценок $\tilde{k}_{i,t+1}$ для $t+1$ интервала управления. Для определения $\tilde{k}_{i,t+1}$ на основе известных $k_{i,t}, k_{i,t-1}, \dots, k_{i,t-N}$ (N — заданное число) может применяться процедура Байеса.

В общем случае $ХОУ$ реализация адаптивного процесса такого типа может оказаться слишком сложной. Тогда можно применить ряд других упро-

ценных приемов, известных из теории адаптивного управления. Для иерархических систем можно, например, пользоваться методом случайного поиска с применением следящей модели системы [16]. В этом методе управление имеет случайный характер, причем закон распределения вероятностей для управляемых ресурсов рассчитывается на основе уравнений модели системы, которая постепенно перестраивается в ходе наблюдений.

Следует заметить, что в адаптивных иерархических системах процесс оптимизации может, вообще говоря, сопровождаться процессом реорганизации структуры, соответствующей изменению XOY . Изучение сходимости такого процесса и стабилизации структуры является в общем случае нелегкой теоретической задачей. Только для небольших изменений XOY , которые измеряются дисперсией параметров, можно в некоторых простых случаях доказать сходимость процессов управления.

Кроме случайных изменений, многим большим системам присуще свойство структурного развития или эволюции. Оно обычно связано с научным и техническим прогрессом, специализацией и расширением ассортимента продукции и т. п. и проявляется в увеличении количества уровней и ветвей иерархической структуры, а также в установлении новых кооперационных связей. Процесс эволюции больших систем тесно связан с инвестиционной политикой управляющих устройств. Можно, например, предположить, что инвестиции на некотором уровне иерархической системы определяются некоторой монотонной растущей функцией $I(Z)$ дохода Z , получаемого на этом (или высшем) уровне, и что известна некоторая функция $K = \varphi(I)$, выражающая изменение показателей качества подсистем в зависимости от объема инвестиций. При заданном доходе задача состоит в выборе определенных процессов (рассматриваемых вместе с линиями транспорта), которые должны быть подвержены процессам инвестиций для максимального увеличения результирующего показателя качества. В случае систем с XOY типа (12) можно при этом воспользоваться зависимостью

$$\frac{dK}{K} = \frac{k_j l_j}{\sum_{i=1}^n k_i l_i} \cdot \frac{dk_j}{k_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

которая следует из (20) и определяет чувствительность изменения результирующего показателя качества в зависимости от изменения показателей качества подсистем.

Отметим также, что процесс эволюции будет сопровождаться процессом реорганизации системы.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемая в данной работе теория больших систем обладает рядом преимуществ, хотя к настоящему моменту в ней есть и некоторые пробелы. Перечислим коротко некоторые из них.

1. Описанная модель может содержать произвольное количество линейных и нелинейных динамических процессов, которые подчиняются соответствующим управляющим устройствам согласно иерархическому принципу, а также кооперируются между собой. При этом каждое управляющее устройство имеет дело с точно определенным количеством информации, зависящим только от точности аппроксимации XOY подсистем, а не от общего количества подчиненных процессов.

2. Во многих случаях качество сложной иерархической структуры можно оценить на основе легко вычисляемых зависимостей, которые учитывают качество процессов и затраты в подсистемах, линиях связи и транспорте.

При этом легко оценить влияние организационных мероприятий на качество системы, а также можно решить вопрос синтеза оптимальной организации и управления структурой этой организации.

3. Процесс оптимизации сложной системы благодаря децентрализации, свойственной иерархической структуре, значительно упрощается (ибо распределение ресурсов между подсистемами вычисляется на основании линейных зависимостей). В этом случае можно применить простые аналоговые устройства, которые будут автоматически решать линейные уравнения (17). Кроме того, аналоговые модели облегчают исследования других вопросов (например, вопроса синтеза структуры организации).

4. В рассмотренных моделях можно учесть процессы адаптивного и эволюционного характера, связанные с техническим прогрессом и инвестициями, т. е. с развитием и постройкой новых систем, а также с износом и заменой оборудования.

5. К пробелам предлагаемой теории следует, в частности, отнести: а) отсутствие полного «словаря» ХОУ для сложных производственных процессов; б) трудности, связанные с аппроксимацией многомерных ХОУ; в) трудности, связанные с агрегацией процессов с динамическими связями между процессами и с учетом ограничений, которые часто встречаются в производственных процессах; г) трудности, связанные с агрегацией целей, выраженных различными техническими и экономическими показателями и критериями; д) необходимость учета в сложных организациях нелинейных эффектов.

Для преодоления этих затруднений необходимы дальнейшие исследования в теории больших систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Danzig and P. Wolfe. Operat. Res., 1960, v. 8, № 1.
2. Е. Г. Гольштейн. Экономика и математические методы, 1966, т. II, вып. 1.
3. I. B. Rosen. Convex Partition Programming. In Recent Advances in Math. Programming Ed. by R. L. Groves, P. Wolfe, McGraw Hill, N. Y., 1963.
4. C. B. Brosilov, L. S. Lasdon, I. D. Pearson, O. Macko, Y. Takahara. Papers on Multi-level Control Systems. Case Inst. Technol., Systems Research Center, SRC — 70 — A — 65 — 25, 1965.
5. R. Kulikowski. Arch. Automat. i Telemechan., 1966, v. XI, № 2.
6. R. Kulikowski. Optimum Control of Aggregated Multi-level Systems. Proc. III IFAC Congr. London, 1966.
7. R. Kulikowski. Optimum Control of Multi-dimensional and Multi-level Systems. In Advances in Control Theory. Ed. by C. Leondes, Acad. Press Inc., N. Y., 1966.
8. R. Kulikowski. Arch. Automat. i Telemechan., 1966, v. XI, № 3.
9. R. Kulikowski. Arch. Automat. i Telemechan., 1967, v. XII, № 4.
10. R. Kulikowski. Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej. PWN, Warszawa, 1965. (Изд-во «Наука» готовит русский перевод книги).
11. R. Kulikowski. Arch. Automat. i Telemechan., 1967, v. XII, № 1.
12. G. Hadley. Nonlinear and Dynamic Programming. Reading Mass., Addison — Wesley, 1964, p. XI.
13. T. G. Koopmans. Allocation of Resources and the Price System. McGraw Hill, N. Y., 1957 (раздел «Three Essays of the State of Economic Science»).
14. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
15. А. А. Фельдбаум. Теория дуального управления. Автоматика и телемеханика, 1960—1961 (в 4 частях).
16. R. Kulikowski. Adaptacyjna optymalizacja wielkich systemow o hierarchicznej strukturze sterowania. Arch. Automat. i Telemechan., 1964, v. IX, № 4.
17. J. Wołodarski. Urządzenie do optymalnego rozdziału resursów. Prace Inst. Automat., 1967, № 63.

Поступила в редакцию
24 IV 1967