

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ СКВАЖИН НА ЭКСПЛУАТИРУЕМОМ УЧАСТКЕ МЕСТОРОЖДЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

С. С. БОНДАРЕНКО, Н. А. ПЛОТНИКОВ, С. В. ТЕМКО,
Г. Ц. ТУМАРКИН

(Москва)

При решении вопроса о наиболее эффективной организации и планировании добычи подземной воды возникает проблема выбора наиболее экономичного варианта размещения и эксплуатации промысла. Водозабор или промысел обычно состоит из системы скважин, водоподъемного оборудования, коммуникаций водопроводов, линий электроснабжения, дорог, линий автоматического управления и т. п.

Прежде всего рассматривается вопрос о выборе участка для оборудования промысла. Эта задача решается с учетом гидрогеологических показателей, географического и гипсометрического положения участка и др. Выбор участка для промысла и завода по переработке подземной воды является комплексной проблемой.

Сущность проблемы выбора наиболее экономичного варианта эксплуатации промысла заключается в нахождении оптимального размещения системы скважин на данном участке месторождения, которое отвечает основным целевым установкам разработки.

В настоящей работе приводятся математические модели эксплуатации месторождения для двух наиболее интересных случаев размещения системы скважин: 1) обеспечивается заданный общий планируемый дебит с минимальной себестоимостью добычи воды; 2) обеспечивается максимальный общий дебит при заданном уровне себестоимости.

Как отметила П. Я. Кочина, вторая задача представляет больший интерес для разработки нефтяных месторождений.

При некоторых упрощающих задачу предположениях, связанных с условиями использования насосного оборудования, проблема выбора наиболее экономичного варианта эксплуатации промысла приводится к решению соответствующих задач нелинейного программирования.

Данное исследование является общим для широкого круга вопросов организации и планирования работы промысла по добыче подземной воды в любых по сложности гидрогеологических условиях. Эти условия учитываются в соответствующих математических моделях через понижения уровней в скважинах. От понижения уровня зависят как функции цели задачи, так и ограничения на переменные. При такой постановке задачи оптимизации полученная схема размещения скважин должна показать, где и в каких точках данного участка месторождения находятся эксплуатационные скважины, каковы уровни понижения в них, какие типы насосного оборудования экономичнее всего использовать (здесь необходимо учитывать величину зоны притекания к скважинам) и каковы общие предпосылки для составления техпромфинплана промысла.

В ряде работ (например [1, 2]) для решения некоторых частных задач рассматриваемого типа использованы методы линейного программирования. Однако в общей постановке, которая приводится в настоящей работе, дан-

ная проблема нахождения оптимального варианта эксплуатации промысла еще не ставилась. Статья построена в основном на материалах работы группы сотрудников Геологоразведочного института под руководством Н. А. Плотникова и Г. Ц. Тумаркина (см. [3]). Кроме того, были использованы данные, приведенные в [4, 5], а также в [6, 7].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКСПЛУАТАЦИИ ВОДОЗАБОРА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Рассмотрим математическую постановку задачи о наиболее эффективном способе разработки месторождения при минимальной себестоимости добычи глубинной воды. При этом учтем влияние совокупности основных гидрогеологических и технико-экономических факторов на величину себестоимости буровых вод и на расположение системы скважин промысла для заданного типа насосного оборудования.

1. Основные условные обозначения. Обозначим через $Q_{пл}$ суммарный дебит всей системы скважин, заданный в соответствии с общим планом производства воды для данного участка месторождения подземных вод; $Q_{скв}$ — дебит отдельной скважины, который принимается одинаковым для всех скважин промысла (зависит от конкретного типа насосного оборудования); T — расчетный срок эксплуатации (период работы системы скважин); S — площадь данного разведанного участка месторождения подземных вод; $S_{эк}$ — площадь расположения эксплуатационных скважин; γ — удельный вес пластовых вод; μ — динамический коэффициент вязкости подземных вод; $k_{п}$ — коэффициент проницаемости водоносных отложений; m — мощность водоносного пласта или горизонта; κ — коэффициент пьезопроводности пород; $h_{пр}$ — предельное понижение уровня в скважинах к концу срока их эксплуатации T (определяется гидрогеологическими условиями и зависит от типа насосного оборудования); N — общее число кольцевых батарей скважин водозабора (в случае кольцевого расположения скважин); n_k — число скважин на k -м кольце; r_k — радиус окружности k -го кольца; Δp_k — понижение давления в скважинах k -го кольца; h_k — понижение уровня в скважинах k -го кольца; r_c — радиус отдельной скважины; n — общее число скважин данного промысла; k — номер кольцевой батареи скважин ($k = 1, 2, \dots, N$); i — номер скважины ($i = 1, 2, \dots, n$); c_{k1} — стоимость отдельной скважины; c_{k2} — стоимость отдельной насосной установки, включая ее обслуживание при эксплуатации; c_{kt} — стоимость погонного метра труб данного диаметра; η_1 — коэффициент, соответствующий нормам отчислений на амортизацию и текущий ремонт скважин; η_2 — коэффициент, отвечающий нормам отчислений на амортизацию и текущий ремонт насосного оборудования; η_t — коэффициент, соответствующий нормам отчислений на амортизацию и текущий ремонт трубопроводов; F — себестоимость добычи 1 м^3 подземной воды; G — общие капиталовложения в оборудование и сооружения промысла; $F_{ам}$ — амортизационные отчисления на 1 м^3 добытой воды; $F_{под}$ — расходы на водоподъем по скважине 1 м^3 воды; $F_{пр}$ — прочие расходы на 1 м^3 воды; H_i — усредненное по времени понижение уровня в i -й скважине.

2. Некоторые соотношения между параметрами разработки. Общее количество скважин n при одинаковом дебите отдельной скважины $Q_{скв}$ и заданном общем планируемом дебите $Q_{пл}$ составляет:

$$n = Q_{пл} / Q_{скв}. \quad (1)$$

При этом, если принята система кольцевых батарей скважин, очевидно, имеет место следующее соотношение:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_N = n. \quad (2)$$

Радиус наибольшего возможного кольца скважин, ограничивающий эксплуатируемую площадь (которая для простоты предполагается круговой), в силу справедливости неравенства $S_{\text{эк}} \leq S$ должен удовлетворять условию $r_N \leq \sqrt{S/\pi}$.

Изменение давления в скважине на k -м кольце Δp_k связано с понижением уровня h_k зависимостью:

$$\Delta p_k = \gamma h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Таким образом, понижение уровня h_k , $k = 1, 2, \dots, N$, является функцией параметра управления, т. е. переменных $r_1, r_2, \dots, r_N$; $n_1, n_2, \dots, n_N$ и времени t , через которые выражается изменение давления Δp_k в скважинах. Изменение давления Δp_k , $k = 1, 2, \dots, N$, находится в результате решения соответствующей граничной задачи и учитывает взаимное влияние скважин при их эксплуатации [4, 6–8].

3. О геометрии расположения скважин водозабора. Отметим, что нет каких-либо принципиальных ограничений на выбор геометрии расположения скважин на разведанном участке месторождения подземных вод. Например, может иметь место линейное, кольцевое или сеточное расположение. Не ограничивая общности, можно для простоты рассматривать водозабор как систему кольцевых батарей скважин.

Число колец скважин N , дебит отдельной скважины $Q_{\text{скв}}$, число скважин на каждом кольце n_k и радиусы кольцевых батарей r_k могут меняться. Число колец скважин N и дебит отдельной скважины $Q_{\text{скв}}$ в исходной задаче выбирается, исходя из качественных соображений с учетом данных, относящихся к использованному насосному оборудованию (которое должно выбираться в зависимости от гидрогеологических данных месторождения) и конструкции водозабора. При этом необходимо принять во внимание общее число скважин n , которое отвечает общему плану добычи воды $Q_{\text{пл}}$ и дебиту отдельной скважины $Q_{\text{скв}}$. Общий дебит водозабора $Q_{\text{пл}}$ устанавливается на основании утвержденных запасов и рассмотрения кондиций или нередко задают просто с учетом потребности в воде. Радиусы кольцевых батарей скважин r_k и число скважин n_k на каждом кольце получают в результате решения задачи о наиболее экономичном размещении скважин в соответствии с целевыми установками (в данном случае в соответствии с минимальными общими затратами). Окончательное число кольцевых батарей скважин N находят в результате решения задачи оптимизации.

4. Функция цели. Себестоимость и капиталовложения. Чтобы дать математическую формулировку для задачи нахождения оптимального варианта эксплуатации промысла, введем в рассмотрение функцию цели — показатель качества разработки [9, 10]. Функция цели данной задачи

$$F = F(r_1, r_2, \dots, r_N; n_1, n_2, \dots, n_N; t), \quad (4)$$

отвечающая себестоимости добычи и транспортировки по трубам к резервуарам предприятия 1 м^3 воды, определяется как сумма соответствующих затрат на водоподъем $F_{\text{под}}$, транспортировку по трубам воды $F_{\text{т}}$, на сооружение водозабора и обслуживание, которые учитываются через амортизационные отчисления $F_{\text{ам}}$, и прочие расходы $F_{\text{пр}}$, т. е.

$$F = F_{\text{под}} + F_{\text{ам}} + F_{\text{т}} + F_{\text{пр}}. \quad (5)$$

Стоимость водоподъема 1 м^3 глубинной воды на поверхность при высоте подъема h_k определяется следующим образом. Пусть $C(h_k)$ — стоимость подъема воды на поверхность за единицу времени работы скважин при фиксированных дебите отдельной скважины $Q_{\text{скв}}$ и способе откачки воды. Эта стоимость определяется в зависимости от типа используемого насосного оборудования, обеспечивающего заданный дебит скважины. Выбор системы

водоподъемников производится в соответствии с конструкцией водозабора и технологией добычи подземной воды. Окончательный выбор водоподъемников производится с учетом требований экономичности разработки и зоны притекания. За время dt стоимость водоподъема воды по скважине составляет $C(h_k)dt$, а стоимость ее подъема за весь период эксплуатации скважин k -го кольца оказывается равной

$$\int_0^T C(h_k) dt. \quad (6)$$

В случае однородного пласта понижение уровня во всех скважинах k -го кольца h_k должно быть одинаковым. Тогда расходы на водоподъем по n_k скважинам k -го кольца равны:

$$n_k \int_0^T C(h_k) dt. \quad (7)$$

Для неоднородного пласта стоимость подъема воды по n_k скважинам, расположенным на k -м кольце, выражается суммой вида:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \int_0^T C(h_i) dt.$$

Теперь для общей стоимости подъема воды на поверхность по всей системе скважин в течение всего периода эксплуатации T находим;

$$\sum_{k=1}^N n_k \int_0^T C(h_k) dt. \quad (8)$$

Себестоимость водоподъема 1 м³ глубинной воды составляет

$$F_{\text{под}} = \frac{1}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N n_k \int_0^T C(h_k) dt. \quad (9)$$

Таким образом, стоимость водоподъема при любом способе откачки воды зависит от понижения уровня в процессе эксплуатации и возрастает с увеличением периода эксплуатации T .

Необходимо найти, кроме стоимости откачки, величину амортизационных отчислений от капиталовложений в скважины, оборудование и сооружение водозабора.

Поскольку стоимость одной скважины на k -м кольце равна c_k , то стоимость n скважин этого кольца будет равна $n_k c_{k1}$, а их общая стоимость для всего промысла G_1 составит

$$G_1 = \sum_{k=1}^N n_k c_{k1}. \quad (10)$$

Общая стоимость скважин G_1 включает стоимость коммуникаций.

Расходы на амортизационные отчисления и текущий ремонт скважин F_1 составляют (в расчете на 1 м³ воды):

$$F_1 = \frac{\eta_1}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N n_k c_{k1}. \quad (11)$$

Аналогично, общие расходы на оборудование всех скважин промысла G_2 , с учетом обслуживания, оказываются равными

$$G_2 = \sum_{k=1}^N n_k c_{k_2}. \quad (12)$$

Амортизационные отчисления от капиталовложений на оборудование всех скважин F_2 равны:

$$F_2 = \frac{\eta_2}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N n_k c_{k_2}. \quad (13)$$

Расходы на сооружение сети трубопроводов в настоящей работе учитываются приближенно, поскольку геометрия сети трубопроводов определяется для каждого конкретного расположения скважин индивидуально и зависит от многих факторов, в том числе от радиусов колец r_k и количества скважин на каждом кольце n_k , дебита отдельной скважины $Q_{\text{скв}}$, площади их расположения $S_{\text{ок}}$, способа перекачки воды к потребителям, конструкции водозабора и т. п. Даже тогда, когда фиксированы расположение скважин и их дебиты, расчет сети трубопроводов представляет самостоятельную задачу [11]. (Для расчета сети трубопроводов в силу известных гидродинамических и электрических аналогий можно воспользоваться методами, которые используются при расчете линий электропередачи (см. [12].) Однако попытка точного учета расходов на транспортировку воды по трубам значительно усложняет рассмотрение задачи выбора оптимального варианта эксплуатации промысла. В том случае, когда число скважин n_k на каждом кольце достаточно велико, с целью учета лишь качественного влияния внешней сети трубопроводов на себестоимость добычи подземной воды и на капиталовложения, на сооружение и оборудование водозабора можно принять длину трубопроводов для k -го кольца, равной длине окружности с радиусом кольца r_k , т. е. $2\pi r_k$. В этом случае стоимость труб k -го кольца составит величину порядка $2\pi c_{\text{Тк}} r_k$, а общая стоимость всей сети трубопроводов $G_{\text{Т}}$ по порядку величины будет равна:

$$G_{\text{Т}} \sim 2\pi \sum_{k=1}^N c_{\text{Тк}} r_k. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что на уровне каждого кольца скважин трубы могут иметь различный диаметр, что учитывается через стоимость погонного метра труб $c_{\text{Тк}}$.

Амортизационные отчисления от капиталовложений на сооружение сети трубопроводов можно теперь принять равными

$$F_{\text{Т}} \sim \frac{2\pi\eta_{\text{Т}}}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N c_{\text{Тк}} r_k. \quad (15)$$

Общие капиталовложения в оборудование и сооружение промысла приближенно составят:

$$G = G_1 + G_2 + G_{\text{Т}} + G_{\text{пр}} \sim \sum_{k=1}^N n_k (c_{k_1} + c_{k_2}) + 2\pi \sum_{k=1}^N c_{\text{Тк}} r_k + G_{\text{пр}}. \quad (16)$$

Здесь $G_{\text{пр}}$ — величина всех прочих расходов.

Амортизационные отчисления от общих капиталовложений, приходя-

щиеся на 1 м^3 добытой воды, равны:

$$F_{\text{ам}} \simeq \frac{1}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N n_k (\eta_1 c_{k_1} + \eta_2 c_{k_2}) + \frac{2\pi\eta_T}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N c_{Tk} r_k. \quad (17)$$

Функция цели F , отвечающая себестоимости добычи 1 м^3 воды, равна сумме соответствующих расходов на водоподъем, амортизацию, текущий ремонт и пр., т. е.

$$F \simeq \frac{1}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N n_k \left[\int_0^T C(h_k) dt + \eta_1 c_{k_1} + \eta_2 c_{k_2} + c_{\text{пр}} \right] + \frac{2\pi\eta_T}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N c_{Tk} r_k. \quad (18)$$

Оценка вклада каждого слагаемого в общую себестоимость добытой воды показывает (см. [3]), что главный вклад вносится расходами на водоподъем.

5. Система ограничений на переменные. Ограничения на переменные данной задачи $r_1, r_2, \dots, r_N$; $n_1, n_2, \dots, n_N$ вытекают из принятой системы организации производства подземной воды посредством эксплуатации скважин.

Прежде всего отметим, что все возможные понижения уровня h_k , которые теоретически могут по абсолютной величине достигать величины напора, в действительности ограничены возможностями насосного оборудования, которое должно выбираться с учетом величины области притекания.

В соответствии с тем, что возможные понижения уровня в скважинах h_k в процессе эксплуатации не могут превышать величины предельно допустимого понижения $h_{\text{пр}}$, приходим к следующим ограничениям на понижения уровня

$$h_k \leq h_{\text{пр}}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

В систему ограничений необходимо включить условие на число скважин в кольцевых батареях:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_N = n. \quad (20)$$

(Это условие через общее число скважин n учитывает зависимость чисел скважин n_k от общего дебита $Q_{\text{пл}}$ и максимального дебита отдельной скважины $Q_{\text{скв}}$, который, в конечном счете, определяется способом эксплуатации и типом используемого насосного оборудования.)

Кроме того, в ограничения на переменные следует ввести условие, отвечающее максимально возможной площади расположения скважин промысла $r_N \leq \sqrt{S/\pi}$.

Радиусы окружностей кольцевых батарей скважин должны удовлетворять условию:

$$r_1 < r_2 < \dots < r_N. \quad (21)$$

Время t , входящее в качестве параметра через понижения уровней h_k , меняется в пределах:

$$0 \leq t \leq T. \quad (22)$$

По характеру рассматриваемой здесь проблемы организации и планирования производства по добыче подземной воды переменные r_k , n_k , очевидно, не могут принимать отрицательных значений, т. е.

$$r_k \geq 0; \quad n_k \geq 0; \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

6. Общая математическая формулировка проблемы выбора оптимального режима эксплуатации промысла с минимальными затратами. Математически проблема выбора наиболее экономичного режима эксплуатации

промысла сводится к задаче на условный экстремум и заключается в минимизации целевой функции

$$F \simeq \frac{1}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N n_k \left[\int_0^T C(h_k) dt + \eta_1 c_{k_1} + \eta_2 c_{k_2} + c_{k_{\text{пр}}} \right] + \frac{2\pi\eta_T}{Q_{\text{пл}}} \sum_{k=1}^N c_{T_k} r_k,$$

если переменные задачи $r_1, r_2, \dots, r_N; n_1, n_2, \dots, n_N$ не могут принимать отрицательных значений, т. е. $r_{ik} \geq 0, n_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, N$, и удовлетворяют следующей системе ограничений

$$h_k(r_1, r_2, \dots, r_N; n_1, n_2, \dots, n_N; T) \leq h_{\text{пр}},$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_N = n; r_N \leq \sqrt{S/\pi};$$

$$r_1 < r_2 < \dots < r_N; k = 1, 2, \dots, N.$$

Всего имеются $2N$ переменных, которые удовлетворяют системе $(2N + 1)$ ограничений. Это сложная вариационная задача [13], связанная с общей проблемой оптимальной организации и планирования работы промысла. Отметим, что в последнее время для решения вариационных задач такого типа Ф. Л. Черноусько [14] предложен метод локальных вариаций.

Приведенная здесь математическая модель эксплуатации промысла является общей для большого круга задач и применима при гидрогеологических условиях любой сложности. Последние в каждом конкретном случае месторождения подземных вод в данной математической модели учитываются посредством понижения уровней h_k в скважинах, которые входят как в функцию цели F , так и в систему ограничений на переменные r_k и n_k . Кроме того, гидрогеологические условия отражаются на месте расположения участка под промысел и на выборе конструкции водозабора. Выбор оптимального режима эксплуатации производится с учетом допустимых понижений уровня в водоносном пласте к концу срока эксплуатации T .

7. О задаче нелинейного программирования. В настоящей работе мы ограничились для простоты несложным случаем и свели данную общую задачу к решению задачи нелинейного программирования [10, 15]. Рассмотренная выше задача оптимизации приводится к задаче нелинейного программирования, если указать конкретный вид зависимости $C(h_k)$ от h_k в соответствии с выбранным насосным оборудованием. В этом случае, когда КПД насоса можно приближенно принять постоянным и не зависящим от глубины уровня от поверхности, достаточно ограничиться линейной зависимостью между $C(h_k)$ и h_k , т. е. принять

$$C(h_k) = ah_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

где a — параметр, определяемый характеристикой насоса *.

Предположим сначала, что расположение эксплуатационных скважин промысла является произвольным. Если общая площадь месторождения подземных вод очень велика по сравнению с площадью разведанного участка, то такое месторождение можно рассматривать бесконечно протяженным; тогда для понижения уровня в любой i -й скважине в случае однородного пласта при упругом режиме можно воспользоваться следующей хорошо известной формулой

$$h_i = \frac{\Delta p_i}{\gamma} = \frac{\mu Q_{\text{пл}}}{4\pi m k_{\text{п}} \gamma n} \left\{ \left[-E_i \left(-\frac{r_c^2}{4\kappa t} \right) \right] + \sum_{j=1}^{n-1} \left[-E_i \left(-\frac{r_{ij}^2}{4\kappa t} \right) \right] \right\};$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

* Для существующих в настоящее время типов насосов эта аппроксимация, по-видимому, более пригодна для эрлифтов. Однако этот вопрос требует особого рассмотрения.

где

$$E_i(-x) = - \int_0^{-x} (e^u/u) du;$$

r_{ij} — расстояние от скважины j до рассматриваемой i -й скважины.

Найдем усредненное по времени понижение уровня в i -й скважине промысла за время полного срока эксплуатации T :

$$H_i = \frac{1}{T} \int_0^T h_i dt. \quad (26)$$

Подставляя в (26) вместо h_i его выражение и проводя интегрирование по частям, находим:

$$H_i = \frac{\mu Q_{\text{пл}}}{4\pi m k_{\text{п}} \gamma n} \left\{ -E_i(-r_c^2/4\kappa T) (1 + r_c^2/4\kappa T) - e^{-r_c^2/4\kappa T} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left[-E_i\left(-\frac{r_{ij}^2}{4\kappa T}\right) \left(1 + \frac{r_{ij}^2}{4\kappa T}\right) - e^{-r_{ij}^2/4\kappa T} \right] \right\}. \quad (27)$$

Для дальнейших вычислений удобно перейти к безразмерным переменным. Пусть

$$x_{ij} = r_{ij}/r_0; \quad p = 4\kappa T/r_0; \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

где r_0 — характерный радиус, принятый за единицу измерения длины. Следуя Щелкачеву, в качестве r_0 можно принять радиус окружности «большого колодца». Однако удобнее за единицу длины выбрать радиус скважины r_c , т. е. считать $r_0 = r_c$.

В рассматриваемом случае очень большой продолжительности эксплуатации промысла ($T \sim 25$ лет) справедливо неравенство:

$$(S/4\pi\kappa T) < 1. \quad (29)$$

Введем теперь величину

$$\varepsilon = r_0^2/4\kappa T. \quad (30)$$

Так как $r_0 \ll \sqrt{S/\pi}$, то, подавно, $\varepsilon \ll 1$.

Разложим выражение для h_i при $t = T$ в ряд по степеням малого параметра ε . Ограничиваясь учетом членов разложения до второго порядка включительно, находим:

$$h_i(T) = \frac{\mu Q_{\text{пл}}}{4\pi m k_{\text{п}} \gamma n} \left\{ n \left[\ln p + 2 \ln \frac{r_0}{r_c} - C \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ln \frac{1}{x_{ij}^2} + \varepsilon x_{ij}^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} x_{ij}^4 \right) \right\} + O(\varepsilon^3), \quad (31)$$

где C — постоянная Эйлера, $C = 0,577215 \dots$

После аналогичных разложений H_i в ряд по степеням ε получим:

$$H_i = \frac{\mu Q_{\text{пл}}}{4\pi m k_{\text{п}} \gamma n} \left\{ n \left[\ln p + 2 \ln \frac{r_0}{r_c} - C - 1 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ln \frac{1}{x_{ij}^2} + 2\varepsilon x_{ij}^2 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 x_{ij}^4 \right) \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (32)$$

Вернемся теперь к исходному предположению о кольцевом характере расположения скважин водозабора. В этом случае для выполнения сум-

мирования по j от 1 до $(n-1)$ можно воспользоваться методом, предложенным В. Н. Щелкачевым [6, 7]. Опуская громоздкие выкладки, находим:

$$H_k = B - B_1 \left(\frac{1}{2} + \ln x_k + \sum_{j=k+1}^N y_j \ln \frac{x_j}{x_k} - \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{y_k} - \right. \\ \left. - \varepsilon \sum_{j=1}^N y_j [x_j^2 + x_k^2] + \frac{3}{8} \varepsilon^2 \sum_{j=1}^N y_j [(x_j^2 + x_k^2)^2 + 2x_j^2 x_k^2] \right); \quad (33)$$

$$h_k(T) = B - B_1 \left(\ln x_k + \sum_{j=k+1}^N y_j \ln \frac{x_j}{x_k} - \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{y_k} - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^N y_j (x_j^2 + x_k^2) + \frac{\varepsilon^2}{8} \sum_{j=1}^N y_j [(x_j^2 + x_k^2)^2 + 2x_j^2 x_k^2] \right); \quad (34)$$

где

$$B = \frac{\mu Q_{\text{пл}}}{4\pi m k_{\text{пл}} \gamma} \left\{ \ln p + 2 \ln \frac{r_0}{r_c} - C - \frac{2}{n} \ln n \right\}; \quad B_1 = 2 \frac{\mu Q_{\text{пл}}}{4\pi m k_{\text{пл}} \gamma};$$

$y_k = n_k/n$; $x_k = r_k/r_0$; $k = 1, 2, \dots, N$. (Оценка погрешности разложения дана в [4].)

Заметим, что сумма всех прочих неучтенных затрат, как показывает опыт эксплуатации действующих промыслов, составляет не более 10% от общих расходов. Таким образом, выражение для себестоимости добычи воды F записывается в виде:

$$F \simeq \sum_{k=1}^N y_k [A H_k(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N; T) + A_{1k}] + \sum_{k=1}^N A_{2k} x_k, \quad (35)$$

где $A = 1,1aT/Q_{\text{скв}}$; $A_{1k} = 1,1(\eta_1 c_{k1} + \eta_2 c_{k2})/Q_{\text{скв}}$; $A_{2k} = 2,2\pi\eta_{\text{тс}} k_{\text{тк}} r_0/Q_{\text{пл}}$.
Теперь требуется найти

$$\min F(x_1, \dots, x_N; y_1, \dots, y_N; T) \quad (36)$$

при выполнении следующих ограничений $x_k \geq 0$, $y_k \geq 0$ и

$$h_k = B - B_1 \left\{ \ln x_k + \sum_{j=k+1}^N y_j \ln \frac{x_j}{x_k} - \frac{1}{n} \ln \frac{x_k}{y_k} - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^N y_j (x_j^2 + x_k^2) + \frac{\varepsilon^2}{8} \sum_{j=1}^N y_j [(x_j^2 + x_k^2)^2 + 2x_j^2 x_k^2] \right\} \leq h_{\text{пр}}; \quad (37)$$

$y_1 + y_2 + \dots + y_N = 1$; $x_N \leq \sqrt{S/S_0}$; $x_1 < x_2 < \dots < x_N$; $k = 1, 2, \dots, N$, где $S_0 = \pi r_0^2$.

Это задача нелинейного программирования, отвечающая простейшим гидрогеологическим условиям разработки месторождения подземных вод. Однако решение такой задачи в математическом отношении достаточно трудоемко. Последнее обусловлено тем, что рассматриваемая задача нелинейного программирования даже в самом простейшем случае (см. [3]) не обладает свойствами, которые присущи задачам, допускающим решение хорошо известными методами оптимизации (см., например, [10, 15 ÷ ÷ 17]).

Для решения поставленной здесь задачи о наиболее эффективном режиме работы промысла по добыче подземной воды целесообразно воспользоваться методом статистических испытаний (методом Монте-Карло). Основным преимуществом статистического подхода к решению задач оптимизации является, как известно, его универсальность. Такой подход не требует никаких предположений относительно свойств функции цели F , которые присущи другим методам оптимизации.

Решение поставленной здесь задачи нелинейного программирования требует применения ЭВМ и дает информацию (в пределах избранной точности) о наиболее эффективном способе расположения скважин промысла для избранного насосного оборудования при фиксированной геометрии расположения скважин, т. е. дает значения переменных r_k , n_k и соответствующее значение себестоимости добычи 1 м³ воды, равное $\min F$.

Зная расположение скважин промысла, для данного типа насосного оборудования можно найти соответствующие понижения уровней в скважинах h_k ; $k = 1, 2, \dots, N$, полное понижение на конец срока эксплуатации, величину общих капиталовложений G , амортизационные отчисления $F_{ам}$ и другие экономические показатели (подобным же образом ставятся и решаются задачи при выборе других геометрий расположения скважин, например, линейных рядов скважин и т. д.).

В результате сравнения данных для различных видов оборудования при одинаковых гидрогеологических условиях с учетом тех факторов, которые оказались не включенными в рассмотренную здесь математическую модель работы промысла, представляется возможность выбрать наиболее эффективный план организации разработки по совокупности гидрогеологических и технико-экономических показателей, т. е. составить подробный техпромфинплан разработки месторождения подземных вод.

II. ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАПАСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

При известном уровне себестоимости добычи подземной воды F аналогично можно построить математическую модель для нахождения оптимальной величины эксплуатационных запасов $Q_{пл}$ при известных условиях разработки промысла. Для решения такой проблемы кроме уровня себестоимости F необходимо указать период разработки T , число скважин на данном участке n , площадь разведанного участка месторождения S и геометрию расположения скважин промысла. В случае кольцевого расположения скважин необходимо указать дополнительно общее число кольцевых батарей $N(N_1, N_2, \dots, N_L)$, которое в исходной математической модели должно быть фиксировано. Следует отметить, что общее число скважин, геометрия их расположения, величина себестоимости F и период работы T могут изменяться в зависимости от дополнительных требований к разработке промысла. Например, в случае нефтяного промысла необходимо обеспечить извлечение максимального количества нефти в минимальное время при минимально возможных расходах (см. [2]).

Теперь требуется найти максимум

$$Q_{пл} \simeq \frac{1}{F} \sum_{k=1}^N n_k \left[\int_0^T C(h_k) dt + \eta_1 c_{h_1} + \eta_2 c_{h_2} + c_{прк} \right] + \frac{2\pi\eta_T}{F} \sum_{k=1}^N c_{Тк} r_k; \quad (38)$$

если $r_k \geq 0$; $n_k \geq 0$;

$$h_k(r_1, r_2, \dots, r_N; n_1, n_2, \dots, n_N; T) \leq h_{пр}; \quad n_1 + n_2 + \dots + n_N = n; \\ r_1 < r_2 < \dots < r_N; \quad r_N \leq \sqrt{S/\pi}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (39)$$

Эта задача допускает решение, как и предыдущая, при любых по сложности гидрогеологических условиях разработки промысла, которые отражаются на величине понижения уровня h_k , площади участка месторождения S и, следовательно, на расположении скважин промысла и на величине искомым эксплуатационных запасов $Q_{пл}$. Эта задача может быть решена на ЭВМ с помощью программы, составленной для решения предыдущей задачи, если вместо $\max Q_{пл}$ искать $\min(-Q_{пл})$ при указанных ограничениях на переменные (39).

Мы рассмотрели лишь математические модели, отвечающие двум критериям оптимальности. Существуют, конечно, и другие критерии оптимальности разработки промысла, отвечающие другим целевым установкам. Например, в качестве критерия оптимальности можно выбрать критерий эффективности капиталовложений [18]. Однако этот вопрос, естественно, требует дополнительного детального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математические методы и ЭВМ в экономических исследованиях. Ташкент, «Наука», 1965.
2. М. В. Мееров. Система многосвязного регулирования. М., «Наука», 1965.
3. А. Г. Арье, С. С. Бондаренко, Л. В. Боровский, В. М. Кононов, М. И. Корогодский, Н. А. Плотников, С. В. Темко, Г. Ц. Тумаркин. Гидродинамическое и предварительное технико-экономическое обоснование технологической схемы разработки Тобольского и Черкашинского участков Тюменского месторождения подземных промышленных вод. Отчет МГРИ, 1965.
4. Н. А. Плотников, С. С. Бондаренко, И. К. Гавич, Г. Ц. Тумаркин. Указания по методике расчетов параметров для оценки запасов подземных иодобромных вод и по самой оценке таких запасов в Тюменской области. Отчет МГРИ, 1961.
5. С. В. Темко. Математическая, гидродинамическая и технико-экономическая постановка задачи по выбору и обоснованию рациональной системы эксплуатации месторождения подземных йодных вод. Отчет МГРИ, 1965.
6. В. Н. Щелкачев. Подсчет сумм четных степеней расстояний до вершин правильного многоугольника. Тр. Моск. нефт. ин-та, вып. 13, 1953.
7. В. Н. Щелкачев. Уточнение формулы для подсчета сумм четных степеней расстояний до вершин правильного многоугольника. Тр. Моск. нефт. ин-та, вып. 14, 1955.
8. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
9. С. Гасс. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961.
10. В. М. Коган, Т. М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. М., «Энергия», 1964.
11. Н. Н. Ченцов, Н. Н. Абрамов, В. И. Павлов. Водоснабжение. М., Госстройиздат, 1950.
12. Л. Д. Рудрявцев. О некоторых математических вопросах теории электрических цепей. Успехи матем. наук, 1948, т. 3, № 4 (26).
13. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
14. Ф. Л. Черноусько. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, вып. 4, 749—753.
15. Ф. Вульф. Новые методы нелинейного программирования. В сб. Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. Под ред. В. С. Немчинова. М., «Мысль», 1965.
16. Л. В. Канторович. О методе наискорейшего спуска. Докл. АН СССР, 1947, т. 56, № 3.
17. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
18. Б. Н. Михалевский. Две задачи оценки эффективности капиталовложений в отрасль. В сб. [15].

Поступила в редакцию
15 XII 1965