ЭКОНОМИКА 1968
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том IV, вып. 1

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ЛИТЕЙНОГО ПРОИЗВОДСТВА

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, В. И. ШЛЕФРИН

(Минск)

Развитие литейного производства, являющегося важнейшей заготовительной базой машиностроения, требует создания специализированных заводов, цехов и участков, обеспечивающих отливками машиностроительные предприятия экономического района или группы экономических районов.

Специализация литейного производства позволяет существенно улучшить использование производственных мощностей за счет интенсификации технологических процессов, внедрения высокопроизводительного оборудования, комплексной механизации и автоматизации производства. С увеличением объема производства однородной продукции обеспечивается достижение высоких технико-экономических показателей работы заводов, цехов и участков, в частности, по себестоимости и съему литья с единицы площади. Зависимости себестоимости и размера производственной площади, необходимой для выпуска литья, от уровня концентрации производства представляют собой возрастающие выпуклые вверх функции (см., например, [1, 2]).

Снижение себестоимости единицы литья в результате специализации сопровождается, как правило, определенными капиталовложениями. Поэтому при обосновании плана специализации необходимо исследовать зависимости и удельных капиталовложений от уровня концентрации производства на каждом предприятии по каждому виду отливок.

Специализация литейного производства приводит к расширению кооперированных связей, что увеличивает объем перевозок литья. В связи с этим в большинстве случаев при расчетах экономической эффективности специализации нельзя игнорировать увеличение издержек на транспортировку литья.

Себестоимость производства отливок и удельные капиталовложения, с одной стороны, и затраты на транспортировку литья к потребителю, с другой, оказывают противоположное влияние на экономическую эффективность разных вариантов, так как чем выше специализация производства, тем больше радиусы перевозок. Естественно поставить вопрос о выборе такой специализации, при которой достигаются наименьшие суммарные затраты (производственные и транспортные),— это типично экстремальная задача.

Настоящая статья посвящена рассмотрению математического аспекта задачи специализации литейного производства и представляет собой попытку разработки общей схемы математической постановки задачи. Поэтому вопросы эффективности математических методов и оценки их точности, которые могут быть использованы при решении практических задач спепиализации литейного производства, здесь не рассматриваются.

Задача оптимальной специализации литейного производства по критерию совокупных затрат. Сущность задачи состоит в следующем. В экономическом районе имеются литейные цеха (заводы), выпускающие отливки разных видов. Известно расположение машиностроительных заводов и их потребности в отливках. Определены транспортные расходы по доставке единицы литья от каждого литейного цеха к каждому потребителю. Установлены зависимости производственных затрат на единицу литья каждого вида в каждом цехе, а также съема литья с единицы производственной площади от уровня концентрации производства. (Предполагается, что в производственные затраты на единицу литья включены удельные капиталовложения с учетом коэффициента эффективности.)

Требуется определить оптимальную специализацию цехов и кооперированные связи с тем, чтобы удовлетворить потребителей в отливках необходимых им видов. В качестве критерия оптимальности принимается минимум суммарных затрат (производственных и транспортных).

Пусть имеются: m — виды литья, отливаемого в цехах экономического района $(i = 1, 2, \ldots, m)$; n — литейные цеха в экономическом районе $(j = 1, 2, \ldots, n)$; l — потребители литья в экономическом районе $(k = 1, 2, \ldots, l)$.

Искомые неизвестные обозначим: x_{ij} — количество литья (m) i-го вида, отливаемое в j-м цехе; x_{ij}^k — объем перевозок литья (m) i-го вида от j-го цеха к k-му потребителю.

Обозначим известные величины: d_i^k — потребность k-го пункта в i-м литье $(т)$; a_i — общая потребность экономического района в i-м литье $(т)$, $a_i = \sum\limits_{k=1}^{l} d_i^k$; s_j — производственная площадь j-го цеха $(м^2)$; c_{ij}^k — стоимость (руб.) транспортировки единицы i-го литья от j-го цеха к k-му потребителю; $\varphi_{ij}(x_{ij})$ — зависимость производственных затрат (руб.) на выпуск литья i-го вида от уровня концентрации в j-м цехе; $p_{ij}(x_{ij})$ — производственная площадь $(м^2)$, занимаемая i-м видом литья в j-м цехе.

В принятых обозначениях задача оптимальной специализации литейного производства по критерию совокупных затрат математически формулируется следующим образом. Необходимо определить такую специализацию цехов x_{ij}, а также такие объемы перевозок x_{ij}^k, при которых целевая функция

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} c_{ij}^k x_{ij}^k$$

принимает минимальное значение при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

т. е. потребности экономического района во всех видах литья должны быть удовлетворены;

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}(x_{ij}) \leqslant s_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

т. е. потребная площадь для изготовления m видов литья, отливаемых в j-м цехе, не должна превышать величины площади цеха;

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = d_i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, l, \tag{3}$$

т. е. потребность в i-м виде литья k-го потребителя должна покрываться привозом из литейных цехов этому потребителю;

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ij}^k = x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

т. е. выпуск литья i-го вида в j-м цехе должен быть равен количеству литья этого вида, отправляемого из этого цеха во все пункты потребления;

$$x_{ij}^k \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, l \tag{5}$$

(перевозки неотрицательны).

Так как функционал L представляет собой вогнутую функцию, то наша задача сводится к задаче минимизации вогнутого функционала при нелинейных ограничениях. Дело осложняется еще и тем, что в силу вогнутости функций $p_{ij}(x_{ij})$ область определения функционала может оказаться невыпуклой. В настоящее время нет эффективных методов решения задач такого класса.

Поэтому ограничения (2) заменяем линейными ограничениями следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

где b_j — общее количество (вес) всех видов литья, которое отливалось в j-м цехе до специализации. Предполагается

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Таким образом, за счет замены ограничений (2) избавляемся от нелинейных ограничений и получаем задачу вогнутого программирования при линейных ограничениях (1), (3)—(6). Как известно, общий метод решения задач такого класса изложен в [3].

В результате решения указанной задачи будет получен план специализации, дающий минимум совокупных затрат (производственных и транспортных). Так как этот минимум достигается концентрацией производства однородных отливок, а общее количество выпускаемого литья остается прежним, то за счет увеличения съема литья с единицы производственной площади происходит высвобождение производственных площадей. Высвобождаемые площади можно условно считать вновь построенными, а их стоимость нужно добавить к общему экономическому эффекту.

Задача оптимальной специализации литейного производства по критерию выпуска продукции. Специализацию литейного производства целесообразно проводить в первую очередь за счет наиболее полного использования и наращивания мощностей действующих предприятий. Увеличение уровня концентрации производства однородных отливок за счет сокращения номенклатуры выпускаемой продукции в каждом цехе позволяет без больших капиталовложений увеличить выпуск литья в действующих цехах. Поэтому естественно поставить задачу об оптимальном распределении производства отливок между действующими цехами с целью обеспечения максимального выпуска литья с соблюдением его комплектности. Однако экономико-математическая модель специализации по критерию выпуска продукции приводит к экстремальной задаче на невыпуклой области.

Сформулируем задачу следующим образом. Требуется распределить заданную программу производства литья между цехами так, чтобы площадь, потребная для изготовления отливок всех видов, была минимальной (что равносильно требованию максимального высвобождения производственной площади). Высвобожденные площади позволят увеличить выпуск литья сверх заданного плана.

Предполагается, что литейные цеха расположены в одном промышленном узле с заводами — потребителями литья (в этом случае удельный вес транспортных расходов в сумме совокупных затрат незначителен).

Таким образом, задача состоит в достижении минимума занимаемой производственной площади

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_{ij}) \tag{7}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}(x_{ij}) \leqslant s_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

В силу вогнутости функций $p_{ij}(x_{ij})$ здесь вновь имеет место задача нелинейного программирования с невыпуклой областью определения. Поэтому заменяем ограничения (9) линейными ограничениями следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где b_j — общее количество (вес) всех видов литья, которое отливалось в j-м цехе до специализации.

В результате этого наша задача формулируется как задача нахождения минимума функционала (7) при ограничениях (8), (10), (11), т. е. как задача вогнутого программирования при ограничениях транспортного типа. Для решения задач подобного класса в [3] предлагается специальный метод поиска глобального минимума, состоящий из следующих двух этапов: на первом этапе осуществляется последовательный поиск локального минимума, исходя из произвольной вершины многогранника, определенного ограничениями (8), (10), (11); второй этап, состоящий из решения некоторого числа вспомогательных транспортных задач, представляет собой процесс отыскания глобального минимума.

Решением изложенной выше задачи будет план распределения производства литья между цехами с максимальным высвобождением совокупной площади.

При этом за счет замены ограничений (9) ограничениями (11) в некоторых цехах может потребоваться дополнительная производственная площадь. Однако в силу того, что в этих цехах общее количество литья остается прежним (см. (11)), увеличение потребной площади можно объяснить лишь деспециализацией указанных цехов. Это нужно понимать так, что деспециализация некоторых цехов может случиться; цель ее — максимальная специализация большинства цехов, так как по смыслу задачи максимум высвобождения площади достигается за счет увеличения уровня концентрации однородных отливок. Кроме того, в связи с достаточной жесткостью ограничений (11) потребность в дополнительной площади в этих цехах будет невелика.

Для частного случая, когда функции $p_{ij}(x_{ij})$ отличаются друг от друга незначительно, так что этим различием можно пренебречь, предлагается следующий прямой метод построения локального минимума. Находим $a_\mu = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $b_\nu = \max(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *. Полагаем $x_{\mu\nu} = \min(a_\mu, b_\nu)$.

Если $a_\mu > b_\nu$, то $x_{\mu\nu} = b_\nu$ и $x_{i\nu} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \mu + 1, \ldots, m$.

Если $a_\mu < b_\nu$, то $x_{\mu\nu} = a_\mu$ и $x_{\mu j} = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu + 1, \ldots, n$.

Если $a_\mu = b_\nu$, то $x_{\mu\nu} = a_\mu = b_\nu$, а все остальные элементы как μ-й строки, так и ν-го столбца равны нулю.

В первом случае вместо b_ν ставим 0, а a_μ заменяем числом $a_\mu - b_\nu$. Во втором случае вместо a_μ ставим 0, а b_ν заменяем числом $b_\nu - a_\mu$. В последнем случае на месте a_μ и b_ν одновременно ставим 0. Изложенная процедура есть первый шаг алгоритма.

Следующий, второй шаг аналогичен. Среди оставшихся объемов потребления и объемов производств выбираем соответственно максимальные числа и поступаем далее так же, как при первом шаге.

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока не определим все неизвестные числа x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$.

В результате получаем план $N = \{x_{ij}^0\}$, являющийся локальным минимумом функции $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p(x_{ij})$ при ограничениях (8), (10), (11). Доказательство этого утверждения содержится в [4].

Таким образом, в этом частном случае необходимость поиска локального минимума (первый этап процедуры Хоанга Туя) отпадает.

В заключение необходимо отметить, что модели, изложенные в настоящей статье, не отражают, конечно, действительность во всей ее сложности и многогранности. В них сделана попытка учесть те основные факторы, от которых нельзя отвлечься при определении специализации литейного производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Газалиев, А. Т. Засухин. Эффективность специализации и кооперирования в машиностроении. М., Госпланиздат, 1960.
2. Н. А. Орлов и др. Специализация и кооперирование в промышленности СССР. М., «Мысль», 1964.
3. Хоанг Туй. Вогнутое программирование при линейных ограничениях. Докл АН СССР, 1964, т. 159, № 1.
4. В. А. Емеличев. Об одной задаче вогнутого программирования. Изв. АН БССР (сер. физ.-матем. наук), 1965, № 3.

Поступила в редакцию
8 IX 1965

* Если таких чисел несколько, то берем любое из них, например, первое в нашей последовательности.