ЭКОНОМИКА 1968
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ том IV, вып. 1

ВЗАИМОСВЯЗЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ε-УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО И ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н. И. АРБУЗОВА

(Москва)

В [1] сформулировано в аналитическом виде достаточное условие на ΔP_j — приращение j-го столбца матрицы A в задаче линейного программирования $\max CX$, $AX = B$, $X \geqslant 0$, обеспечивающее постоянство оптимального базиса, которое означает, что одни и те же ограничения $x_j \geqslant 0$ остаются натянутыми, или выполненными как точные равенства.

В настоящей работе, исходя из определения стохастической устойчивости $\operatorname{mod} \varepsilon$ решения задачи выпуклого программирования, данного в [2], будет получено необходимое и достаточное условие ε-устойчивости (в терминологии [2]) задачи $\max CX$, $AX \leqslant B$, $X \geqslant 0$ со случайным первым столбцом матрицы A, т. е. задачи $\max CX$,

$$P_1(\xi)x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n \leqslant B; \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad \text{(I)}$$

Элементы столбца $P_1(\xi)$ — случайные независимые величины $a_{11}(\xi), \ldots, a_{m1}(\xi)$. Пересечение i-го ограничения $a_{i1}(\xi)x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$ с гиперплоскостью $x_1 = 0$ детерминировано (рис. 1).

Реализации i-го ограничения образуют однопараметрический пучок гиперплоскостей γ_i. Гиперплоскости уровня целевой функции параллельны.

Пусть задача (I) в среднем, т. е. при среднем значении $P_1(\xi)$, имеет единственный оптимальный план X^0 с положительной компонентой x_1^0. Произведем проективное преобразование переменных $Y = \varphi(X)$:

$$y_1 = 1/x_1,\ y_2 = x_2/x_1,\ \ldots,\ y_n = x_n/x_1.$$

Задача (I) превратится в задачу дробно-линейного программирования:

$$\max \frac{c_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n}{y},$$

$$-By_1 + P_2y_2 + \ldots + P_ny_n \leqslant -P_1(\xi), \qquad \text{(II)}$$

$$y_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В задаче (II) случайным является столбец свободных членов ограничений. Решение задачи (II) в среднем существует, поскольку $x_1^0 > 0$: $Y^0 = \varphi(X^0)$. Гиперплоскости уровня задачи (II) образуют однопараметрический пучок γ (рис. 2), имея общее пересечение с гиперплоскостью $y_1 = 0$.

Реализации i-го ограничения в задаче (II) параллельны, а область D допустимых планов может быть неограниченной. ε-Устойчивость задачи (II) означает постоянство множества меченых индексов, т. е. индексов натянутых ограничений, с вероятностью $1 - \varepsilon$.

Докажем эквивалентность ε-устойчивости (I) и (II) задач. Если задача (I) ε-устойчива, то, поскольку $x_1^0 > 0$, ограничение $x_1 \geqslant 0$ с вероятностью $1-\varepsilon$ остается свободным. Тогда с вероятностью $1-\varepsilon$ задача (II) разрешима единственным образом, и оптимальный план $Y^0(\xi) = \varphi[X^0(\xi)]$ удовлетворяет ограничениям с теми же индексами, что и

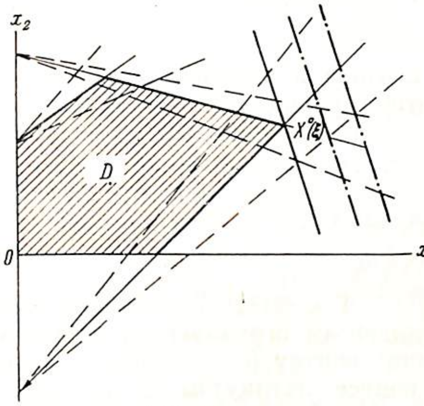

Рис. 1

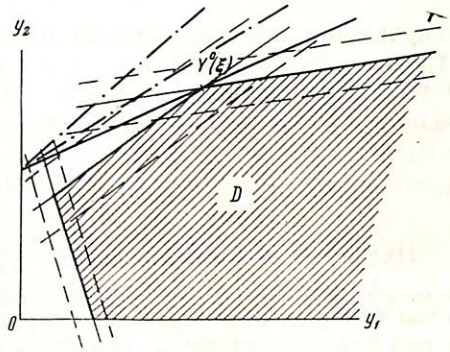

Рис. 2

$X^0(\xi)$, т. е. задача (II) ε-устойчива. Наоборот, если ε-устойчива задача (II), то, поскольку $y_1^0 > 0$, ограничение $y_1 \geqslant 0$ с вероятностью $1-\varepsilon$ свободно. На множестве G меры $1-\varepsilon$ в пространстве Ω случайных векторов $P_1(\xi)$ существует единственное решение задачи (I) $X^0(\xi) = \varphi^{-1}[Y^0(\xi)]$, удовлетворяющее на всем множестве одним и тем же ограничениям. Поэтому задача (I) ε-устойчива.

Изучим ε-устойчивость задачи (II). Пусть экстремум в среднем Y^0 лежит в пересечении гиперплоскостей ограничений с индексами $i_1, \ldots, i_k$; $j_1, \ldots, j_l$, причем $k + l = n$. Перенумеровав ограничения и переменные, можно без ограничения общности считать, что мечеными в среднем являются индексы $1, \ldots, k$; $k+1, \ldots, n$. Выпишем матрицу L меченых в среднем нормалей и ее подматрицу M:

$$\begin{pmatrix} -b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1k} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ & & & \vdots & & & \\ -b_k & a_{k2} & \ldots & a_{kk} & a_{k,\,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ & & \vdots & \\ -b_k & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы M обозначим Δ, а дополнительный минор к элементу (ij) в матрице M — Δ_{ij}. Целевой вектор или градиент целевой функции $(-c, c_2, \ldots, c_n)$ имеет одну степень свободы. Экстремальное значение целевой функции при средних значениях a_{ij} обозначим C^0. Вычислим значения $\underline{c}$ и $\bar{c}$, $\underline{c} < \bar{c}$, при которых двумерная плоскость, натянутая на всевозможные значения целевого вектора $(-c_1, c_2, \ldots, c_n)$, пересекает положительный конус, натянутый на нормали из матрицы L. Для этого найдем сначала значение c^i, при котором целевой вектор принадлежит линейной оболочке всех нормалей из матрицы L, кроме i-й, $i \leqslant k$. Определим c^i из уравнения $-c^i\Delta_{i1} + \sum_{j=2}^{k} c_j\Delta_{ij} = 0$, которое получается, если в матрицу L вместо i-й строки подставить целевой вектор и приравнять нулю ее определитель. Заметим, что при некоторых i система может не иметь решения.

Далее найдем c^j из уравнения:

$$c_j\Delta + c^j \sum_{i=1}^{k} a_{ij}(-1)^{i+1}\Delta_{i1} - \sum_{\nu=2}^{k} c_\nu \sum_{i=1}^{k} a_{ij}\Delta_{i\nu}(-1)^{i+\nu} = 0,$$

получаемого при подстановке целевого вектора в матрицу L вместо j-й строки, $j > k$. При $c = c^j$ целевой вектор принадлежит оболочке всех нормалей из матрицы L, кроме j-й. Далее из значений c^i и c^j (всего их $\leqslant n$) возьмем два значения, ближайшие к c^0, т. е.

$$\underline{c} = \max_{\substack{i\leqslant k\\ j>k}} (c^i, c^j < c^0), \quad \bar{c} = \min_{\substack{i\leqslant k\\ j>k}} (c^i, c^j > c^0).$$

Натянем на гиперплоскости уровней $\underline{c}$ и $\bar{c}$ конус β. Если вершина $1, \ldots, k;\ k+1, \ldots, n$, обозначенная по индексам ограничений, пересечением которых она образована, принадлежит конусу β, то целевой вектор в ней все еще лежит в положительном конусе, натянутом на меченые в среднем нормали. Отсюда усматривается необходимый и достаточный признак устойчивости задачи (II), а с ней и задачи (I): если $P(\beta) \geqslant 1 - \varepsilon$, задачи (I) и (II) ε-устойчивы.

Далее, пусть вектор $P_1(\xi)$ распределен нормально с математическим ожиданием P_1 и матрицей ковариации

$$\begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m{}^2 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание $N(\xi)$ обозначим N, а матрицу ковариации Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k{}^2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем $f(Z)$ — плотность распределения $Z(\xi) = M^{-1}N(\xi)$.

$$f(Z) = \frac{\sqrt{|M^{-1}\Sigma(M^{-1})'|}}{(2\pi)^{k/2}} e^{-Q/2},$$

где квадратичная форма $Q = (Z - M^{-1}N)'M^{-1}\Sigma(M^{-1})'(Z - M^{-1}N)$, после чего легко определить меру соответствующего цилиндра.

Исходя из необходимого и достаточного признака ε-устойчивости задачи (I), можно создать ряд легко реализуемых достаточных признаков.

Приношу глубокую благодарность В. Л. Данилову за ценные замечания в ходе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Barnett. Stability of the Solution to a Linear Programming Problem. Operat. Res. Quart., 1962, v. 13, № 3.
2. Н. И. Арбузова, В. Л. Данилов. Об одной задаче стохастического линейного программирования и ее устойчивости. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 1.

Поступила в редакцию
3 VIII 1965