ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
1968 том IV, вып. 1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. А. КАПЛАН

(Новосибирск)

Предлагаемый ниже метод реализует идею приближенного решения задачи вогнутого программирования путем построения и решения последовательности задач линейного программирования. По способу аппроксимации он может быть отнесен к группе методов отсечения.

В конце статьи проводится сопоставление рассматриваемого метода с методом отсечения Келли [1].

Рассматривается задача отыскания максимума линейной функции $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ на множестве $X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : g_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ при условии, что все функции g_i вогнутые.

К такому виду, как известно (см., например, [2]), легко приводится любая задача вогнутого программирования. Заметим, что, вводя функцию $\bar{g}(x) = \inf_i g_i(x)$, можно задать множество X следующим образом: $X = \{x : \bar{g}(x) \geqslant 0\}$.

В дальнейшем предполагается, что множество X ограниченное и имеет внутренние точки, на которых функция $\bar{g}$ принимает положительные значения.

Будем считать, что каким-то образом определена некоторая внутренняя точка x^* и построен содержащий множество X ограниченный многогранник: $\Omega_0 = \{x\colon \psi_l(x) \geqslant 0,\ l = 1, 2, \ldots, t\}$, где

$$\psi_l(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{lk} x_k - b_l, \qquad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Заметим, что, если среди ограничений $g_i(x) \geqslant 0$ есть линейные, их целесообразно ввести в число ограничений, определяющих Ω_0.

В процессе решения задачи строится последовательность многогранников $\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_k \supset \Omega_{k+1} \supset \ldots$. Для каждого из них решается задача линейного программирования и находится вершина $y^k \in \Omega_k$, в которой достигает максимума на Ω_k функция f.

Если некоторая точка $y^k \in X$, то y^k — оптимальное решение исходной задачи; следовательно, процесс окончен.

Если $y^k \notin X$, определяем набор индексов $I_k = \{i : g_i(y^k) < 0\}$, а также находим положительное решение $\lambda_i^{(k)}$ уравнения $g_i(x^* + \lambda(y^k - x^*)) = 0$, $i \in I_k$ и точку $x^k = x^* + \lambda^{(k)}(y^k - x^*)$, где $\lambda^{(k)} = \min\limits_{i \in I_k} \lambda_i^{(k)}$. Затем определяем уравнение $\psi_{t+k+1}(x) = \nabla \bar{g}(x^k)(x - x^k) = 0$ гиперплоскости, опорной к множеству X в точке x^k (такая гиперплоскость может быть не единственной, если функция $\bar{g}$ в точке x не дифференцируема; в этом случае определяем уравнение какой-нибудь из опорных гиперплоскостей).

Добавляя линейное ограничение $\psi_{t+k+1}(x) \geqslant 0$, отсекаем часть многогранника Ω_k, не содержащую точек X. Получается новый многогранник

$\Omega_{k+1} = \{x : \psi_l(x) \geqslant 0,\ \ l = 1, 2, \ldots, t+k+1\}$, и процесс может быть повторен.

При анализе сходимости метода будем предполагать, что все функции g_i непрерывно дифференцируемы на некотором открытом множестве X^*, содержащем $\widetilde{X} = \{x\colon\ g(x) \geqslant -\bar{\delta}^*\}$, где $\bar{\delta}^* > 0$ такое, что $\widetilde{X} \supset \Omega_0$. Тогда найдется такое число L, что $|\nabla \bar{g}(x)| \leqslant L$ для $x \in \widetilde{X}$ *.

Введем следующие обозначения. Пусть при любом δ, $0 < \delta < \delta^*$, $Y_\delta = \{y : \bar{g}(y) \leqslant -\delta\}$.

Для каждого $y \in Y_\delta$ под $\xi(y)$ будем понимать вектор ξ, удовлетворяющий соотношениям $\bar{g}(\xi) = 0$, $\xi = \lambda y + (1-\lambda) x^*$, $0 < \lambda < 1$. При этом, как легко видеть, ξ и λ определяются из приведенных выше условий единственным образом.

Лемма. *Для каждого* $\delta > 0$ *существует* $\varepsilon > 0$, *такое, что* $\nabla \bar{g}(\xi(y)) \cdot (y - \xi(y)) \leqslant -\varepsilon$ *при всех* $y \in Y_\delta$.

Доказательство. Ввиду вогнутости $\bar{g}$ при любом $y \in Y_\delta$ справедливо неравенство $\bar{g}(\xi(y)) - \bar{g}(y) \leqslant \nabla \bar{g}(y)(\xi(y) - y)$. Отсюда

$$\bar{g}(\xi(y)) - \bar{g}(y) \leqslant |\nabla \bar{g}(y)| \cdot |\xi(y) - y|,\quad |\xi(y) - y| \geqslant \frac{\bar{g}(\xi(y)) - \bar{g}(y)}{L} \geqslant \frac{\delta}{L}.$$

Далее, $\bar{g}(x^*) - \bar{g}(x) \leqslant \nabla \bar{g}(x)(x^* - x) \leqslant |\nabla \bar{g}(x)| \cdot |x^* - x|$, откуда для x таких, что $\bar{g}(x) = 0$, имеем:

$$|\nabla \bar{g}(x)| \geqslant \frac{\bar{g}(x^*)}{|x^* - x|} \geqslant \frac{\bar{g}(x^*)}{\rho}$$

где

$$\rho = \max_{x \in X} |x^* - x|.$$

Наконец, для любого $y \in Y_\delta$ справедливо неравенство

$$\frac{|\nabla \bar{g}(\xi(y))(y - \xi(y))|}{|\nabla \bar{g}(\xi(y))| \cdot |y - \xi(y)|} \geqslant \frac{\rho_1}{\rho},$$

где ρ' — минимум расстояния от x^* до точек границы множества X.

Замечая, что при любом y угол между векторами $\nabla \bar{g}(\xi(y))$ и $y - \xi(y)$ больше $\pi/2$, окончательно получаем:

$$\nabla \bar{g}(\xi(y))(y - \xi(y)) \leqslant -\frac{\bar{g}(x^*)}{\rho} \frac{\delta}{L} \frac{\rho'}{\rho}$$

Таким образом, в качестве искомого ε можно взять $\bar{g}(x^*)\delta\rho'/\rho^2 L$, и лемма доказана.

Теорема. *Из последовательности точек* $y^0, y^1, \ldots, y^k, \ldots$, *определенных в процессе реализации метода, может быть выделена подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке* $\bar{x} \in X$.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что существует подпоследовательность $\{y^{n_j}\}$, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \bar{g}(y^{n_j}) = 0$.

Допустим, что такой подпоследовательности не существует. Тогда найдется такое число $\bar{\delta}$, $0 < \delta < \delta^*$, что $\bar{g}(y^k) \leqslant -\bar{\delta}$ при всех k, начиная с некоторого номера K.

Согласно лемме, существует $\varepsilon > 0$, при котором для всех $y \in Y_{\bar{\delta}}$ справедливо неравенство $\nabla \bar{g}(\xi(y))(y - \xi(y)) \leqslant -\varepsilon$.

* В точках, где функция $\bar{g}$ дифференцируема, $\nabla \bar{g}(x)$ — градиент $\bar{g}$; в точках $x \in \widetilde{X}$, где дифференцируемость нарушена, под $\nabla \bar{g}(x)$ понимается любой линейный функционал, опорный к $\bar{g}$, т. е. такой функционал $\nabla \bar{g}(x)$, что $\bar{g}(x+z) \leqslant \bar{g}(x) + \nabla \bar{g}(x) z$ при всех $z \in R^n$.

Следовательно, начиная с номера K, имеем $\nabla \bar{g}(x^k)(x^k - y^k) \geqslant \varepsilon$.

Далее, неравенство $\nabla \bar{g}(x^k)(y^{k+l} - x^k) \geqslant 0$ справедливо при любых $k, l \geqslant 1$, ибо $y^{k+l} \in \Omega_k$ при $l \geqslant 1$.

Из двух последних неравенств получаем, что для $k \geqslant K$, $l \geqslant 1$ $\nabla \bar{g}(x^k)(y^{k+l} - y^k) \geqslant \varepsilon$, следовательно, $|\nabla \bar{g}(x^k)| \cdot |y^{k+l} - y^k| \geqslant \varepsilon$, $|y^{k+l} - y^k| \geqslant \varepsilon / L$.

Последнее неравенство противоречит компактности Ω_0.

Таким образом, показано существование такой подпоследовательности $\{y^{n_j}\}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \bar{g}(y^{n_j}) = 0$. Из нее может быть выбрана сходящаяся подпоследовательность $\{y^{n_{j_t}}\}$, о которой и идет речь в формулировке теоремы.

Замечание 1. Очевидно, что точка $\bar{x} \in X$, являющаяся пределом подпоследовательности $\{y^{n_{j_t}}\}$, доставляет решение исходной задачи.

Действительно, так как при любом n $f(y^n) \geqslant f(y^{n+1}) \geqslant \bar{f}$, где $\bar{f} = \max\limits_{x \in X} f(x)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} f(y^{n_{j_t}}) \geqslant \bar{f}$. Но по непрерывности f $\lim\limits_{t\to\infty} f(y^{n_{j_t}}) = f(\bar{x}) \leqslant \bar{f}$. Следовательно, $f(\bar{x}) = \bar{f}$.

Замечание 2. Легко видеть, что наряду с подпоследовательностью $\{y^{n_{j_t}}\}$ подпоследовательность $\{x^{n_{j_t}}\}$ также сходится к точке $\bar{x}$.

Отметим, что рассмотренный метод в отличие от многих методов вогнутого программирования учитывает по существу не выпуклость функций, входящих в задачу, а выпуклость множества X при условии, что существует способ отыскания точек $x^0, x^1, \ldots, x^k, \ldots$. Например, он эффективен для задач, где g_i — дифференцируемые на X^* квазивогнутые функции; при этом разве лишь несколько труднее определять $\lambda^{(k)}$. Здесь $\lambda^{(k)}$ определяется как наибольшее значение λ, удовлетворяющее всем условиям $g_i(x^* + \lambda(y^k - x^*)) \geqslant 0$, $i \in I_k$.

Сходимость метода для этого случая сразу следует из предыдущих рассуждений, так как всегда существует обладающая подходящими дифференциальными свойствами вогнутая функция $\varphi(x)$, такая, что $\{x : \varphi(x) \geqslant 0\} = \{x : \bar{g}(x) \geqslant 0\}$.

Сопоставим теперь изложенный метод с методом Келли. В методе Келли на каждом шагу добавляется не одно линейное ограничение, а столько, сколько нарушено нелинейных. Как правило, одно из добавленных на данном шагу ограничений является значительно более важным, а введением остальных достигается малый эффект. Число нарушенных ограничений может быть весьма большим, особенно если неудачно построен многогранник Ω_0.

Далее, в приведенном здесь алгоритме получаем одновременно оценки решения снизу и сверху, что позволяет судить о близости решения к оптимальному, причем, как следует из замечания 2, эти оценки эффективны. В методе Келли мы приближаемся к решению лишь сверху.

Метод Келли не может быть применен для решения задач с квазивогнутыми функциями.

В рассмотренном методе могут возникнуть дополнительные трудности, связанные с отысканием внутренней точки множества X. В такой ситуации, возможно, целесообразнее пользоваться методом Келли.

В большинстве практических задач, однако, такая точка либо известна, либо может быть легко определена по смыслу задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Kelley. The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs. J. Soc. Ind. Appl, Math., 1960, v. 8, № 4.
2. Ф. Вулф. Новые методы нелинейного программирования. В сб. Применение математики в экономике, т. 3. М., «Мысль», 1965 (перев. с англ.).

Поступила в редакцию
10 III 1967